Institut des sciences vétérinaires
Département de préclinique 2020-2021
Biophysique

SOLUTION: SERIE 3 : Rayonnements- REM : Rayon X et γ

PARTIE 1 : Rayonnement électromagnétique, Energie de Photon $E=h\nu$,

Données : constante de Planck $h=6.62.10^{-34}$ J.s, $C=3.10^{8}$ m/s et 1 eV$=1.6.10^{-19}$

Exercice 1 :

- Montrer que l'énergie E d'un photon et sa longueur d'onde λ vérifient la relation: $\mathbf{E\ (eV) = \frac{1240}{\lambda(nm)}}$
- Calculer la fréquence et la longueur d'onde dans le vide de l'onde associée à un photon γ d'énergie 140 keV.

Solution :

- On démontre la relation $\mathbf{E\ (eV) = \frac{1240}{\lambda(nm)}}$ **(est la loi de Duane et Hunt),**

  On sait que : $E(J)= h.\nu = hc/\lambda = 6.62.10^{-34.}$ J.s x 3.10^{8} m.s^{-1}/ λ (m) $= 1.986.10^{-25}/\lambda$ (m)

  1 ev $= 1.6.10^{-19}$ J

  $$E\ (ev) = 1.986.10^{-25}/1.6.10^{-19}\ .\lambda\ (m) \simeq 1.241.10^{-6}/\lambda\ (m)$$

Pour convertir la longueur d'onde en nm, on doit multiplier et diviser l'équation par 10^{9}, Alors

$$E\ (eV) \simeq 1.24.10^{-6}\ .10^{9}/10^{9}\ .\lambda\ (m) = 1.24.10^{-6}\ .10^{9}/\lambda\ (nm) = 1240/\lambda\ (nm)$$

On a:

$$E\ (eV) = \frac{1240}{\lambda(nm)}\ ,\ \lambda\ (nm) = 1240/E\ (eV) = 1240/140.10^{3}\ eV = 8.86.10^{-3}\ nm$$

λ (m) $= 8.86.10^{-12}$ m, donc ν (s^{-1})$= c/\lambda$ (m) $= 3.10^{8}$ m. s^{-1}/ $8.86.10^{-12}$ m$= 0.34.10^{20}$ s^{-1}
la fréquence $\nu = 34.10^{18}$ Hz

Exercice 2 :

Les ondes lumineuses visibles par notre œil ne représentent qu'une petite partie du vaste domaine des ondes électromagnétiques.

1. Indiquer sur le schéma ci-après les domaines des radiations de **<u>la lumière visible</u>**, des **<u>UV</u>** et des **<u>IR</u>**

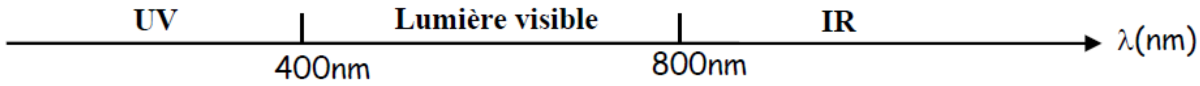
2. Une onde électromagnétique a une longueur d'onde dans le vide **$\lambda=1,5.10^{-5}$m**.
   - Quel domaine appartient cette radiation ? Justifier.
   - Calculer la fréquence de l'onde associée à cette longueur d'onde.
   - .Ecrire la relation qui lie l'énergie d'un photon à la fréquence des radiations.
   - Comment varie cette énergie quand la fréquence des radiations diminue? Justifier la réponse.

- Calculer la valeur de l'énergie associée au photon de longueur d'onde **λ=1,5.10^{-5}m.**

  .Convertir cette énergie en eV

Solution

1. Radiations de la lumière visible, des UV et des IR



2 Pour savoir à quel domaine appartient cette radiation, il faut la convertir en nm :
λ =1,5.10^{-5}m = 1,5.10^{4} nm = 15.10^{3} nm > 800nm donc Cette radiation appartient à l'IR.
3 Calcul de la fréquence ν de l'onde associée à cette longueur d'onde :
$\nu = c/\lambda$ (m) d'où ν=3.10^{8} m. s^{-1}/1.5.10^{-5} m = 2.10^{13} Hz
La relation qui lie l'énergie d'un photon à la fréquence des radiations est: $|\Delta E| = h \times \nu$.
L'énergie et la fréquence étant proportionnelles, lorsque la fréquence diminue, l'énergie diminue également.
4 Calcul de l'énergie associée au photon de longueur d'onde λ =1,5.10^{-5}m
E = h.ν = 6.62.10^{-34} J.S x 2.10^{13} s^{-1}= 13.2 .10^{-21} J = 1.32 10^{-20} J
1 ev = 1.6.10^{-19} J
E(eV) = 1.32 10^{-20} J.eV/ 1.6 10^{-19} J = 8.25 10^{-1} = 825.10^{-3} eV

Exercice 3 :

Calculer la longueur d'onde d'un avion de 10 tonnes se déplaçant à deux fois la vitesse du son, la vitesse du son dans l'air étant de 340 m. s^{-1}. Faire de même pour un proton accéléré dans un cyclotron à une vitesse de 3,5.10^{2} km. s^{-1}. Commenter [m p= 1,6726.10^{-27}].

