

Chapitre 9 : La mécanique des fluides et l'hémodynamique

Public cible :

Ce cours est destiné aux étudiants de la première année Docteur Vétérinaire, il est conseillé à toute personne qui veut avoir une idée sur la mécanique des fluides.

Objectifs de cours :

Dans ce chapitre sont démontrés les équations et les théorèmes relatifs à la dynamique des fluides incompressibles parfaits et réels.

Au terme de ce chapitre l'étudiant doit être capable de :

- Appliquer les lois essentielles régissant la dynamique des fluides.
 - Relation fondamentale de l'hydrostatique
 - Equation de continuité
 - Théorème de Bernoulli pour les fluides parfaits et réels
 - Equation de Poiseuille
- Calculer la pression, le débit, la vitesse
- Evaluer le nombre de Reynolds.
- Identifier les différents régimes d'écoulement.
- Savoir les différentes applications de la mécanique des fluides dans le domaine de la santé (la perfusion, la pression artérielle, le débit cardiaque et résistance vasculaire).

Pré requis :

Connaissance de base en physique.



1. Généralités sur les fluides

1.1. Définitions

- Un **fluide** est un **milieu matériel** parfaitement **déformable**, constitué de molécules mobiles entre elles. Il n'a pas de forme propre (prend celle du récipient). On regroupe sous cette appellation les **liquides**, les **gaz** et les **plasmas**.
- La **mécanique des fluides** est un sous-ensemble de la mécanique des milieux continus. C'est le domaine de la physique qui comprend l'étude des **gaz** et des **liquides à l'équilibre** et en **mouvement**.

La mécanique des fluides se compose de deux parties:

- **La statique des fluides**, qui étudie les fluides au **repos**. Elle comprend la statique des liquides, l'**hydrostatique**, et la statique des gaz, l'**aérostatique**.
- **La dynamique des fluides**, qui étudie les fluides en mouvement. On distingue la dynamique des liquides, l'**hydrodynamique**, et la dynamique des gaz, l'**aérodynamique**.

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, l'**hémodynamique** (l'étude de l'écoulement du sang), la météorologie, la climatologie et l'océanographie.

1.2. Propriétés d'un fluide

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques qu'on appelle propriétés des fluides on a :

- La **masse volumique**
$$\rho \left(\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right) = \frac{m(\text{Kg})}{V(\text{m}^3)}$$

Où m est la masse de la substance occupant un volume V .

- Le **pois volumique**
$$\varpi \left(\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right) = \frac{p(\text{N})}{V(\text{m}^3)} = \rho \cdot g$$

Où P est le pois ($P=mg$).

- La **densité**

$$d = \frac{\text{masse volumique de fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_r}$$

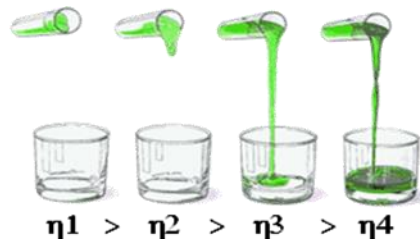
Pour les liquides, le fluide de référence est l'eau. $\rho_{\text{eau}} = 1\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} = 1 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$

- La **viscosité** (η)

C'est une grandeur physique qui caractérise les frottements internes du fluide, autrement dit sa capacité à s'écouler. Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est

soumis à l'application d'une force. C'est à dire, les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement.

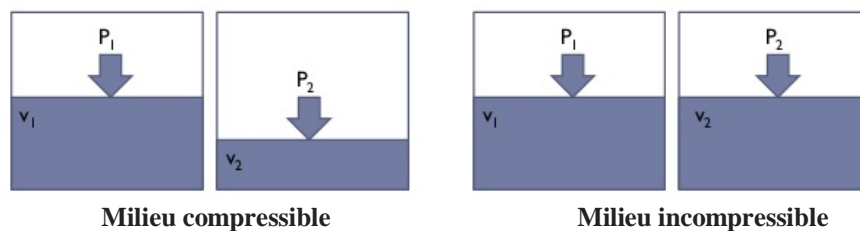
- Si $\eta \approx 0$, le fluide est dit **parfait ou idéal**, il s'écoule sans frottement.
- Si $\eta \neq 0$, le fluide est dit **réel**, il s'écoule avec frottement.



- **La compressibilité (χ)**

Est la propriété d'un corps quantifiant sa variation relative de volume sous l'effet d'une pression appliquée. Le coefficient de compressibilité χ d'un gaz est très supérieur à celui d'un liquide, donc :

- les milieux gazeux sont considérés comme des milieux **compressibles**.
- les milieux liquides sont considérés comme des milieux **incompressibles**.



2. Statique des fluides idéals incompressibles (Hydrostatique)

Dans cette partie, on étudie l'hydrostatique (la statique des fluides incompressibles) qui s'occupe des conditions d'équilibre des fluides au repos et l'interaction des fluides avec les surfaces et les corps solides immergés, on notera que les forces de frottement qui sont dues essentiellement à la viscosité ne se manifestent pas (pas d'écoulement) et l'étude reste valable pour les fluides réels.

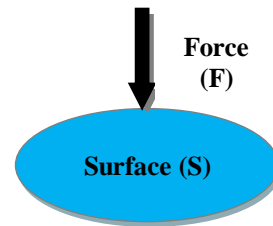
2.1 Pression d'un fluide

La pression est une grandeur physique qui traduit les échanges de la quantité de mouvement dans un système thermodynamique, et notamment au sein d'un solide ou d'un fluide.

Elle est définie classiquement comme :

- l'intensité de la force F qu'exerce un fluide par unité de surface S .
- L'énergie E contenue dans une unité de volume V d'un fluide (l'énergie des molécules du fluide).

$$p = \frac{F}{S} = \frac{E}{V};$$



La force F(Newton) est perpendiculaire à la surface S(m²).

- **Unité de pression** est le Pascal (Pa), dont il existe plusieurs équivalents :

$$1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2 = 1\text{J/m}^3$$

$$1\text{bar} = 10^5\text{Pa}$$

$$1\text{atm} = 1.013\text{ bar} = 101325\text{ Pa (atm : atmosphère)}$$

$$1\text{atm} = 760\text{ mm Hg (mm Hg : millimètre de mercure).}$$

$$1\text{mm Hg} = 133\text{ Pa}$$

- **Types de pressions**

Ces pressions font référence à des mesures obtenues avec différents appareils. Certains mesurent une pression seule : pression absolue ou pression atmosphérique, d'autres mesurent une différence de pression entre deux points quelconque, ou entre un point et l'atmosphère.

