Série 6 (ESPACES DE PROBABILITES)

Exercices corrigés

Exercice 1 :

Soit $P(f_1) = p,$ On a alors $P(f_2) = P(f_3) = p,$ et $P(h_1) = P(h_2) = 2p$. La somme des cinq probabilités doit être égale à un :

$$p + p + p + 2p + 2p = 1 \text{ Ou } p = \frac{1}{7}$$

On cherche (i) $P(\{f_1, f_2, f_3\})$ et (ii) $P(\{h_1, f_1\})$. Or par définition,

$$P(\{f_1, f_2, f_3\}) = P(f_1) + P(f_2) + P(f_3) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

$$P(\{h_1, f_1\}) = P(h_1) + P(f_1) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

Exercice 2 :

On doit résoudre l'équation $10x^2 - 9x + 2 = 0$. On inontre facilement que les deux racines de cette équation sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{5}$.

a) Comme $P(A) \prec P(B)$, on a $P(A) = \frac{2}{5}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$.

b) Si A et B sont incompatibles, $P(A \cap B) = 0$ et

$$P(AUB) = P(A) + P(B) = \frac{9}{10} = 0.9$$

c) Si A et B sont indépendants, $P(A \bigcap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{5} = 0.2$ et

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{10} = 0.7$$

<u>Exercice 3</u> :

a) Espace des épreuves :

- On ne tient pas compte des couleurs des cartes

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 10, V, D, R\}$$

- On tient compte des couleurs des cartes

$$\Omega = \{Car1, Car2, ..., CarR, Couer1, Coeur2, ..., CoeurR, Piq1, Piq2, ..., PiqR, Tre1, Tre2, ..., TreR\}$$

b) Dans ce dernier Cas

1) $P(\text{"}Roi\text{"}) = \dfrac{Card(Roi)}{Card(\Omega)} = \dfrac{4}{52}$

2) $P(\text{"}as \text{ de } trèfle\text{"}) = \dfrac{1}{52}$

3) $P(\text{"}2 \; de \; coeurs \; ou \; as \; de \; trèfle\text{"}) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{52} + \dfrac{1}{52} - 0 = \dfrac{1}{26}$

4) $P(\text{"}Carreau\text{"}) = \dfrac{Card(Carreau)}{Card(\Omega)} = \dfrac{13}{52}$

5) Soit B l'évènement : « Une couleur quelconque sauf la couleur Carreau »

$$P(B) = 1 - P(\text{"}Carreau\text{"}) = 1 - \frac{13}{52} = \frac{39}{52}$$

6) $P(\text{"}Un \; cinq \; ou \; un \; pique\text{"}) = P(\text{"}cinq\text{"}) + P(\text{"}pique\text{"}) - P(\text{"}cinq \; et \; pique\text{"})$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$

7) $P(Ni \; un \; cinq \; ni \; un \; pique) = P(C(cinq) \cap C(pique)) =$

$$P(C(cinq \cup pique)) = 1 - P(\text{"}cinq\text{"} \cup \text{"}pique\text{"}) = 1 - \frac{16}{52} = \frac{36}{52}$$

<u>Exercice 4</u> :

(i) Soit $P(1) = p.$ On a alors $P(2) = 2p,\; P(3) = 3p,\; P(4) = 4p,\; P(5) = 5p$ et $P(6) = 6p.$
Comme la somme des probabilités doit être égale à un, on a
$p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$ Où $p = \dfrac{1}{21}$, De sorte que

$$P(1) = \frac{1}{21}, P(2) = \frac{2}{21}, P(3) = \frac{1}{7}, P(4) = \frac{4}{21}, P(5) = \frac{5}{21}, P(6) = \frac{2}{7}$$

(ii) $P(A) = P(\{2, 4, 6\}) = \dfrac{4}{7},\;\; P(B) = P(\{2, 3, 5\}) = \dfrac{10}{21},\;\; P(C) = P(\{1, 3, 5\}) = \dfrac{3}{7}.$

(iii)

(a) L'événement tel qu'un nombre pair ou un nombre premier apparaisse est $A \cup B = \{2,4,6,3,5\}$, ce qui revient à dire que 1 ne doit pas apparaitre. D'où $P(A \cup B) = 1 - P(1) = \dfrac{20}{21}$.

(b) L'événement tel qu'un nombre premier impair apparaisse est $B \cap C = \{3,5\}$.

D'où $P(B \cap C) = P(\{3,5\}) = \dfrac{8}{21}$.

(c) L'événement tel que A mais non B se produise est $A \cap C_B = \{4,6\}$.