Solution

On peut déterminer la longueur d'onde par Relation de de Broglie :

$$\boldsymbol{\lambda} = h/p = h/m.v$$

<u>Pour l'avion</u> : **λ** = 6.62.10^{-34} J.s /10.10^{3} kg.2.340 m.s^{-1} = 0.97.10^{-40} m (1J = kg.m^{2}/ s^{2}).
On remarque que la longueur d'onde est très petite par rapport à la taille de l'avion, donc le caractère ondulatoire des objets macroscopiques n'est pas observable.
<u>Pour le proton</u> : **λ** = 6.62.10^{-34} J.s /1,6726.10^{-27} kg.3,5.10^{2}.10^{3} m.s^{-1} = 1,1.10^{-12} m.
On remarque que la longueur d'onde est plus grande que la taille du noyau d'un atome (de l'ordre de 10^{-15} m). Le caractère ondulatoire doit êtrepris en compte.

PARTIE 2 : PRODUCTION DES RAYONS X- SPECTRE DE RAYON X

Exercice 1:

Dans un tube émetteur de R-X, les électrons sont accélérés par une différence de potentiel de 60 kilovolts ? On donne la masse de l'électron: m (e^{-}) = 9.1.10^{-31}Kg

a) Quelle est l'énergie cinétique acquise par ces électrons (en J et KeV)? Calculer leur vitesse.
b) Quelle est la valeur maximale que peut prendre la fréquence du photon ? à quelle longueur d'onde correspond-elle ?
c) Le rendement de ce tube étant de 2%, calculer la valeur de la constante k pour une anode en tungstène (Z=74).
d) En déduire la puissance en W du rayonnement émis si l'intensité du courant anodique est de 20 mA.

Solution

a) - Après l'échauffement de la cathode par ddp = 60kv, les électrons ont reçu de l'énergie cinétique maximale E_{cmax} égale à l'énergie électrique, égale à l'énergie électromagnétique, **Alors** $\mathbf{E_{cmax} = 1/2\ m.v^2 = e.U} = 1.6.10^{-19}c\ .60.10^{3}v = 96.10^{-16}$ J
- On déduit l'énergie cinétique en kev: E_{cmax} = e.U = e.60 kv = 60 kev
- De l'expression de l'énergie cinétique on détermine la vitesse des électrons :

$$V = \sqrt{\frac{2.Ecmax}{m}} = \sqrt{\frac{2.96.10^{-16}\,J}{9{,}1.10^{-31}kg}} = 1.45.10^{8}\ m.s^{-1}$$

b) La valeur maximale de la fréquence correspond à l'énergie cinétique maximale et à une longueur d'onde minimale (λ_{min}).
Alors : $\mathbf{E_{cmax} = h.\nu_{max}} \Longrightarrow \boldsymbol{\nu}_{max} = E_{cmax}/h = 96.10^{-16}$ J / $6.62.10^{-34}$J.s $=1.45.10^{19}$ Hz
Et λ_{min}= c / $\boldsymbol{\nu}_{max}$ = 3.10^{8} m.s^{-1} /1.45. 10^{19}Hz =20,7pm = $20{,}7.10^{-12}$ m
Ou d'après la loi de Duane et Hunt, on a:

$$\lambda_{min}\ (nm) = 1240/E(ev) = 1240/60\ 10^{3}ev = 0.0207nm = 20.7pm$$

c) Pour déterminer la constante de proportionnalité k, on utilise la relation de rendement :

$$R = k.Z.U \quad \Longrightarrow \quad k = R / Z.U = 0.02 / 74.\ 60.10^{3}v = 4.5.10^{-9}$$

d) On déduire la puissance (p) du rayonnement, en utilisant la relation :

$$P = k.\ I.\ Z.\ U^2 = 4.5.10^{-9}.\ 20.10^{-3}\ A.74.\ (60.\ 10^{3}v)^2 = 24\ w$$

Exercice 2 :

Un tube de Coolidge à anticathode de platine est traversé par un courant d'intensité I=10 mA entre l'anticathode A et la cathode K. Il émet un rayonnement X d'énergie W_R= 20 J pendant la durée Δt = 1,8 s de fonctionnement avec un rendement énergétique ρ= 1,5 %.