- **La pression absolue** (p_{abs}) : se mesure en référence au vide absolu dont la pression est nulle. Elle est toujours positive.
 - **La différence de pression ou pression différentielle** (p_{dif}), $\Delta p = p_2 - p_1$ se mesure entre deux points. En général $p_{\text{dif}} = p_{\text{abs}} - p_{\text{ref}}$ où p_{ref} est une pression de référence.
 - **La pression atmosphérique ambiante** (p_{amb} ou p_{atm}) : est mesurée avec un baromètre par rapport au vide absolu.
 - **La pression effective** p_{eff} ou **pression relative** p_{rel} est la pression différentielle mesurée en référence à la pression ambiante. On a donc : $p_{\text{eff}} = p_{\text{abs}} - p_{\text{atm}}$. Cette pression peut prendre une valeur positive ou une valeur négative. La pression négative est désignée par "pression vacuum
 - **Pression à l'air libre** : Dans les problèmes, on rencontre souvent un réservoir, ou un point à l'air libre. Ça signifie que sa pression est égale à la pression atmosphérique définie pour le problème.
- **Mesure des pressions** : L'appareil de mesure de la pression atmosphérique est le **baromètre**, pour les pressions relatives positives on utilise le **manomètre** à aiguille basé sur le système Bourdon ou plus récemment des **manomètres électroniques**, pour mesurer les pressions négatives (dépression) on utilise un **vacuomètre** (échelle de -1,033 bars à 0 bars).



Baromètre



Manomètre



Manomètre électronique

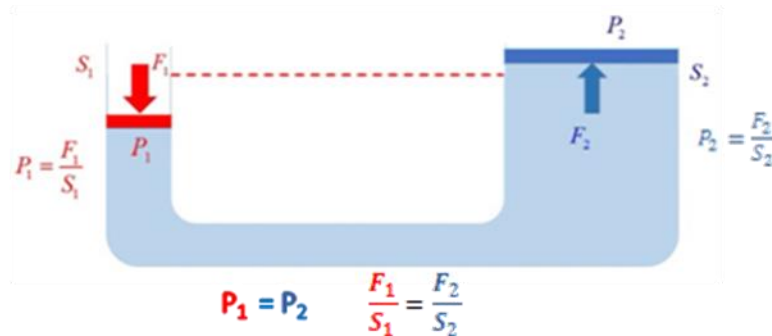


Vacuomètre

2.2 Théorème de Pascal : Transmission des pressions

Un liquide statique incompressible transmet intégralement et dans toutes les directions les variations de pression qu'on lui fait subir. Ceci est lié à la compressibilité qui implique une masse volumique constante.

Exemple : Une presse hydraulique



Principe de Pascal

On exerce une force F_1 sur le piston de surface S_1 , la pression p_1 transmise au liquide est:

$$p_1 = \frac{F_1}{S_1}$$

Selon le principe de Pascal, le fluide transmet intégralement en tout point les variations de pression donc la pression p_1 est intégralement transmise au piston de surface S_2 . En effet :

$$p_1 = p_2$$

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

Et la force qui s'exerce sur la surface S_2 est :

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$$

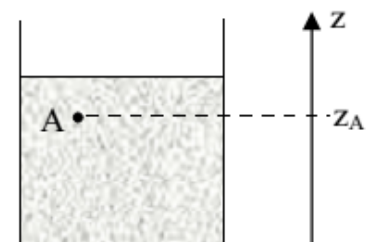
Conclusion : Si la surface S_2 est beaucoup plus grande que la surface S_1 , il sera possible de soulever des charges importantes, en appliquant une force F_1 de faible valeur.

2.3 Relation Fondamentale de l'Hydrostatique (RFH)

• **Pression hydrostatique** est due à la force qu'exerce le liquide par unité de surface. Elle correspond au poids ($\vec{F} = \vec{P}$) de la colonne de liquide qui s'applique en un point A. Elle est définie en un point A d'un fluide par l'expression suivante :

$$p_A = \frac{|\vec{F}_N|}{S}$$

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, avec l'axe des z orienté vers le haut
Cette relation s'écrit :



$$p_A = - \rho \cdot g \cdot z_A$$

Le poids : $F_N = - mg$,
La masse : $m = \rho \cdot V = \rho \cdot (S \cdot z)$.

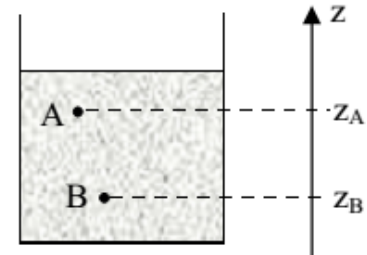
On conclure que : la pression augmente linéairement en fonction de la profondeur.

- **La différence de pression dans un fluide :** pour déterminer la différence de pression entre le point A et le point B, on applique la relation précédente :

$$p_A = - \rho \cdot g \cdot z_A$$

$$p_B = - \rho \cdot g \cdot z_B$$

$$p_B - p_A = - \rho \cdot g \cdot (z_B - z_A)$$



C'est la relation fondamentale de l'hydrostatique.

On pose $h = -(z_B - z_A)$; $p_B - p_A = \rho \cdot g \cdot h$

Conséquence : D'après la relation fondamentale de l'hydrostatique :

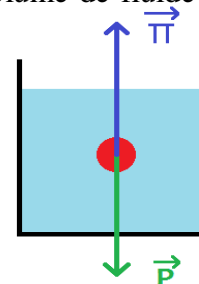
- * Dans un fluide statique incompressible, en tout point d'un même plan horizontal, **la pression est identique** ($z_A = z_B$, $p_A = p_B$). (Les plans horizontaux sont des isobares).
- * **la différence de pression** entre deux points situés à des altitudes différentes est **proportionnelle à cette différence d'altitude**.

2.4 Théorème d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide statique (au repos), subit de la part de ce fluide une force verticale dirigée du bas vers le haut c'est la **poussée d'Archimède**. Cette poussée (A ou Π) appliquée au centre de masse de ce volume est égale au poids du volume de fluide déplacé, (ce volume est donc égal au volume immergé du corps).

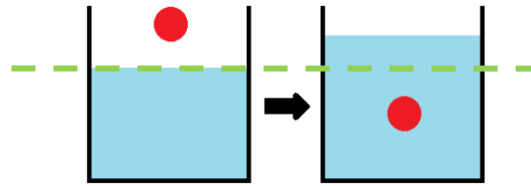
$$\Pi = \rho_{\text{fluide}} \cdot V_{\text{liquide déplacé}} \cdot g$$

$$\Pi = \rho_{\text{fluide}} \cdot V_{\text{immergé}} \cdot g$$



Pour expliquer le principe de la poussée d'Archimède nous allons ... très simple.

