

ANALYSE COMBINATOIRE

Dr. BEGHRICHE A/FATEH

25 / 02 / 2020

① Listes

- 1 Listes
- 2 Arrangements

- 1 Listes
- 2 Arrangements
- 3 **Permutations**

- 1 Listes
- 2 Arrangements
- 3 Permutations
- 4 **Combinaisons**

- 1 Listes
- 2 Arrangements
- 3 Permutations
- 4 Combinaisons
- 5 Formule du binôme de Newton

- 1 Listes
- 2 Arrangements
- 3 Permutations
- 4 Combinaisons
- 5 Formule du binôme de Newton
- 6 Exercices

Listes

Definition

Soit E un ensemble à n éléments distincts.

Definition

Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle liste de p éléments de E , toute suite ordonnée de ces p éléments pris avec remise dans E .

Definition

Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle liste de p éléments de E , toute suite ordonnée de ces p éléments pris avec remise dans E .

Exemple

Si $E = \{a, b, c\}$, les listes de 2 éléments de E sont

Definition

Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle liste de p éléments de E , toute suite ordonnée de ces p éléments pris avec remise dans E .

Exemple

Si $E = \{a, b, c\}$, les listes de 2 éléments de E sont
 $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$

Definition

Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle liste de p éléments de E , toute suite ordonnée de ces p éléments pris avec remise dans E .

Exemple

Si $E = \{a, b, c\}$, les listes de 2 éléments de E sont
 $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$

On trouve donc 9 listes de 2 éléments de E .

Definition

Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle liste de p éléments de E , toute suite ordonnée de ces p éléments pris avec remise dans E .

Exemple

Si $E = \{a, b, c\}$, les listes de 2 éléments de E sont
 $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$

On trouve donc 9 listes de 2 éléments de E .

Theorem

Le nombre de listes de p éléments de E est égal à n^p

Definition

Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle liste de p éléments de E , toute suite ordonnée de ces p éléments pris avec remise dans E .

Exemple

Si $E = \{a, b, c\}$, les listes de 2 éléments de E sont
 $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$

On trouve donc 9 listes de 2 éléments de E .

Theorem

Le nombre de listes de p éléments de E est égal à n^p

Exemple

Considérons un cadenas comportant un code à trois chiffres.

Definition

Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle liste de p éléments de E , toute suite ordonnée de ces p éléments pris avec remise dans E .

Exemple

Si $E = \{a, b, c\}$, les listes de 2 éléments de E sont
 $aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$

On trouve donc 9 listes de 2 éléments de E .

Theorem

Le nombre de listes de p éléments de E est égal à n^p

Exemple

Considérons un cadenas comportant un code à trois chiffres. Le nombre de codes possibles est 10^3 car il s'agit de listes de 3 chiffres pris parmi $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Arrangements

Definition

Definition

-Soit E un ensemble à n éléments distincts.

Definition

-Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **arrangement** de p éléments de E , toute suite ordonnée de ces p éléments pris sans remise dans E .

Definition

-Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **arrangement** de p éléments de E , toute suite ordonnée de ces p éléments pris sans remise dans E .

Example

Definition

-Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **arrangement** de p éléments de E , toute suite ordonnée de ces p éléments pris sans remise dans E .

Exemple

-Si $E = \{a, b, c, d\}$, les arrangements de 2 éléments de E sont $ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$.

On trouve donc 12 arrangements de 2 éléments de E .

Definition

-Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **arrangement** de p éléments de E , toute suite ordonnée de ces p éléments pris sans remise dans E .

Exemple

-Si $E = \{a, b, c, d\}$, les arrangements de 2 éléments de E sont $ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$.

On trouve donc 12 arrangements de 2 éléments de E .

Theorem

-Soit A_n^p le nombre d'arrangement de p éléments de E .

Theorem

-Soit A_n^p le nombre d'arrangement de p éléments de E . Alors A_n^p , si $p > n$ $A_n^p = 0$ et

Theorem

-Soit A_n^p le nombre d'arrangement de p éléments de E . Alors A_n^p , si $p > n$ $A_n^p = 0$ et si $p \leq n$

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Theorem

-Soit A_n^p le nombre d'arrangement de p éléments de E . Alors A_n^p , si $p > n$ $A_n^p = 0$ et si $p \leq n$

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

On rappelle que

$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$, avec la convention $0! = 1$

Theorem

-Soit A_n^p le nombre d'arrangement de p éléments de E . Alors A_n^p , si $p > n$ $A_n^p = 0$ et si $p \leq n$

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

On rappelle que

$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$, avec la convention $0! = 1$

Exemple

Dans une course de 18 chevaux, le nombre de tiercés possibles, dans l'ordre est $A_{18}^3 = \frac{18!}{15!} = 4896$.

Permutations

Definition

-

Definition

-Soit E un ensemble à n éléments distincts.

Definition

-Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **permutation** de E , tout arrangement des n éléments de E .