1. Exprimer littéralement puis calculer:
   - La puissance rayonnée PR
   - La puissance électrique PE consommée par le tube et la tension UAK entre anode et cathode
   - La puissance perdue par effet joule PJ et l'énergie WJ correspondante pendant la durée de fonctionnement du tube.
   - L'élévation de température de l'anode sachant qu'elle est incorporée à une masse m = 50 g de cuivre qui absorbe presque totalement l'énergie WJ.

   (Capacité thermique massique du cuivre : c = 385 J.kg^{-1}.K^{-1}).
2. Exprimer littéralement et calculer:
   - L'énergie cinétique EC des électrons frappant l'anode et l'énergie maximale E_{max} des photons émis (en KeV et en joule).
   - La longueur d'onde minimale $\lambda 0$ des photons émis et la longueur d'onde la plus fréquente λm (celle des photons les plus nombreux).
   - Si la tension U_{AK} est doublée, que deviendront E_C, E_{max}, λ_0, λ_m?
3. Calculer le nouveau rendement énergétique dans les cas suivants :
   - L'intensité du courant anodique devient I′=15mA (autres réglages inchangés)
   - La haute tension est augmentée de 20%, donc est multipliée par 1,20 (autres réglages inchangés).
   - L'anticathode est remplacée par une anticathode de tungstène74W (autres réglages inchangés).
   - La haute tension est augmentée de 20% et l'anticathode de platine est remplacée par une anticathode de tungstène.

Solution

1- L'expression de la puissance rayonnée est : $\mathbf{P_R = W_R / \Delta t}$
P_R = 20J/1.8s =11w
- On détermine la puissance électrique P_E d'après le rendement de ce tube, on a :
$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{P_R/P_E}$ d'ou $P_E = P_R/\rho$ =11w/0.015= 733w
Ce tube fonctionne par une tension U_{AK} entre cathode et anode :
$\mathbf{P_E = I.\ U_{AK}} \Longmapsto U_{AK} = P_E/I$ = 733w /10.10^{-3}A =73300v = 73.3kv
- La puissance perdue par effet joule ou consommé pour l'échauffement de la cathode est : $\mathbf{P_J} = \mathbf{P_E - P_R}$ = 733 -11= 722w, cette puissance correspondante une énergie W_J pendant la durée de fonctionnement de ce tube, on a :
$\mathbf{P_J = W_J / \Delta t} \Longmapsto W_J = P_J.\ \Delta t$ = 722w.1.8s ≃ 1300J
- On ajoute à l'anode au platine une masse de cuivre (m=50g), ce qui provoque presque l'absorption totale de l'énergie W_J et bien sur l'élévation de la température de cette anode ΔT, on la détermine par :
$\mathbf{W_J = m.\ c.\ \Delta T}$, (m: est la masse de la matière et c: est la capacité thermique massique du cuivre), alors
$\Delta T = W_J / m.c$ = 1300J / 50.10^{-3}kg.385J.kg^{-1}.K^{-1} = 67.5 K

2- L'énergie cinétique E_c des électrons frappant l'anode et l'énergie maximale E_{max} des photons émis (en kev et en Joule) :
$\mathbf{E_c = e.\ U_{AK}}$ = e .73.3 kv = 73.3 kev = 1,6.10^{-19} c. 73.3.10^{3}v = 1,17.10^{-14}J.
Lorsque la totalité de l'énergie cinétique de l'électron est convertie en photon (rayonnement de freinage), celui –ci a l'énergie maximale qui corresponde a une longueur d'onde minimale (λ_0) : E_{max}= E_c =73.3 kev = 1.17. 10^{-14}J
- $\mathbf{E_{max} = h.\nu_{max} = h.c/\lambda_0} \Longmapsto \lambda_0 = hc/E_{max}$ = (6,62.10^{-34} J.s .3.10^8 m/s) / 1,17.10^{-14}J =1,7.10^{-11}m = 0.017 nm.
- On détermine la longueur d'onde la plus fréquente λ_m qui corresponde à l'énergie ≠ E_{max} d'après le rendement : $\lambda_m = \rho.\ \lambda_0$ = 1,5. 1,7.10^{-11}m =2,55.10^{-11}m = 0,0255nm
- Si la tension $\mathbf{U_{AK}}$ est doublée et comme E_c et E_{max} sont proportionnelles à $\mathbf{U_{AK}}$, donc seront doublées.
λ_m et λ_0 sont inversement proportionnelles à la fréquence et à l'énergie ($E = h\boldsymbol{\nu}$), donc elles seront divisées par 2

3- On détermine le nouveau rendement de chaque réglage
- <u>cas 1</u>: l'intensité du courant anodique devient I′=15 mA (autres réglages inchangés).
On a: $\boldsymbol{\rho = K.\ Z.\ U}$, le rendement ne dépend pas de l'intensité du courant anodique donc est inchangé (ρ = 1.5%)
- **<u>cas 2</u>:** la haute tension est augmentée de 20%, donc $\mathbf{U' = 1,2.U}$