Si tu prends un ballon et que tu le plonges dans l'eau en gardant tes mains sur le ballon, tu ressens une force qui essaye de faire remonter le ballon à la surface : cette force est **la poussée d'Archimède Π** .



Prenons un récipient rempli d'eau et mettons une balle dedans : le niveau de l'eau va augmenter. En fait, la balle a un certain volume, noté V_{objet} . La balle occupe donc ce volume dans l'eau, noté $V_{\text{immergé}}$ ($V_{\text{objet}} = V_{\text{immergé}}$). Il y a donc un volume d'eau qui a été **déplacé**, $V_{\text{Fluide déplacé}}$, et qui correspond à la hauteur d'eau supplémentaire.

Cette eau a un volume qui correspond au volume de la balle immergée, puisqu'il s'agit de l'eau qui était auparavant à l'endroit où se situe la balle :

$$V_{\text{Fluide déplacé}} = V_{\text{immergé}}$$

Ce fluide déplacé a une certaine masse, et donc un poids \vec{P} :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= m_{\text{liquide déplacé}} \cdot \vec{g} \\ \vec{P} &= \rho_{\text{fluide}} \cdot V_{\text{liquide déplacé}} \cdot \vec{g} \\ \vec{P} &= \rho_{\text{fluide}} \cdot V_{\text{immergé}} \cdot \vec{g}\end{aligned}$$

La poussée d'Archimède correspond à l'opposé du poids du fluide déplacé.

$$\vec{\Pi} = - \rho_{\text{fluide}} \cdot V_{\text{immergé}} \cdot \vec{g}$$

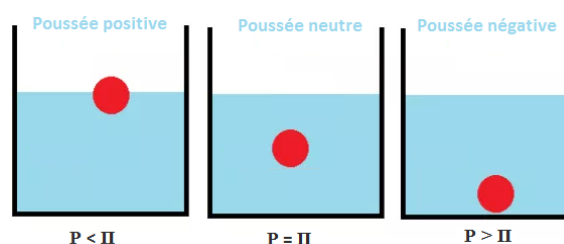
Au niveau du vecteur, l'expression générale fait intervenir le vecteur g qui est vertical vers le bas. Avec le signe $-$, on a donc un vecteur de la poussée d'Archimède verticale vers le haut.

Alors la poussée d'Archimède s'oppose au poids de l'objet. Mais qui est plus important, la poussée ou le poids ?

$$\begin{aligned}P_{\text{objet}} &= \rho_{\text{objet}} \cdot V_{\text{objet}} \cdot g \\ \Pi &= \rho_{\text{fluide}} \cdot V_{\text{immergé}} \cdot g\end{aligned}$$

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{\rho_{\text{objet}}}{\rho_{\text{fluide}}}$$

Si la masse volumique de l'objet est supérieure à celle du fluide, $P > \Pi$: **l'objet va couler**.
Si au contraire la **l'objet va flotter**.



Conclusion :

La statique des fluides est basée principalement sur les résultats suivants:

- * La différence de pression entre deux points est proportionnelle à leur différence de profondeur. C'est la **relation fondamentale de l'hydrostatique**.
- * Toute variation de pression en un point engendre la même variation de pression en tout autre point d'après le **théorème de Pascal**.
- * Tout corps plongé dans un fluide subit une force verticale, orientée vers le haut c'est la **poussée d'Archimède** et dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide

Exemple 1:

Soit un tube en U fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles.

Calculer la pression P_3 du gaz emprisonné dans la branche fermée. On donne :

$\rho_{Hg}=13600 \text{ Kg/m}^3$ et $\rho_{essence}=700 \text{ Kg/m}^3$, $P_{atm}=10^5 \text{ Pa}$.

Solution :

Appliquons la loi fondamentale de l'hydrostatique

(EFH) entre 1 et 2, puis 2 et 3 :

$$P_2 = P_1 + \rho_{ess}g (0,728) \quad (1)$$

$$P_2 = P_3 + \rho_{Hg}g (0,015) \quad (2)$$

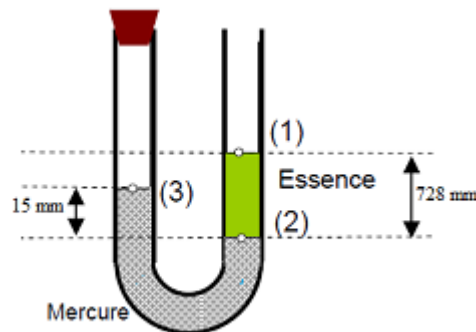
Alors :

$$P_3 = P_2 - \rho_{Hg}g (0,015)$$

$$P_3 = P_1 + \rho_{ess}g (0,728) - \rho_{Hg}g (0,015)$$

$$P_3 = 10^5 + 700 \cdot 9,81 \cdot 0,728 - 13600 \cdot 9,81 \cdot 0,015$$

$$P_3 = 1,310^5 \text{ Pa}$$

**Exemple 2 :**

Une sphère de rayon $R=10 \text{ cm}$ flotte à moitié (fraction du volume immergé $F_1=50 \%$) à la surface de l'eau de mer (masse volumique $\rho_{mer}=1025 \text{ kg/m}^3$).

1. Déterminer son poids P .
2. Quelle sera la fraction du volume immergé F_2 si cette sphère flottait à la surface de l'huile (masse volumique $\rho_{huile}=800 \text{ kg/m}^3$) ?

Solution :

$$1) \text{ Equation d'équilibre : } P_{oids} = P_{ARCH} = F_1 \cdot V \cdot \rho_{mer} \cdot g = F_1 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 \cdot \rho_{mer} \cdot g$$

$$\text{A.N. } P_{oids} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 0,1^3 \cdot 1025 \cdot 9,81 = 21 \text{ N}$$

$$2) P_{oids} = P_{ARCH} \Leftrightarrow F_2 \cdot V \cdot \rho_{huile} \cdot g = P_{oids}$$

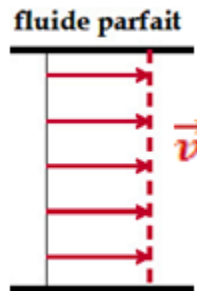
$$\text{Équivaut à } F_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho_{mer}}{\rho_{huile}} \quad \text{AN. } F_2 = \frac{1}{2} \frac{1025}{800} = 64\%$$

3. Dynamique des fluides idéals incompressibles (hydrodynamique)

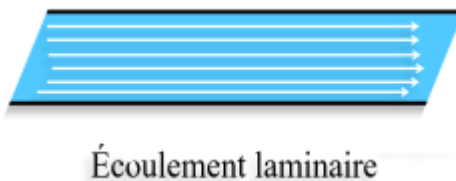
Dans cette partie, nous allons étudier les fluides en mouvement. Un fluide idéal ou parfait s'écoule sans *aucune interaction* : toutes les molécules se déplacent à la même vitesse.