D'où $P(\{4,6\}) = \dfrac{10}{21}$

<u>Exercice 5</u> :

(i) Notons A l'évènement : « Les deux boules sont blanches »

$$Card(\Omega) = C_{16}^2,\ \mathrm{P(A)}=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{C_7^2}{C_{16}^2}$$

(ii) Notons C l'événement « Obtenir deux boules de la même couleur »

$C = A \cup A_2 \cup A_3$ Où

A_2 : « Obtenir deux boules de couleur noir »

A_3 : « Obtenir deux boules de couleur rouge »

$$P(C) = P(A \cup A_2 \cup A_3) = P(A) + P(A_2) + P(A_3) -$$
$$P(A \cap A_2) - P(A \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A \cap A_2 \cap A_3)$$
$$= \frac{C_7^2}{C_{16}^2} + \frac{C_5^2}{C_{16}^2} + \frac{C_4^2}{C_{16}^2} - 0 - 0 - 0 + 0$$
$$= \frac{C_7^2 + C_5^2 + C_4^2}{C_{16}^2}$$

(iii) D L'événement « au moins une des deux boules soit rouge ».

$D = D_1 \cup D_2$ Où D_1 = « Obtenir exactement une boule rouge »

D_2 « Obtenir exactement deux boules rouges »

$$P(D) = P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2)$$
$$\frac{C_4^1 C_{12}^1}{C_{16}^2} + \frac{C_4^2}{C_{16}^2} - 0 = \frac{C_4^1 C_{12}^1 + C_4^2}{C_{16}^2}$$

<u>Exercice 6</u> :

Le bon, la Brute et le Truand tirent simultanément et de manière indépendante sur un cactus. Sachant que les probabilités de faire mouche sont pour chaque tireur :

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{2}{3}\ et\ P(C)=\frac{1}{4}$$

Quelle est probabilité que le cactus soit touché.

(a) Par au moins un tireur ?
(b) Par au moins deux tireurs ?
(c) Par un seul tireur ?

Les événements considérés sont indépendants dans leur ensemble.

(a) On cherche la probabilité de l'événement $E=A\cup B\cup C$:

$$P(E)=1-P(C_E)=1-P(C_A)P(C_B)P(C_C)=1-\frac{1}{8}=0.875$$

(b) On cherche la probabilité de l'événement

$$F=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)$$

En utilisant la formule de Poincaré, il vient

$$P(F)=P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)-2P(A\cap B\cap C)$$
$$=\frac{1}{2}*\frac{2}{3}+\frac{1}{2}*\frac{1}{4}+\frac{2}{3}*\frac{1}{4}-2*\frac{1}{12}=\frac{11}{24}=0.459$$

c) Il s'agit de $P(E)-P(F)=\frac{7}{8}-\frac{11}{24}=\frac{5}{12}=0.416$

<u>Exercice 7</u> :

$Crad(\Omega)=C_{32}^{5}=201376$

i) $Card(A)=C_4^4*C_{28}^1=28$

C_4^4 Façons de tirer 4as.

C_{21}^1 Façons de tirer la dernière carte

$$P(A)=\frac{1}{7192}$$

ii) $Card(B)=8*Card(A)$

$$P(B)=\frac{1}{899}$$

(iv) $C=C_1\cup C_2$

$C_1:$ $3\ coeurs\ et\ 2\ dames\ (pas\ la\ dame\ de\ coeur)$

$Card(C_1)=C_7^3*C_3^2=35*3=105.$

$C_2:$ $3\ coeurs\ dont\ la\ dame\ de\ coeur)\ et\ une\ autre\ dame$

$Card(C_2)=C_1^1*C_2^7*C_3^1*C_{21}^1=1323$

$$P(C) = \frac{1428}{201376}$$

Exercice 8 :

Soit A_k l'événement : « Obtenir le n° -k en lançant le dé » $k = 1,2,3,4,5,6,\ P(A_k) = \rho k.$ Où ρ est le coefficient de proportionnalité

$$\begin{aligned}
&P(A_2 \cup A_4 \cup A_6) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) \\
&(Car\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j) \\
&= 2\rho + 4\rho + 6\rho = 12\rho \\
&P(\Omega) = 1 = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6) \\
&= \sum_{j=1}^{6} P(A_j) = \sum_{j=1}^{6} j\rho = \rho \sum_{j=1}^{6} j = \rho \frac{67}{2} \Rightarrow \\
&\rho 21 = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{21} \Rightarrow P(A_2 \cup A_4 \cup A_6) = \frac{12}{21}
\end{aligned}$$

Exercice 9 :

On extrait au hasard une boule d'une boîte contenant 6 boules rouges, 4 boules blanches et 5 boules bleues. Déterminer la probabilité d'avoir une boule

(a) Rouge, (b) Blanche, (c) Bleue, (d) Pas rouge, (e) Rouge ou blanche

(i) $P(R) = \frac{2}{5}$

(ii) $P(B) = \frac{4}{15}$

(iii) $P(BL) = \frac{1}{3}$

(iv) $P(PR) = \frac{9}{15}$

(v) $P(RB) = \frac{10}{15}$