Comme le rendement est proportionnel à la haute tension entre l'anode et la cathode, donc il est multiplié par 1, 2 comme la tension :
D'où : $\rho' = 1,2\ .\ \rho = 1,2.1,5 = 1,8\%$
Ou bien :

$\rho' = K.\ Z.\ U' \cdots 1$
$\rho = K.\ Z.\ U \cdots 2$ je prends $\frac{1}{2} \Longmapsto \frac{\rho'}{\rho} = \frac{K.Z.U'}{K.Z.U} \Longmapsto \rho' = \rho.\frac{U'}{U} = \rho.\frac{1,2.U}{U} = \rho.1,2 =$ 1,5.1, 2 = <u>1,8%</u>

<u>Remarque:</u> U′ = U + 0,20.U = (1+0,20)U = 1,2.U
- <u>cas 3 :</u> l'anticathode de platine est remplacée par une autre de tungstène $_{74}W$ (autres réglages inchangés).

Le rendement est proportionnel au nombre atomique Z des atomes de la cible donc de la même manière, on trouve :

$\rho' = K.\ Z'.\ U \cdots\ 1$

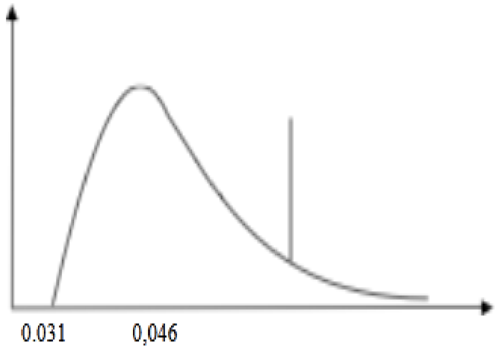
$\rho = K.\ Z.\ U\ \cdots\ 2$ je prends $\frac{1}{2} \mapsto \frac{\rho'}{\rho} = \frac{K.Z'.U}{K.Z.U} \mapsto \rho' = \rho.\frac{Z'}{Z} = \rho.\frac{74}{78} = \underline{1,4\%}$

<u>cas4</u> : La haute tension est augmentée de 20% et l'anticathode de platine est remplacée du tungstène, il vient que :

$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{K.Z'.U'}{K.Z.U} \mapsto \rho' = \rho.\frac{Z'.U'}{Z.U} = \rho.\frac{74.1,2.U}{78.U} = \underline{1,7\%}$

Exercice 3

Des électrons accélérés sous une différence de potentiel U = 40 kV bombardent une cible en cuivre en créant une émission de rayons X. Le spectre correspondant à cette émission (voir figure ci-dessous) représente l'intensité I du faisceau de rayons X émis en fonction de la longueur d'onde λ, exprimée en nm. On donne les énergies d'ionisation des niveaux K et L (niveau moyen entre les niveaux L_{II} et L_{III}) du cuivre : Ei_K= 8995 eV et Ei_L= 955 eV



1. Quelle est la longueur d'onde minimaleλ_0, en nm, du spectre continu émis par la cible ?
2. À partir des valeurs numériques indiquées sur le spectre, déterminer la perte d'énergie cinétique la plus probable, en keV, des électrons arrivant sur la cible.
3. Quelle condition doit vérifier l'énergie cinétique des électrons qui bombardent la cible pour observer une raie K ?
4. Calculer, en nm, la longueur d'onde de la raie Kα.

Solution

1- La longueur d'onde minimale λ_0 en nm, λ_0 = h.c / e.U = $6,62.10^{-34}$ J.s .3.10^8 m.s^{-1}/ $1,6.10^{-19}$ c. 40. 10^3v = $3,1.10^{-11}$m = 0.031nm, est la même valeur du spectre sur le graphe

2- La perte d'énergie cinétique ΔE la plus probable c-à-d l'énergie minimale correspondante la longueur d'onde maximale λ_{max} de valeurs 0.046 nm indiquées sur le spectre. Utilisant la loi de Duane et Hunt, on trouve ΔE = 1240 / λ_{max} = 1240 /0,046nm = 27.10^3 ev =27 kev

3- Pour que les électrons bombardant la cible atteindre d'arracher les électrons de cette dernière pour observer la raie K, il faut que l'énergie cinétique des électrons soit supérieur de l'énergie E_{IK}, on écrit $E_c = e.U \geq E_{IK}$ = 8995ev

4- Pendant le déplacement des électrons de la couche L vers la couche K, il y a production de rayon électromagnétique d'une longueur d'onde λ_K, d'où :

$E_{IK} - E_{IL} = 1240 / \lambda_{K\alpha} \mapsto \lambda_{K\alpha} = 1240 / E_{IK} - E_{IL}$ = 1240 /8995ev-955ev = 0.154 nm