

# ESPACES DE PROBABILITES

Dr. BEGHRICHE A/FATEH

03/ 03 / 2020

## ① Univers

- 1 Univers
- 2 Ensemble des événements

- 1 Univers
- 2 Ensemble des événements
- 3 **Probabilités**

- 1 Univers
- 2 Ensemble des événements
- 3 Probabilités
- 4 **Probalité uniforme**

- 1 Univers
- 2 Ensemble des événements
- 3 Probalités
- 4 Probalité uniforme
- 5 Exercices

# Univers





## Definition

C'est l'ensemble  $\Omega$  des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

# Evénements aléatoires

## Definition

## Definition

On appelle événement aléatoire, associé à l'expérience  $\varepsilon$ , tout événement dont la réalisation dépend des résultats de l'expérience  $\varepsilon$ .

## Definition

On appelle événement aléatoire, associé à l'expérience  $\varepsilon$ , tout événement dont la réalisation dépend des résultats de l'expérience  $\varepsilon$ . Un événement aléatoire s'identifie donc à une partie  $A$  de  $\Omega$ .

## Definition

On appelle événement aléatoire, associé à l'expérience  $\varepsilon$ , tout événement dont la réalisation dépend des résultats de l'expérience  $\varepsilon$ . Un événement aléatoire s'identifie donc à une partie  $A$  de  $\Omega$ .

## Example

Dans l'expérience qui consiste à jouer deux fois à pile ou face, on considère l'événement:

## Definition

On appelle événement aléatoire, associé à l'expérience  $\varepsilon$ , tout événement dont la réalisation dépend des résultats de l'expérience  $\varepsilon$ . Un événement aléatoire s'identifie donc à une partie  $A$  de  $\Omega$ .

## Example

Dans l'expérience qui consiste à jouer deux fois à pile ou face, on considère l'événement:

$$A = \{\text{on obtient deux faces identiques}\} = \{PP, FF\}$$

## Exemple



## Exemple

Dans l'expérience qui consiste à jouer à pile ou face jusqu'à l'obtention d'un pie, on considère l'événement:

## Exemple

Dans l'expérience qui consiste à jouer à pile ou face jusqu'à l'obtention d'un pile, on considère l'événement:

$$B = \{ \text{on obtient pile en au plus quatre lancers} \} = \{ P, FP, FFP, FFFP \}.$$

## Exemple

## Exemple

Dans l'expérience qui consiste à jouer à pile ou face jusqu'à l'obtention d'un pile, on considère l'événement:

$$B = \{\text{on obtient pile en au plus quatre lancers}\} = \{P, FP, FFP, FFFP\}.$$

## Exemple

Par rapport au nombre de kilomètres parcourus par une comète, on considère l'événement:

## Exemple

Dans l'expérience qui consiste à jouer à pile ou face jusqu'à l'obtention d'un pile, on considère l'événement:

$$B = \{\text{on obtient pile en au plus quatre lancers}\} = \{P, FP, FFP, FFFP\}.$$

## Exemple

Par rapport au nombre de kilomètres parcourus par une comète, on considère l'événement:

$$C = \{\text{le nombre de kilomètres parcourus est supérieur à } 10000\text{km}\} = [10000, +\infty[$$

# Ensemble des événements

# Ensemble des événements

-

# Ensemble des événements

-Soit  $A$  l'ensemble des événements que l'on souhaite prendre en compte dans le cadre d'une expérience aléatoire.

# Ensemble des événements

-Soit  $A$  l'ensemble des événements que l'on souhaite prendre en compte dans le cadre d'une expérience aléatoire. La structure de  $A$  doit satisfaire à la définition suivante:



-Soit  $A$  l'ensemble des événements que l'on souhaite prendre en compte dans le cadre d'une expérience aléatoire. La structure de  $A$  doit satisfaire à la définition suivante:

## Definition

1) L'ensemble  $A$  est stable par passage au complémentaire.

-Soit  $A$  l'ensemble des événements que l'on souhaite prendre en compte dans le cadre d'une expérience aléatoire. La structure de  $A$  doit satisfaire à la définition suivante:

## Definition

1) L'ensemble  $A$  est stable par passage au complémentaire.

$$\text{si } B \in A \text{ alors } CB \in A$$

-Soit  $A$  l'ensemble des événements que l'on souhaite prendre en compte dans le cadre d'une expérience aléatoire. La structure de  $A$  doit satisfaire à la définition suivante:

## Definition

1) L'ensemble  $A$  est stable par passage au complémentaire.

$$\text{si } B \in A \text{ alors } CB \in A$$

2) L'ensemble  $A$  est stable par réunion dénombrable: pour toute famille  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'événements aléatoires de  $A$ , on a

-Soit  $A$  l'ensemble des événements que l'on souhaite prendre en compte dans le cadre d'une expérience aléatoire. La structure de  $A$  doit satisfaire à la définition suivante:

## Definition

1) L'ensemble  $A$  est stable par passage au complémentaire.