3.1 Définitions

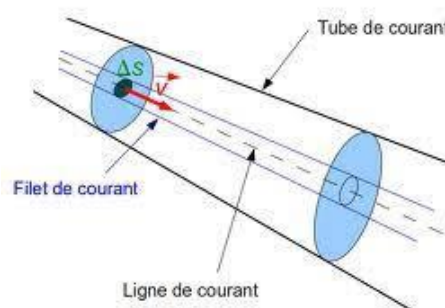
- **Écoulement permanent** : l'écoulement d'un fluide parfait et incompressible est dit permanent ou stationnaire, si les grandeurs (pression, température, vitesse,...) qui le caractérisent vont rester constantes sur toute la section au cours du temps.



- **Écoulement laminaire** : écoulement rectiligne, le fluide s'écoule en filets parallèles à l'axe de la conduite, sans mélange.



- **Ligne de courant** : En régime stationnaire, on appelle ligne de courant la courbe suivant laquelle se déplace un élément de fluide.
- **Tube de courant** : Ensemble de lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée.
- **Filet de courant** : Tube de courant s'appuyant sur un petit élément de surface ΔS .



- **Débit (Q)**: c'est la quantité de fluide qui traverse une section S par unité de temps.

- Débit massique :

$$Q_m [Kg/s] = \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

- Débit volumique : $Q_V [m^3/s] = \frac{\Delta V}{\Delta t}$

Le débit volumique peut également être exprimé en fonction de la **section S** et de la **vitesse v** (car $V = S.L$ et $L/\Delta t = v$)

$$Q_V \left[\frac{m^3}{s} \right] = \frac{\Delta V}{\Delta t} = S \cdot v$$

Attention : à ne pas confondre V (le Volume) et v (la vitesse) !!

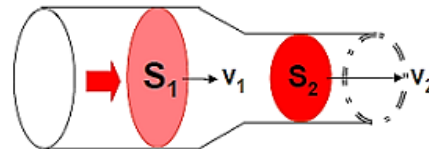
Comme $m = \rho \cdot V$, les débits massique et volumique sont reliés par la relation :

$$Q_m = \rho \cdot Q_V = \rho \cdot S \cdot v$$

3.2 Equation de continuité (conservation de masse)

Pour un fluide incompressible (ρ constante) qui circule en régime stationnaire (à vitesse constante), tout le fluide qui entre dans le tube par la section d'entrée S_1 en sort par la section de sortie S_2 , donc le débit sera conservé (constant) le long d'un tube de courant.

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 = Q_2 \\ Q &= S_1 v_1 = S_2 v_2 \end{aligned}$$



On conclure que : Lorsque la section S augmente, la vitesse v diminue

3.3 Equation de Bernoulli (conservation d'énergie)

Pour un fluide parfait et incompressible, l'écoulement est permanent. **L'absence de frottement** dû à une **viscosité négligée** (fluide parfait) conduit logiquement au fait qu'il **n'y a pas de dissipation d'énergie** au cours de l'écoulement.

L'équation de Bernoulli traduit le principe de conservation de l'énergie mécanique E_T lors de l'écoulement d'un fluide parfait. Cette énergie mécanique **responsable de l'écoulement** aussi appelée la **charge** est la somme de trois énergies, l'énergie cinétique (E_C), de l'énergie potentielle de pesanteur (E_{pz}) et l'énergie potentielle de pression (E_{pp}).

$$E_C + E_{pz} + E_{pp} = E_T$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g Z + V p = Cte$$

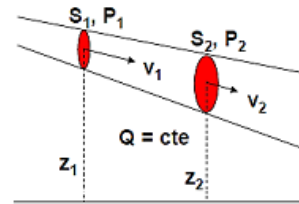
L'équation de Bernoulli en fonction de la pression est :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g Z + p = Cte$$

← Pression cinétique
 ↓ Pression de pesanteur
 → Pression statique.

Entre deux instant t_1 et t_2 ; $E_{T1} = E_{T2}$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g Z_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g Z_2 + p_2$$



- L'équation de Bernoulli prédit qu'une augmentation de la vitesse en un point d'une ligne de courant s'accompagne d'une diminution de la pression en ce même point.

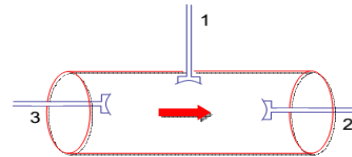
- **Dans le cas particulier où $v = 0$:**

On retrouve la relation fondamentale de l'hydrostatique : $\rho g Z + p = Cte$

- **Dans le cas particulier d'un fluide en écoulement horizontal:**

Les valeurs mesurées dépendent de l'orientation du capteur par rapport à l'écoulement:

- (1) : Pression latérale = P
- (2) : Pression terminale $P + 1/2\rho v^2 = Cte$
- (3) : Pression d'aval $P - 1/2\rho v^2 = Cte$



- **Cas particulier écoulement horizontal: effet de la section**

Robinet fermé	Robinet ouvert
$V = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho v^2 = 0$; $z = cte$ \Rightarrow Donc la pression est constante	$v \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho v^2 \nearrow$; $z = cste$ \Rightarrow Donc la pression diminue

Conclusion

Dans un fluide en mouvement, la pression ne dépend pas seulement de l'altitude du point considéré mais également de la vitesse de l'écoulement en ce point.

