(Chapter head:)*

# Chapitre 2: La mécanique des fluides

## 1. Introduction

La mécanique des fluides est une branche de la physique et c'est la science des lois de l'écoulement des fluides, c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Elle comprend deux grandes sous branches:

• La statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos, immobile, est caractérisée par **la pression**

• La dynamique des fluides, ou hydrodynamique qui étudie les fluides en mouvement est caractérisée par **un débit**.

Alors les mouvements des fluides sont des phénomènes absolument indispensables à notre organisme car l'étude de ces mouvements permet d'observer des fonctions biologiques (Circulation Artérielle, Elimination de la voie Rénale.)

- Le principal circuit de transport du corps ( transport des substrats énergétiques, des hormones, ... ) tient à l'écoulement d'un fluide: le Sang. Ce dernier va se propager dans une succession de conduits sous l'effet de la pompe cardiaque (le cœur) tout en appliquant les règles physiques de la Mécanique des Fluides

## 2. Rappel

• **Masse volumique** $\rho$:

La masse volumique, aussi appelée densité volumique de masse, est une propriété caractéristique qui représente la quantité de matière (masse) se trouvant dans un espace (une unité de volume) donné.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

L'unité de mesure dans le SI est le kilogramme par mètre cube $(Kg.m^{-3})$.

• **Volume massique** $V_m$:

Le volume massique d'un objet, ou volume spécifique, est le quotient de son volume par sa masse, et s'exprime en $(m^3.Kg^{-1})$.

$$V_m = \frac{V}{m}$$

• **Densité** $d$:

La densité (ou densité relative) d'un corps est le rapport de sa masse volumique à la masse volumique d'un autre corps pris comme référence.

$$d = \frac{\rho}{\rho_{réf}}$$

-Pour les liquides et les solides, le corps de référence est l'eau pure à 4 °C, alors $d = \frac{\rho}{\rho_{eau}}$, avec $\rho_{eau} = 10^3 Kg.m^{-3}$

-Pour les gaz, le corps de référence est l'air, à la même température et sous la même pression.

La densité d'un corps est une grandeur sans dimension et sa valeur s'exprime sans unité de mesure.

• **Pression** $P$:

Elle est définie classiquement comme l'intensité de la force qu'exerce un fluide par unité de surface.

$$P = \frac{F}{S}$$

elle s'exprime en pascals $Pa$.

• **Définition d'un Fluide:**

Un fluide considéré comme étant une substance formé d'un grand nombre de

particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler, On regroupe les liquides, les gaz et les plasmas.

Chaque fluide se caractérise: par sa vitesse, par son accélération et du point de vue dynamique par une masse élémentaire.

• **Classement des fluides:**

Un fluide est dit **incompressible** lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Sa masse volumique est constante (eau, huile).

Un fluide est dit **compressible** lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Sa masse volumique est variable (les gaz).

Dans un fluide **parfait**, les forces de contacts sont perpendiculaires aux élements de surfaces sur lesquelles elles s'exercent.

Dans un fluide **réel**, il existe des forces élementaires qui s'opossent au mouvement.

**Note**: Un fluide réel au repos, peut être considére comme parfait.

• **La viscosité dynamique** $\eta$**,**

Mesure de la résistance d'un fluide au changement de forme: la viscosité détermine la vitesse de mouvement du fluide (par exemple, la vitesse de déplacement d'une cuillère dans un bol: plus le liquide est visqueux, plus le mouvement est lent).

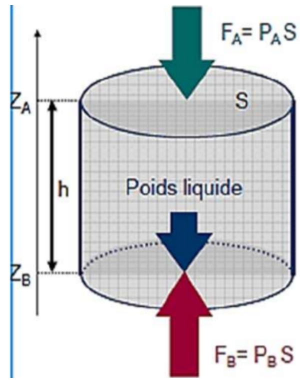
**Note :-** si $\eta = 0$,le fluide est dit parfait, il s'écoule sans frottement.
- si $\eta \neq 0$,le fluide est dit réel, il s'écoule avec frottement.

## 3. Hydrostatique

On considère un fluide immobile, incompressible et de masse volumique uniforme. à se poser, il est statique, il ne bouge pas, il ne s'écoule pas. La pression en un point est indépendante de l'orientation du capteur et s'exerce perpendiculairement aux parois. La pression est la même en tous les points situés au même niveau. La pression augmente avec la profondeur.