$$\text{si } B \in A \text{ alors } CB \in A$$

2) L'ensemble  $A$  est stable par réunion dénombrable: pour toute famille  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'événements aléatoires de  $A$ , on a

$$U_{n=0}^{+\infty} A_n \in A$$

-Soit  $A$  l'ensemble des événements que l'on souhaite prendre en compte dans le cadre d'une expérience aléatoire. La structure de  $A$  doit satisfaire à la définition suivante:

## Definition

1) L'ensemble  $A$  est stable par passage au complémentaire.

$$\text{si } B \in A \text{ alors } CB \in A$$

2) L'ensemble  $A$  est stable par réunion dénombrable: pour toute famille  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'événements aléatoires de  $A$ , on a

$$U_{n=0}^{+\infty} A_n \in A$$

On parle alors de tribu de  $\Omega$ . Le couple  $(\Omega, A)$  s'appelle un espace probabilisable.

# Probabilités

# Probabilités

Première approche intuitive

On considère un sac contenant 11 boules identiques mais de couleurs différentes :



On considère un sac contenant 11 boules identiques mais de couleurs différentes : 3 boules blanches et 8 boules noires.

On considère un sac contenant 11 boules identiques mais de couleurs différentes : 3 boules blanches et 8 boules noires. On cherche, en tirant au hasard une boule du sac, à obtenir une boule blanche.

On considère un sac contenant 11 boules identiques mais de couleurs différentes : 3 boules blanches et 8 boules noires. On cherche, en tirant au hasard une boule du sac, à obtenir une boule blanche. On se trouve en présence de 11 cas également possibles puisque la boule tirée peut être l'une quelconque des 11 boules que contient le sac.

On considère un sac contenant 11 boules identiques mais de couleurs différentes : 3 boules blanches et 8 boules noires. On cherche, en tirant au hasard une boule du sac, à obtenir une boule blanche. On se trouve en présence de 11 cas également possibles puisque la boule tirée peut être l'une quelconque des 11 boules que contient le sac. Parmi ces 11 cas, 3 cas sont favorables à la réalisation de l'événement "la boule tirée est blanche".

On considère un sac contenant 11 boules identiques mais de couleurs différentes : 3 boules blanches et 8 boules noires. On cherche, en tirant au hasard une boule du sac, à obtenir une boule blanche. On se trouve en présence de 11 cas également possibles puisque la boule tirée peut être l'une quelconque des 11 boules que contient le sac. Parmi ces 11 cas, 3 cas sont favorables à la réalisation de l'événement "la boule tirée est blanche". Il y a donc 3 chances sur 11 d'obtenir une boule blanche.

On considère un sac contenant 11 boules identiques mais de couleurs différentes : 3 boules blanches et 8 boules noires. On cherche, en tirant au hasard une boule du sac, à obtenir une boule blanche. On se trouve en présence de 11 cas également possibles puisque la boule tirée peut être l'une quelconque des 11 boules que contient le sac. Parmi ces 11 cas, 3 cas sont favorables à la réalisation de l'événement "la boule tirée est blanche". Il y a donc 3 chances sur 11 d'obtenir une boule blanche. Plus généralement, on souhaite pouvoir associer à chaque  $A$  un poids  $P(A)$  représentant la chance que cet événement soit réalisé à la suite d'une expérience aléatoire.



Soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience  $\varepsilon$  et  $A$  l'ensemble des événements.



Soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience  $\varepsilon$  et  $A$  l'ensemble des événements.

## Definition

On appelle probabilité sur  $(\Omega, A)$ , toute application  $P$  de  $A$  dans  $[0, 1]$  telle que:

Soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience  $\varepsilon$  et  $A$  l'ensemble des événements.

## Definition

On appelle probabilité sur  $(\Omega, A)$ , toute application  $P$  de  $A$  dans  $[0, 1]$  telle que:  
1)  $P(A) = 1$

Soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience  $\varepsilon$  et  $A$  l'ensemble des événements.

## Definition

On appelle probabilité sur  $(\Omega, A)$ , toute application  $P$  de  $A$  dans  $[0, 1]$  telle que:

1)  $P(A) = 1$

2) Si  $C$  et  $B$  sont deux événements aléatoires incompatibles, alors

Soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience  $\varepsilon$  et  $A$  l'ensemble des événements.

## Definition

On appelle probabilité sur  $(\Omega, A)$ , toute application  $P$  de  $A$  dans  $[0, 1]$  telle que:

1)  $P(A) = 1$

2) Si  $C$  et  $B$  sont deux événements aléatoires incompatibles, alors

$$P(C \cup B) = P(C) + P(B) \quad (\text{additivité simple})$$

Soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience  $\varepsilon$  et  $A$  l'ensemble des événements.

## Definition

On appelle probabilité sur  $(\Omega, A)$ , toute application  $P$  de  $A$  dans  $[0, 1]$  telle que:

1)  $P(A) = 1$

2) Si  $C$  et  $B$  sont deux événements aléatoires incompatibles, alors

$$P(C \cup B) = P(C) + P(B) \quad (\text{additivité simple})$$

3) Si  $(A_n)_{n \geq 0}$  est une famille d'événements aléatoires deux à deux incompatibles, alors

Soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience  $\varepsilon$  et  $A$  l'ensemble des événements.