Pour appliquer l'équation de Bernoulli, il faut:

- fluide **incompressible** (masse volumique ρ constante)
- fluide **parfait** (non visqueux, sans frottement)
- écoulement **laminaire** (mouvement de translation, sans turbulence)
- écoulement **permanent** (vitesse constante en chaque point)

3.4 Applications de l'équation de Bernoulli

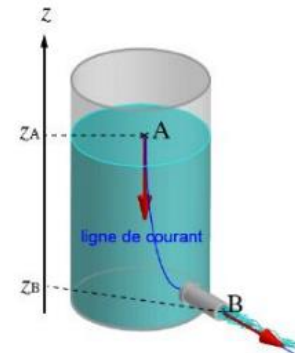
a) Formule de Torricelli

Considérons un récipient ouvert de section S_A , contenant du fluide de masse volumique ρ et muni d'un orifice de section S_B . Le récipient est assez grand, $S_A \gg S_B$ et le liquide s'écoule vers l'extérieur, on peut donc négliger la vitesse en A par rapport à la vitesse en B ($v_A \approx 0$). Appliquons le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant :

$$p_A + \rho g Z_A = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g Z_B$$

Les pressions en A et B sont égales à la pression atmosphérique p_0 car les deux points sont à l'air libre.

$$\begin{aligned} \rho g Z_A &= \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g Z_B \\ \frac{1}{2} \rho v_B^2 &= \rho g (Z_A - Z_B) \\ v_B &= \sqrt{2g(Z_A - Z_B)}; \end{aligned}$$



Cette relation est la formule de Torricelli, plus la hauteur de liquide dans un récipient est haute, plus la vitesse de sortie est grande

b) Effet Venturi

L'effet Venturi repose sur le fait que lors de l'écoulement d'un fluide incompressible, la pression diminue lorsque la section diminue.

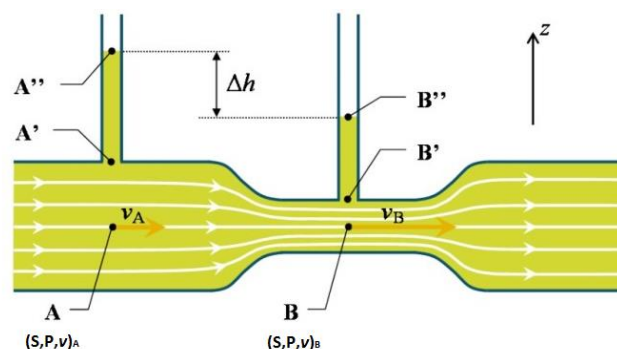
Considérons une canalisation horizontale dans laquelle circule un fluide incompressible. Elle est composée d'une partie large S_A et d'un étranglement S_B .

$$S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B, \quad S_A > S_B \text{ implique une vitesse } v_A < v_B$$

A altitude constante Z le long d'une ligne de courant, on peut écrire :

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{Cte}, \quad v_A < v_B \text{ implique une pression } p_A > p_B$$

La diminution de pression qui accompagne l'augmentation de vitesse est appelée **effet Venturi**.



Appliquons le théorème de Bernoulli à une ligne de courant entre A et B ($Z_A = Z_B$):

$$\begin{aligned}
 p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 &= p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \\
 p_A - p_B &= \frac{1}{2}\rho(v_B^2 - v_A^2) \\
 \Delta p &= p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho v_A^2 \left(\frac{s_A^2}{s_B^2} - 1\right) \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

La pression est uniforme sur une même section, donc $p_A = p_{A'}$ et $p_B = p_{B'}$, où A' et B' appartiennent aux mêmes sections que A et B, et sont situés à l'entrée de deux petits tubes.

Grace à la loi de l'hydrostatique, dans les petits tubes, ($p_{A''} = p_{B''} = p_{atm}$), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 p_{A'} &= p_{A''} + \rho g h_1 \rightarrow p_A = p_{atm} + \rho g h_1 \\
 p_{B'} &= p_{B''} + \rho g h_2 \rightarrow p_B = p_{atm} + \rho g h_2
 \end{aligned}$$

$$\Delta p = p_A - p_B = \rho g \Delta h \dots \dots \dots (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\frac{s_A^2}{s_B^2} - 1\right)}}, \quad v_B = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(1 - \frac{s_B^2}{s_A^2}\right)}}$$

Effet Venturi à charge constante : une sténose est associée à une augmentation de la vitesse d'écoulement et à une diminution de la pression.

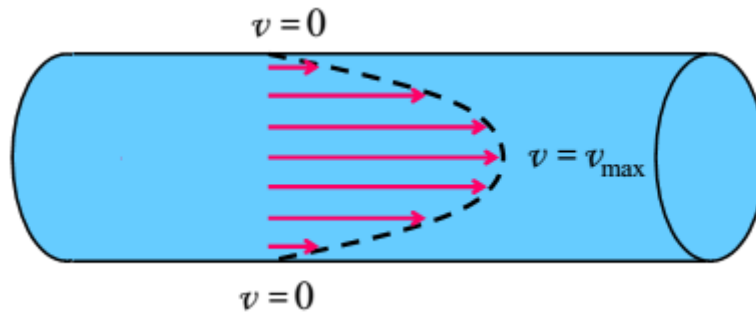
4. Dynamique des fluides réels incompressibles.

Dans la partie précédente nous avons supposé que le fluide était parfait pour appliquer l'équation de conservation de l'énergie. L'écoulement d'un fluide réel est plus complexe que celui d'un fluide idéal. En effet, il existe des forces de frottement, dues à la viscosité du fluide, qui s'exercent entre les particules de fluide et les parois, ainsi qu'entre les particules elles-mêmes. Pour résoudre un problème d'écoulement d'un fluide réel, on fait appel à des résultats expérimentaux, en particulier ceux de l'ingénieur et physicien britannique Osborne Reynolds. Une méthode simplifiée de calcul des pertes de charge basée sur ces résultats expérimentaux est proposée.

4.1. Définitions

Fluide réel: Un fluide est dit réel si, pendant son mouvement, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquelles elles s'exercent (elles possèdent donc des composantes tangentielles -forces de frottements- qui s'opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres). Cette résistance est caractérisée par la viscosité.

Viscosité : Sous l'effet des forces d'interaction entre les molécules de fluide et des forces d'interaction entre les molécules de fluide et celles de la paroi, chaque molécule de fluide ne s'écoule pas à la même vitesse. On dit qu'il existe un **profil de vitesse** (un gradient de vitesse entre les différents plans, de 0 à v_{max}).