3.1. **Loi de Pascal. Théorème de Pascal:** la pression se transmet intégralement dans un liquide incompressible à tout les points de même altitude.

On considère une colonne de liquide qui se situe dans un environnement donné. On exerce une force $F_A$ sur cette colonne.




D'après le théorème de Pascal, cette force appliquée sur la surface $S$ crée une pression $P_A$, d'où

$$P_A = \frac{F_A}{S},$$

Pour que la colonne être equilibré et ne tombe pas, il faudra exercer une autre force $F_B$ qui vas s'associée au poids de la colonne, alors

$$P_B = \frac{F_B}{S},$$

on rappelle que le poids du liquide $= m.g = \rho.V.g = \rho.h.S.g$,

Ce poids d'après la $2^{ème}$ loi de Newton, est proportionnel à la masse de la colonne .

$$P_B.S = P_A.S + \rho.h.S.g,$$

d'où

$$P_B - P_A = \rho.g.h, \text{il vient que } dP = -\rho.g.dz$$

et c'est **la Relation fondamentale de l'hydrostatique ( RFH).**

On a,

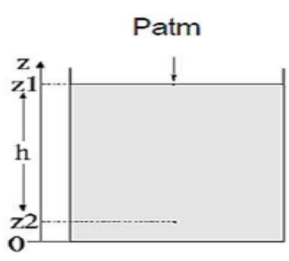
$$P_B - P_A = \rho.g.(z_A - z_B)$$

avec $h = z_A - z_B$ et $g$ est l'intensité de la pesanteur ($= 9,8\ m/s^2$), donc

$$P_B + \rho.g.z_B = P_A + \rho.g.z_A = \text{ constante.}$$

Cela démontre que l'augmentation de pression varie linéairement avec la profondeur.

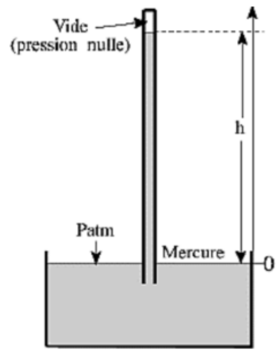
3.2. **Application.** La pression en un point est égale à la pression exercée par le liquide associée à la pression qu'exerce l'air sur le liquide.




$$P_{Z_2} = \rho.g.h + P_{atm}$$

3.2.1. *Pression atmosphérique.* Ce dispositif est le baromètre de Torricelli, c'est en fait une colonne de mercure (de masse volumique $\rho = 13.6.10^3 Kg/m^3$), la hauteur $h = 76cm$.

La mesure de la pression atmosphérique est faite avec du mercure.




Notons que $P_A = P_{vide} = 0$ et $P_B = P_{atm}$ ( points à la même altitude).

L'application de la loi fondamentale de l'hydrostatique conduit à:

$$P_{atm} = \rho.g.h$$

ce qui donne

$$P_{atm} = 13,6.10^3 Kg/m^3.9,8m/s^2.0,76m = 101,3.10^3\text{Pa}.$$

unités SI: $1\text{Pa} = 1Kg/m.s^2$.

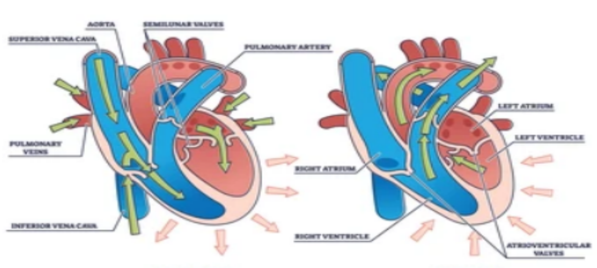
1atm = 760 mm de Hg (millimètre de mercure) = 1bar = $10^5$Pa = pression au niveau de la mer

3.2.2. *La pression artérielle.* La pression artérielle, ou pression artérielle systémique, et aussi la tension artérielle est la force exercée par le sang sur la paroi des artères, correspond à la pression du sang dans les artères de la circulation systémique (circulation principale).