Definition

-Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **permutation** de E , tout arrangement des n éléments de E .

Example

Si $E = \{a, b, c\}$, les permutations de E sont

Definition

-Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **permutation** de E , tout arrangement des n éléments de E .

Example

Si $E = \{a, b, c\}$, les permutations de E sont
abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Definition

-Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **permutation** de E , tout arrangement des n éléments de E .

Exemple

Si $E = \{a, b, c\}$, les permutations de E sont
abc, acb, bac, bca, cab, cba.

On trouve donc 6 permutations de E .

Definition

-Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **permutation** de E , tout arrangement des n éléments de E .

Exemple

Si $E = \{a, b, c\}$, les permutations de E sont
abc, acb, bac, bca, cab, cba.

On trouve donc 6 permutations de E .

-Le nombre de permutations P_n de E est obtenu directement à partir du théorème précédent avec $p = n$.

Definition

-Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **permutation** de E , tout arrangement des n éléments de E .

Exemple

Si $E = \{a, b, c\}$, les permutations de E sont
abc, acb, bac, bca, cab, cba.

On trouve donc 6 permutations de E .

-Le nombre de permutations P_n de E est obtenu directement à partir du théorème précédent avec $p = n$.

Corollary

-Le nombre de permutations de E est $P_n = n!$.

Permutations

Theorem

(*Formule de Stirling*) – Pour n assez grand, on a

Theorem

(*Formule de Stirling*) – Pour n assez grand, on a

$$n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

Combinaisons

Definition

Soit E un ensemble à n éléments distincts.

Definition

Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **combinaison** de p éléments de E , toute suite non ordonnée ou partie de p éléments pris sans remise dans E .

Definition

Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **combinaison** de p éléments de E , toute suite non ordonnée ou partie de p éléments pris sans remise dans E .

Example

- Si $E = \{a, b, c, d\}$, les combinaisons de 2 éléments de E sont

Definition

Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **combinaison** de p éléments de E , toute suite non ordonnée ou partie de p éléments pris sans remise dans E .

Example

- Si $E = \{a, b, c, d\}$, les combinaisons de 2 éléments de E sont *ab, ac, ad, bc, bd, cd*.

Definition

Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **combinaison** de p éléments de E , toute suite non ordonnée ou partie de p éléments pris sans remise dans E .

Exemple

- Si $E = \{a, b, c, d\}$, les combinaisons de 2 éléments de E sont *ab, ac, ad, bc, bd, cd*.

On trouve donc 6 combinaisons de 2 éléments de E .

Theorem

- Soit C_n^p le nombre de combinaisons de p éléments de E . = Alors si $p > n$ $C_n^p = 0$ et si $p \leq n$

Definition

Soit E un ensemble à n éléments distincts. On appelle **combinaison** de p éléments de E , toute suite non ordonnée ou partie de p éléments pris sans remise dans E .

Exemple

- Si $E = \{a, b, c, d\}$, les combinaisons de 2 éléments de E sont ab, ac, ad, bc, bd, cd .

On trouve donc 6 combinaisons de 2 éléments de E .

Theorem

- Soit C_n^p le nombre de combinaisons de p éléments de E . = Alors si $p > n$ $C_n^p = 0$ et si $p \leq n$

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Theorem

Example

Dans un jeu de 32 cartes, le nombre de mains de 5 cartes ne comportant as est $C_{28}^5 = 98280$. En effet, il s'agit du nombre de combinaisons de 5 cartes parmi les 28 cartes du jeu autres que les 4 as.

Formule du binôme de Newton

Theorem

(Formule du binôme de Newton)-

Theorem

(Formule du binôme de Newton)-Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, On a

Theorem

(Formule du binôme de Newton)-Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, On a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Formule du binôme de Newton

Theorem

Example

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ non nul, on cherche à déterminer le terme constant de

Formule du binôme de Newton

Theorem

Example

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ non nul, on cherche à déterminer le terme constant de

$$\left(a^2 + \frac{1}{a}\right)^{12}$$

Example

Par la Formule du binôme de Newton on a

$$\left(a^2 + \frac{1}{a}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k a^{3(k-4)}.$$

Exercices

Exercices

Exercice1

Combien peut-on former de sigles d'entreprises ayant au plus quatre lettres de l'alphabet latin?

Combien peut-on former de sigles d'entreprises ayant au plus quatre lettres de l'alphabet latin?

L'alphabet latin comporte 26 lettres. Pour $n \geq 1$, il y a 26^n sigles d'entreprises

Il en découle qu'il existe

$$26 + 26^2 + 26^3 + 26^4 = 475254$$

Exercices

Exercice2

Avec les lettres du mot **SCIENCES**, combien peut- on former de mots de huit lettres ayant un sens ou non.

- On doit former des mots de huit lettres ayant un sens ou non avec le mot **SCIENCES**.

Merci pour votre attention.