Formation d'un profil de vitesse à cause des forces de frottement

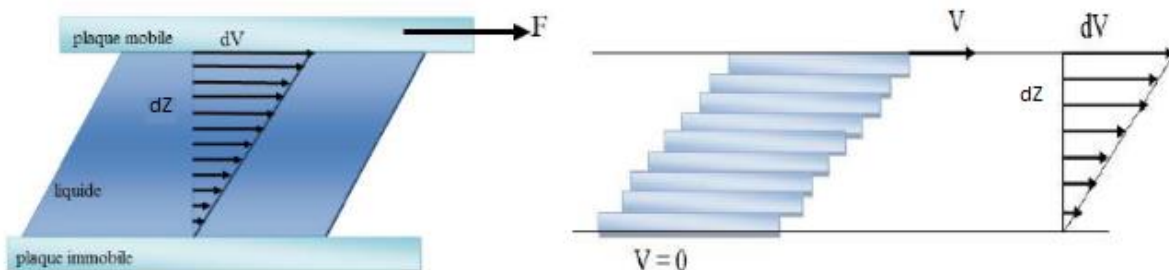
La représentation par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement d'ensemble, la courbe des extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse. Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres. La vitesse de chaque couche est une fonction de la distance z de cette couche au plan fixe ($v = v(z)$).

Pour les fluides réels, la vitesse est quasi nulle sur la paroi et maximale au centre (A cause de frottement de fluide sur les parois et entre les particules)

Viscosité dynamique η

On considère deux couches de fluide adjacentes distantes de Z . La force de frottement \vec{F} qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit Δv , à leur surface S et inversement proportionnelle à Δz .

$$F = \eta S \frac{dv}{dz} \quad (\text{Loi de Newton})$$



Le facteur de proportionnalité η est le coefficient de **viscosité dynamique** du fluide. Elle est mesurée par un viscosimètre.

Unité : l'unité de viscosité dynamique est le Pascal.Seconde (Pa.s) ou **Poiseuille** (Pl).

1 Pa.s = 1 Pl = 1 kg.m⁻¹.s⁻¹, (éventuellement en **Poise** (Po) : 1Po=0.1Pa.s)

Par rapport au fait expérimentaux, on est conduit à considérer deux types de fluides :

- **Fluides newtoniens** : qui ont une viscosité constante à température donnée comme l'eau, l'air, et la pluparts des fluides

- **Fluides non newtoniens** comme le **sang**, les boues, les gels.. Qu'ont d'avoir leur viscosité varie à température donnée.

Pour parer au problème, on définit une **viscosité apparente** = viscosité qu'aurait un fluide newtonien pour le débit et la pression d'un fluide non newtonien.
Viscosité apparente du sang = $4 \cdot 10^{-3}$ Pa.s à 20°C

La **viscosité cinématique** ν est le quotient de la viscosité dynamique par la masse volumique du fluide. Elle représente la capacité de rétention des particules du fluide et quantifie sa capacité à s'épancher (se répandre). La viscosité cinématique s'exprime en m^2/s , on l'exprime parfois en **Stokes** (St) : $1 \text{ m}^2/\text{s} = 10^4 \text{ St}$.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Influence de la température : La viscosité des liquides diminue beaucoup lorsque la température augmente. Il n'existe pas de relation rigoureuse liant η et T, mais nous pouvons écrire :

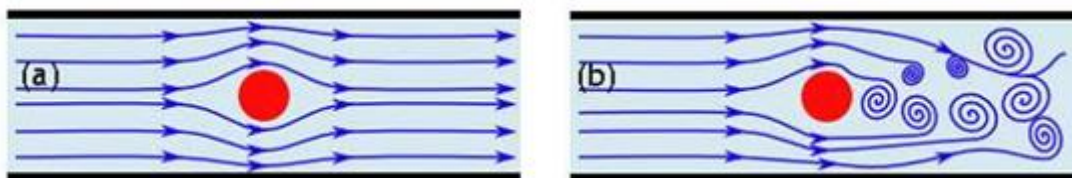
$$\eta = k \cdot T$$

Fluide	η (Pa.s)
eau (0 °C)	$1,787 \times 10^{-3}$
eau (20 °C)	$1,002 \cdot x 10^{-3}$
eau (100 °C)	$0,2818 \cdot x 10^{-3}$

Variation de la viscosité en fonction de la température

4.2. Régimes d'écoulement - nombre de Reynolds

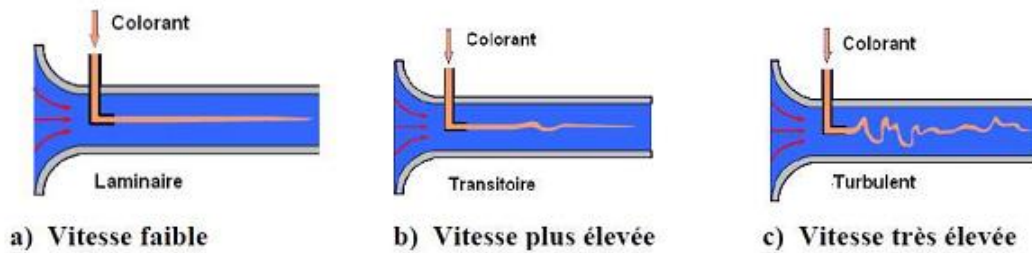
Tous les liquides ne s'écoulent pas de la même manière. Si vous observez l'eau d'un fleuve, vous pouvez voir que son écoulement est en permanence le siège de multiples tourbillons. Au contraire, l'huile qui s'écoule hors d'une bouteille ne tourbillonne pas du tout. Étonnamment, la frontière entre ces deux situations est assez mince, et on peut la percevoir au moyen d'une quantité appelée nombre de Reynolds. Quand l'écoulement d'un liquide est le siège de multiples tourbillons, on dit que cet **écoulement est turbulent**. Au contraire si l'écoulement semble se faire de manière bien parallèle, on parle d'**écoulement laminaire**. Les écoulements turbulents se repèrent particulièrement au voisinage d'obstacles, par exemple les piles d'un pont. Ce qui fait la différence, c'est que dans un écoulement turbulent les petites perturbations donnent naissance à des tourbillons. Au contraire dans un écoulement laminaire les perturbations se résorbent rapidement et l'écoulement reprend son cours tranquille.



(a) régime d'écoulement laminaire, (b) régime turbulent

Comment savoir à l'avance si un écoulement va être le siège de turbulence ? Cela dépend principalement de la viscosité du liquide, car celle-ci agit comme un frottement qui va freiner les perturbations et empêcher les tourbillons d'apparaître

- **Expérience** : Soit un courant d'eau qui circule dans une conduite à section circulaire. On introduit un filet de colorant dans l'axe de cette conduite. Suivant la vitesse d'écoulement de l'eau, on peut observer les phénomènes suivants :



Expérience montrant les 3 régimes d'écoulement

- Régime laminaire** : Si les fluides sont des lignes régulières, sensiblement parallèles entre elles, l'écoulement est dit laminaire.
- Régime transitoire (intermédiaire)** : c'est une transition entre le régime laminaire et le turbulent.
- Régime turbulent** : Les fluides s'enchevêtrent, s'enroulent sur eux-mêmes (formation de mouvement tourbillonnant dans les fluides)

Cette expérience est faite par **Reynolds en 1883** en faisant varier le diamètre de la conduite, la température, le débit, etc..., pour des divers fluides.