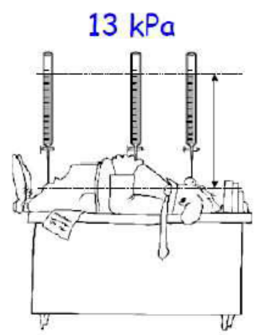
Elle est exprimée par deux valeurs :

la pression systolique (PAS) est la pression maximale, au moment de la « contraction » du cœur (systole) ;

la pression diastolique (PAD) est la pression minimale, au moment du « relâchement » du cœur (diastole).

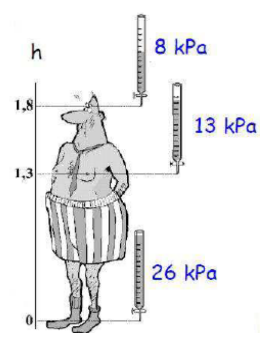



On note que par l'application de la RFH: la pression artérielle pour une personne allongée est approximativement identique au niveau de tous les point: $P_{cerveau} = P_{cœur} = P_{pieds}$,




et pour une personne debout est:

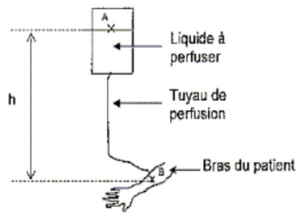
$$\begin{aligned} P_{cerveau} &= P_{cœur} - \rho g h_{cerveau} \\ P_{pieds} &= P_{cœur} + \rho g h_{cœur} \end{aligned}$$




la pression artérielle se mesure chez les animeaux au niveau de la queue ou de la patte avant.

Les valeurs normales moyennes chez le chien et le chat sont comprises entre: Pression artérielle systolique: 130-165 mmHg, diastolique: 80-120 mmHg

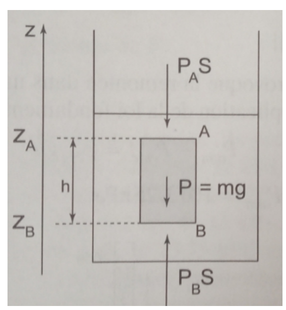
3.2.3. *La Perfusion.* La perfusion est un procédé permettant l'injection lente et continue de liquide dans la circulation sanguine habituellement dans une veine. Un cathéter est placé dans le bras du patient, en un point $B$ Pour que le liquide puisse s'écouler dans le sang il faut que la pression du liquide au contact du sang $P_B$ soit supérieure à la pression sanguine $P$: $P_B > P$




Or on applique la RFH entre les deux point $A$ et $B$, $P_B - P_A = \blacksquare gh$ où $\rho$ masse volumique du liquide à perfuser Le niveau du liquide à perfuser est horizontal et à la pression $P_A$ égale la pression atmosphérique ($p_{atm} = 101300$ Pa) Donc $P_B = P_A + \blacksquare gh$, $P_B = (p_{atm} + \blacksquare gh) > P$.

$$h = \frac{P_B - P_{atm}}{\rho g}$$

3.3. **La poussée d'Archimède.** La poussée d'Archimède est la traduction du fait que tout corps plongé dans un fluide reçoit une poussée verticale de bas en haut égale au poids du volume de liquide déplacé.




Le poids de la colonne fictive de liquide simulant le corps immergé $s$ a pour expression: $m.g = \rho_{fluide}.h.S.g$,

ce qui conduit à: $P_B.S - P_A.S = \rho_{fluide}.S.h.g$,

La quantité $S.h$ correspond au volume immergé, et $P_B.S - P_A.S$ correspond à la résultante des forces à s'appliquer sur la colonne fictive pour la maintenir en équilibre. C'est précisément la valeur de la poussée d'Archimède. On a donc:

$$\Pi_{arch} = \rho_{fluide}.V_{imm}.g$$

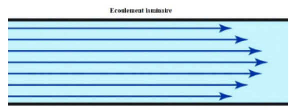
la colonne fictive est désormais remplacée par un objet de volume $V$ et de masse volumique $\rho$. Le volume immergé sera tel que le poids de l'objet équilibre exactement la poussé d'Archimède. On a donc: $\rho.V.g = \rho_{fluide}.V_{imm}.g$, ce qui conduit à:

$$\frac{V_{imm}}{V} = \frac{\rho}{\rho_{fluide}}.$$

Si $\rho > \rho_{fluide}$ le corps coule. Sinon, $\rho < \rho_{fluide}$ et le corps est en partie immergé, ou s'élève dans l'air dans le cas d'un ballon gonflé à l'Hélium.