## Definition

On appelle probabilité sur  $(\Omega, A)$ , toute application  $P$  de  $A$  dans  $[0, 1]$  telle que:

1)  $P(\Omega) = 1$

2) Si  $C$  et  $B$  sont deux événements aléatoires incompatibles, alors

$$P(C \cup B) = P(C) + P(B) \quad (\text{additivité simple})$$

3) Si  $(A_n)_{n \geq 0}$  est une famille d'événements aléatoires deux à deux incompatibles, alors

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \quad (\sigma\text{-additivité})$$

Soit  $\Omega$  l'univers d'une expérience  $\varepsilon$  et  $A$  l'ensemble des événements.

## Definition

On appelle probabilité sur  $(\Omega, A)$ , toute application  $P$  de  $A$  dans  $[0, 1]$  telle que:

1)  $P(\Omega) = 1$

2) Si  $C$  et  $B$  sont deux événements aléatoires incompatibles, alors

$$P(C \cup B) = P(C) + P(B) \quad (\text{additivité simple})$$

3) Si  $(A_n)_{n \geq 0}$  est une famille d'événements aléatoires deux à deux incompatibles, alors

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \quad (\sigma\text{-additivité})$$

Le triplet  $(\Omega, A, P)$  s'appelle un espace de probabilité.

# Probabilités

## Propriété



Si  $A$  et  $B$  sont deux événements aléatoires, on a

Si  $A$  et  $B$  sont deux événements aléatoires, on a

$$1) 0 \leq P(A) \leq 1 \text{ et } P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Si  $A$  et  $B$  sont deux événements aléatoires, on a

1)  $0 \leq P(A) \leq 1$  et  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2) Si  $A \subset B$  alors  $P(A) \leq P(B)$

Si  $A$  et  $B$  sont deux événements aléatoires, on a

- 1)  $0 \leq P(A) \leq 1$  et  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- 2) Si  $A \subset B$  alors  $P(A) \leq P(B)$
- 3) Si  $\Omega$  est dénombrable, alors

Si  $A$  et  $B$  sont deux événements aléatoires, on a

- 1)  $0 \leq P(A) \leq 1$  et  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- 2) Si  $A \subset B$  alors  $P(A) \leq P(B)$
- 3) Si  $\Omega$  est dénombrable, alors

$$P(A) = \sum_{w \in A} P(w)$$



**Formule de Poicaré:** Soient  $A$  et  $B$  deux événements aléatoires. On a

**Formule de Poicaré:** Soient  $A$  et  $B$  deux événements aléatoires. On a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Proof.

dans le cours □



# Probabilité uniforme



## Definition

Soit  $P$  une probabilité définie sur un univers  $\Omega$ .

## Definition

Soit  $P$  une probabilité définie sur un univers  $\Omega$ . On dit que  $P$  est la probabilité uniforme sur  $\Omega$  si tous les événements élémentaires  $w$  de  $\Omega$  sont équiprobables:

## Definition

Soit  $P$  une probabilité définie sur un univers  $\Omega$ . On dit que  $P$  est la probabilité uniforme sur  $\Omega$  si tous les événements élémentaires  $w$  de  $\Omega$  sont équiprobables:

$$P(w) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$$

## Definition

Soit  $P$  une probabilité définie sur un univers  $\Omega$ . On dit que  $P$  est la probabilité uniforme sur  $\Omega$  si tous les événements élémentaires  $w$  de  $\Omega$  sont équiprobables:

$$P(w) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$$

Ou  $\text{Card}(\Omega)$  représente le nombre d'éléments de  $\Omega$ .

## Definition

Soit  $P$  une probabilité définie sur un univers  $\Omega$ . On dit que  $P$  est la probabilité uniforme sur  $\Omega$  si tous les événements élémentaires  $w$  de  $\Omega$  sont équiprobables:

$$P(w) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$$

Où  $\text{Card}(\Omega)$  représente le nombre d'éléments de  $\Omega$ .

Pour tout événement aléatoire  $A$ , On a donc

## Definition

Soit  $P$  une probabilité définie sur un univers  $\Omega$ . On dit que  $P$  est la probabilité uniforme sur  $\Omega$  si tous les événements élémentaires  $w$  de  $\Omega$  sont équiprobables:

$$P(w) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$$

Ou  $\text{Card}(\Omega)$  représente le nombre d'éléments de  $\Omega$ .

Pour tout événement aléatoire  $A$ , On a donc

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$



## Definition

Soit  $P$  une probabilité définie sur un univers  $\Omega$ . On dit que  $P$  est la probabilité uniforme sur  $\Omega$  si tous les événements élémentaires  $w$  de  $\Omega$  sont équiprobables:

$$P(w) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$$

Ou  $\text{Card}(\Omega)$  représente le nombre d'éléments de  $\Omega$ .

Pour tout événement aléatoire  $A$ , On a donc

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

On appelle le  $\text{Card}(A)$  le nombre de cas favorables et  $\text{Card}(\Omega)$  le nombre de cas possibles.

Merci pour votre attention.