La détermination du régime d'écoulement est par le calcul d'un paramètre sans dimension appelé nombre de **Reynolds (Re)** :

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta}$$

ρ : masse volumique du fluide
 v : vitesse moyenne d'écoulement à travers la section considérée.

$$Re = \frac{v D}{\nu}$$

D : diamètre de la conduite
 η : viscosité dynamique du fluide
 ν : viscosité cinématique

L'expérience montre que :

Nombre de Reynolds (Re)	Type de régime
$Re < 2000$	laminaire
$2000 < Re < 3000$	intermédiaire
$Re > 3000$	turbulent

Les différents régimes d'écoulement

Ces valeurs de nombre de **Reynolds** doivent être considérées comme des ordres de grandeur, le passage d'un type d'écoulement à un autre se fait progressivement.



Entre les deux, le régime est **instable** : des conditions extérieures peuvent faire basculer l'écoulement de laminaire à turbulent.

La vitesse au-delà de laquelle l'écoulement laminaire devient instable avec possibilité de devenir turbulent est la **vitesse critique** (v_c).

$$v_c = \frac{2000 \eta}{\rho d}$$

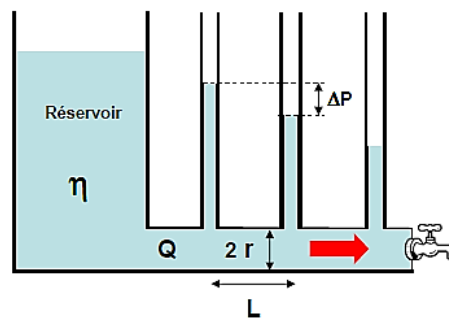
4.3. Théorème de Bernoulli pour les fluides réels : Perte de charge

Lorsque le fluide est réel, la viscosité est non nulle, alors au cours du déplacement du fluide, les différentes couches frottent les unes contre les autres et contre la paroi qui n'est pas parfaitement lisse d'où il y a une perte sous forme de dégagement d'énergie thermique (chaleur) ; cette perte appelée **perte de charge**.

Donc ce cas, **l'équation de Bernoulli généralisé** peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g Z_A + p_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g Z_B + p_B + \Delta p$$

Δp est l'ensemble des pertes de charge entre (1) et (2).



On note deux types de pertes de charges d'énergie mécanique :

- **perte de charge régulière** répartie tout au long d'une conduite.
- **perte de charge singulière** qui apparaissent de manière localisée : dans des coudes, suite à un obstacle, et lors d'un élargissement ou un rétrécissement.

4.4. Écoulement d'un fluide réel : loi de poiseuille

- **Variation de pression en écoulement laminaire :**

Considérons un fluide visqueux dans une conduite horizontale, cylindrique, de petit diamètre, l'écoulement étant laminaire.

Selon l'équation de Bernoulli généralisé :

$$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g Z_A + p_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g Z_B + p_B + \Delta p$$

- Vitesse (v) constante : $Q = Sv = cte \Rightarrow \frac{1}{2} \rho v^2 = Cte$
- Canalisation horizontale : $\rho g Z = Cte$
- Il n'y a que P qui peut varier, donc η produit une perte d'énergie qui se manifeste par la diminution de la pression P (perte de charge).

$$F_{\text{pression}/ox} = F_{px} = (p_A - p_B) \cdot \pi r^2$$

$$F_{\text{pressionfrottement}/ox} = F_{fx} = \eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dr}$$

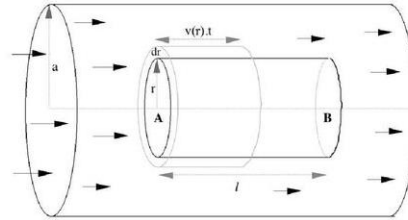
A l'équilibre :

$$F_{px} - F_{fx} = 0$$

$$(p_A - p_B) \cdot \pi r^2 = \eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dr}$$

$$\Delta p \cdot \pi r^2 = \eta \cdot 2\pi r l \cdot \frac{dv}{dr}$$

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} \cdot r^2$$



Le débit volumique

$$Q_v = S \cdot v = \pi r^2 v$$

$$dQ_v = v \cdot dS = v \cdot 2\pi r dr$$

$$dQ_v = \frac{\Delta p \cdot \pi}{2\eta l} \cdot r^3 dr$$

$$Q_v = \frac{\Delta p \cdot \pi}{2\eta l} \cdot \frac{1}{4} r^4$$

$$Q_v = \frac{\Delta p \cdot \pi}{8\eta l} \cdot r^4 \quad \text{Loi de Poiseuille}$$

$$\Delta p = \frac{8\eta l}{\pi r^4} Q_v \quad \text{Perte de charge}$$

Dans un fluide réel le débit est proportionnel à la variation de pression et au rayon r du tube.

La loi de Poiseuille :

- Exprime la variation de débit en fonction des résistances à l'écoulement.
- S'applique quelles que soient les conditions de circulation si le fluide est Newtonien.
- Fait intervenir le rayon du vaisseau à la puissance 4^{ième}.
- N'est utilisable que pour un nombre de Reynolds inférieur à 2000.
- Permet d'expliquer l'évolution des pressions physiologiques moyennes le long de l'arbre vasculaire.

• **Résistance à l'écoulement : la loi d'Ohm**

Il est possible d'établir un parallèle entre l'écoulement d'un fluide dans un tuyau et le passage du courant électrique dans un conducteur :

- la perte de charge Δp joue un rôle comparable à la différence de potentiel,
- le débit Q_v est équivalent à l'intensité électrique

Et il s'agit donc simplement de trouver l'équivalent de la résistance électrique pour pouvoir écrire la loi **d'Ohm**:

$$V = RI$$

Et son équivalent hydraulique. Il suffit pour cela d'écrire la loi de Poiseuille sous une forme légèrement différente :

$$\Delta p = \frac{8\eta l}{\pi r^4} Q_v$$

Expression qui permet de définir la résistance mécanique à l'écoulement :