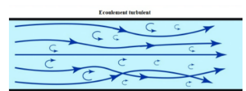
## 4. Hydrodynamique

4.1. **Régime d'écoulement.** Un régime d'écoulement est dit **laminaire** si la vitesse du fluide est variante en chaque point.




Un régime d'écoulement est dit **permanent** ou **stationnaire** si les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, masse volumique, ...), ont une valeur constante au cours du temps (des invariants). Cet écoulement se fait sans perte d'énergie, dont les forces de frottements sont négligées.

Un régime d'écoulement est dit **turbulent** si la vitesse d'écoulement élevée, les molécules tourbillonnent à des vitesses différentes et sans direction précise et les lignes se croisent.




4.1.1. *Nombre de Reynolds.* Afin de caractériser un régime d'écoulement, on introduit un nombre sans dimension. Il s'agit du nombre de Reynolds $R_e$. Par définition

$$R_e = \frac{v.L}{\upsilon},$$ avec $v$: vitesse, $L$: une longueur caractéristique de l'écoulement et $\upsilon = \frac{\eta}{\rho}$ est la viscosité cinématique.

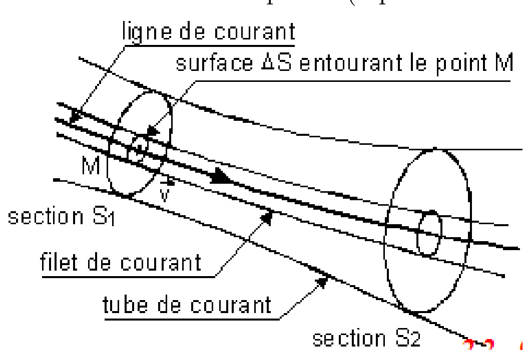
pour un nombre de Reynolds élevé, les non-linéarités vont intervenir et faire apparaître des turbulences. Pour un écoulement simple dans le cas d'une géométrie cylindrique (sans présence d'obstacle), on admet que si $R_e < 2000$, l'écoulement est laminaire, et si $R_e > 2000$ l'écoulement est turbulent.

On définit pour le régime permanent les termes suivants:

- **Ligne de courant**: est la courbe suivant laquelle se déplace un élément de fluide $dV$.

**Tube de courant**: Ensemble de lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée, dont le filet de courant s'appuyant sur un petit élément de surface $\Delta S$.

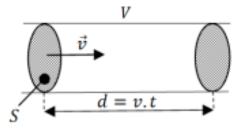
La section de base $\Delta S$ du tube ainsi définie est suffisamment petite pour que la vitesse du fluide soit la même en tous ses points (répartition uniforme).




4.2. **Conservation du débit le long d'un tube de courant.** Le débit est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement.

**- Débit volumique**

Si $dV$ est le volume de fluide qui a traversé une section droite $s$ de la conduite pendant le temps $dt$,




par définition le débit volumique est:

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{s.\nu.dt}{dt} = s.\nu \qquad \text{unité: } m^3.s^{-1}$$

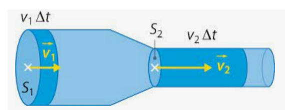
**- Débit-massique**

Si $dm$ est la masse de fluide qui a traversé une section droite $s$ de la conduite pendant le temps $dt$, par définition le débit massique est:

$$Q_m = \frac{dm}{dt} \qquad \text{unité: } Kg.s^{-1}$$

Et comme $\rho = \frac{dm}{dV}$, il vient $Q_m = \rho.Q$.

Considérons un tube de courant entre deux sections $S_1$ et $S_2$.




Tout le liquide qui entre dans le tube par la section d'entrée $s_1$en sort par la section de sortie $s_2$, il y a donc conservation du débit le long du tube.

$$\begin{aligned} dV_1 &= s_1.\nu_1.dt = Q_1.dt = dV_2 = Q_2.dt \Rightarrow \\ Q_1 &= Q_2 \qquad \text{et} \qquad Q = s_1.\nu_1 = s_2.\nu_2 \text{ (**Equation de continuité).**} \end{aligned}$$

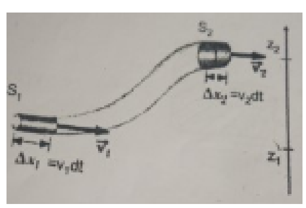
Et on peut écrire

$$dm_1 = \rho.s_1.\nu_1 dt = dm_2 = \rho.s_2.\nu_2 dt \text{ (**conservation de masse**).}$$

La masse de fluide entrant dans le tube est égale à la masse de fluide sortant du tube.

4.2.1. *Loi de Bernoulli ( conservation d'énergie mécanique).* On dit aussi conservation de **la charge.**

On calcule la variation d'énergie cinétique entre l'entrée et la sortie du tube de courant:




$$dE_c = \frac{1}{2} dm(\nu_2^2 - \nu_1^2),$$

Les traveaux de forces exerçant sur le fluide:

Travail de force de pesanteur: $\delta W_g = dm.g.(z_1 - z_2) < 0$

Travail des forces de pression: sur $S_1$ est $\delta W_{P_1} = P_1.s_1 dx_1 = P_1.s_1.\nu_1 dt > 0$ (travail moteur) et sur $S_2$ est $\delta W_{P_2} = -P_2.s_2 dx_2 = -P_2.s_2.\nu_2 dt < 0$ (travail résistant). Appliquons le théorème de l'énergie cinétique: (La variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures)

$$\begin{aligned} dE_c &= \sum \delta W_i \\ &= \delta W_{P_1} + \delta W_{P_2} + \delta W_g \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{2}dm(\nu_2^2 - \nu_1^2) = P_1.s_1.\nu_1 dt - P_2.s_2.\nu_2 dt + dm.g.(z_1 - z_2)$$

il vient

$$\frac{1}{2}\rho.dm.(\nu_2^2 - \nu_1^2) = P_1.\rho.s_1.\nu_1 dt - P_2.\rho.s_2.\nu_2 dt + \rho.dm.g.(z_1 - z_2)$$

Or, d'après l'équation de conservation du débit ou de masse:

$$\frac{1}{2}\rho.\nu_2^2 - \frac{1}{2}\rho\nu_1^2 = P_1 - P_2 + \rho.g.z_1 - \rho.g.z_2$$

donc

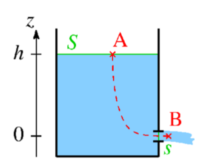
$$P_2 + \rho.g.z_2 + \frac{1}{2}\rho.\nu_2^2 = P_1 + \rho.g.z_1 + \frac{1}{2}\rho\nu_1^2$$

on constate que pour un fluide parfait ( **incompressible, non visqueux** ), le long d'une ligne de courant:

$$P + \rho.g.z + \frac{1}{2}\rho.\nu^2 = Cte \qquad \text{est l'équation de Bernoulli.}$$

4.2.2. *Applications de la loi de Bernoulli.*
Formule de Torricelli. On considère une cuve remplie d'un liquide parfait et incompressible, dans laquelle a été percé un trou de petite taille à une hauteur $h$ en dessous de la surface libre du liquide. On note $A$ un point choisi au hasard sur la surface libre du liquide est relié par une ligne de courant avec un point $B$ pris au niveau du jet libre généré par le trou.

Notons que le diamètre du trou soit négligeable devant $h$ de liquide, $h$ est considéré comme constant au niveau du trou. Et la surface $s$ du trou soit négligeable devant la surface libre $S$ du liquide; la conservation du débit impose que $\nu_A.S = \nu_B.s$




Appliquant la loi de Bernoulli au niveau des points $A$ et $B$:

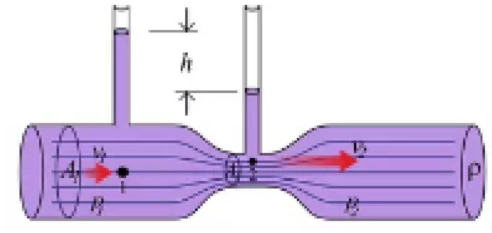
$$P_A + \rho.g.z_A + \frac{1}{2}\rho.\nu_A^2 = P_B + \rho.g.z_B + \frac{1}{2}\rho\nu_B^2$$

Or la pression au niveau de la surface libre du liquide $P_A$ et la pression au niveau du jet libre $P_B$ sont toutes deux égales à la pression atmosphérique $P_{atm}$, et d'autre part on peut négliger la vitesse du liquide au point $A$, d'après la conservation de débit $\nu_A.S = \nu_B.s$ d'où $\nu_A = \nu_B.\frac{s}{S} << \nu_B$, Alors $\nu_A = 0$. En déduit

$$\nu_B = \sqrt{2g\,(z_A - z_B)} = \sqrt{2gh} \qquad \text{Loi de Torricelli.}$$

Alors le débit volumique $Q = s.\nu_B$ dépend donc de la hauteur de liquide restante dans le récipient. Dans le cas d'une perfusion le débit diminue donc avec le temps.

Effet Venturi. Les particules du fluide se retrouvent accélérées à cause d'un rétrécissement de leur zone de circulation.



D'après le théorème de Bernoulli: si le débit de fluide est constant et que le diamètre diminue, la vitesse augmente nécessairement; du fait de la conservation de l'énergie, l'augmentation d'énergie cinétique se traduit par une diminution de la pression.

La conservation du débit se traduit par $\nu_1.s_1 = \nu_2.s_2$, et la relation de Bernoulli appliquée entre deux points d'une ligne de courant à altitude constante $z$, conduit à:

$$P + \frac{1}{2}\rho\nu^2 = cte, \text{ et comme } s_1 > s_2 \text{ donc } \nu_1 < \nu_2 \ \Rightarrow P_1 > P_2,$$

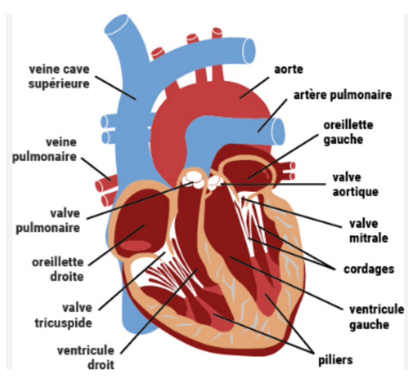
il vient que

$$\begin{aligned} P_1 + \frac{1}{2}\rho\nu_1^2 &= P_2 + \frac{1}{2}\rho.\nu_2^2 \\ \text{d'où } P_1 - P_2 &= \frac{1}{2}\rho.\left(\nu_2^2 - \nu_1^2\right) > 0 \end{aligned}$$

et on obtient

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho.\nu_1^2\left(\frac{\nu_2^2}{\nu_1^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\rho.\nu_1^2\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} - 1\right).$$

Valves cardiaques. Un dysfonctionnement de la valve mitrale est une pathologie classique aux conséquences graves. La variation de pression de part et d'autre d'une valve peut être estimé en utilisant la relation de Bernoulli.

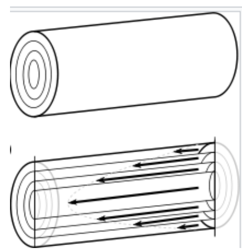



pendant le relachement du coeur au début de la diastole, les valves sont fermées. La pression dans l'oreillette est trop faible pour provoquer l'ouverture de la valve mitrale. Le ventricule reprend sa forme initiale à volume constant. On est dans le cas ou $z$ est constant.

On note $\rho_s$ la masse volumique du sang. Dans le cas de la valve mitrale ($VM$) qui sépare le ventricule gauche de l'oreillette gauche ($OG$), on a donc:

$$P_{OG} + \frac{1}{2}\rho_s \nu_{OG}^2 = P_{VM} + \frac{1}{2}\rho_s.\nu_{VM}^2$$

4.3. **Loi de poisseuille.** La loi de poisseuille décrit l'écoulement laminaire d'un fluide réel dans une conduite cylindrique. Sa viscosité entraîne la perte d'énergie due aux forces de frottement et qui mène à une diminution de pression.



La loi de Poisseuille permet de calculer la chute de pression entre deux points, comme suit:

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4}.Q = Q.R$$

Avec $r$ est le rayon du cylindre et $L$ sa longueur. $R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$ est la résistance à l'écoulement.

## References


[1] Physique pour les sciences de la vie et de la santé, Clément Santamaria.
[2] Cours biophysique , mécanique des fluides, Dr. boudmagh.
[3] Studocu, biophysique, mécanique des fluides.
[4] Dynamique des fluides, Pr.E. IHi; CHU.Mondou Paris Est.



Institut des Sciences Vétérinaires
*E-mail address*: bensaids@hotmail.com