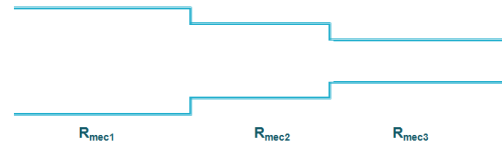
$$R_{mec} = \frac{8\eta l}{\pi r^4}$$

Le rayon de la conduite est le seul facteur influençant la résistance à l'écoulement. Comme c'est le cas pour les résistances électriques, les résistances mécaniques peuvent être placées en série ou en parallèle. Les lois valables pour les résistances électriques s'appliquent:

Conduits en série :

$$R_{mec/total} = \sum_i R_{mec\ i}$$

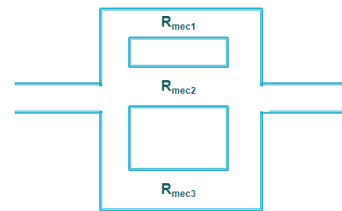
$$R_{mec/total} = R_{mec1} + R_{mec2} + R_{mec3}$$



Conduits en parallèle

$$R_{mec/total} = \sum_i \frac{1}{R_{mec\ i}}$$

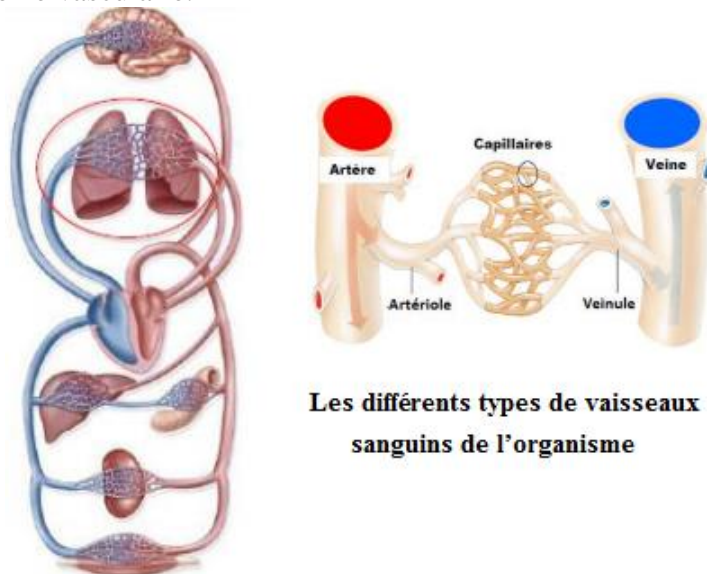
$$\frac{1}{R_{mec/total}} = \frac{1}{R_{mec1}} + \frac{1}{R_{mec2}} + \frac{1}{R_{mec3}}$$



5. Circulation sanguine : hémodynamique

L'**hémodynamique** ou la **dynamique du sang**, est la science des propriétés physiques de la **circulation sanguine** en mouvement dans le **système cardio-vasculaire**. Cette discipline couvre des aspects physiologiques et cliniques avec l'angiologie.

Dans le système circulatoire (système de tuyaux qui a une géométrie particulière) le sang enrichi quitte le cœur via une série d'**artères**. Plus loin, le diamètre de ces artères se rétrécit et les artères sont alors appelées des **artérioles**. Ces artérioles deviennent des **capillaires** et éventuellement des **veinules**, où le sang appauvri retourne vers le cœur grâce à des réseaux de **veines**. La microcirculation, les jonctions artériole-capillaire-veinule composent la partie essentielle du système vasculaire.



Les différents types de vaisseaux sanguins de l'organisme

L'hémodynamique est principalement soumise aux lois de la **mécanique des fluides**. Les mesures de **pression**, de **débit**, **viscosité sanguine** et **vitesse** sont liées de la même manière qu'en mécanique des fluides mais sont comptées différemment. Ainsi le **profil de vitesse** des phases solides (globules rouges) et des phases fluides (plasma) sont différents de la mécanique des fluides, ce qui influe sur le rapport pression/débit dans la **loi de Poiseuille** dans le réseau cardiovasculaire et la **résistance vasculaire**. La viscosité du sang est donc complexe aussi car elle est diphasique contrairement à la **viscosité dynamique** ou la **viscosité cinématique** qui caractérisent la consistance d'un fluide pur, continu et homogène.

- **Le sang** est un liquide biologique vital qui circule continuellement dans les vaisseaux sanguins et le cœur, grâce à la pompe cardiaque. Il est composé d'un fluide aqueux, le plasma, et de milliards de cellules, principalement les globules rouges, qui lui donnent sa couleur. Le sang est un liquide **non newtonien** et peut être en écoulement **laminaire** (physiologiquement) ou en écoulement **turbulent** (si vous mettez un garrot autour de votre bras par exemple ou qu'un caillot bouche l'artère).

5.1. La pression artérielle: Application de la RFH

La **pression artérielle**, ou **pression artérielle systémique**, correspond à la **pression** du sang dans les **artères** de la **circulation systémique** (circulation principale). On parle aussi de **tension artérielle** (ou simplement de **tension** en raccourci) car cette pression est aussi la force exercée par le sang sur la paroi des artères, ce qui les tend dans la paroi de l'artère résulte directement de la pression.

- **Comment la pression artérielle est-elle mesurée ?**

La pression artérielle se mesure au niveau d'une grosse artère. C'est un examen non douloureux et non invasif.

Un petit capteur pour déterminer la pression est placé sur l'artère et un brassard gonflable est installé autour du bras de la personne (chez les animaux, cela se fait au niveau de la queue ou de la patte avant). En dégonflant lentement ce dernier, il est possible d'avoir une évaluation relativement précise de la pression artérielle.



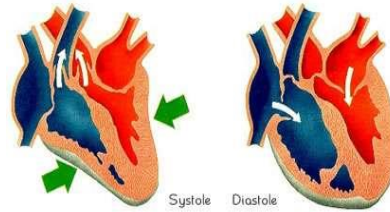
La pression artérielle égale la pression statique si la personne est allongée et si le capteur est perpendiculaire à l'écoulement du sang.

L'unité internationale de mesure de pression est le pascal (Pa). Toutefois, l'usage fait que la pression artérielle est souvent mesurée soit en centimètres de mercure (cm Hg), soit en millimètres de mercure (mm Hg).

Elle est exprimée par deux valeurs :

- **La pression systolique (PAS)** est la pression **maximale**, au moment de la contraction du cœur (**systole**) ; PAS = 135 mm Hg = 18 KPa.

- **La pression diastolique** (PAD) est la pression **minimale**, au moment du relâchement du cœur (**diastole**) ; PAD = 80 mm Hg = 11 KPa



- **La pression artérielle moyenne** : PAM = (PAS + 2PAD)/3 = 96 mm Hg = 13 KPa

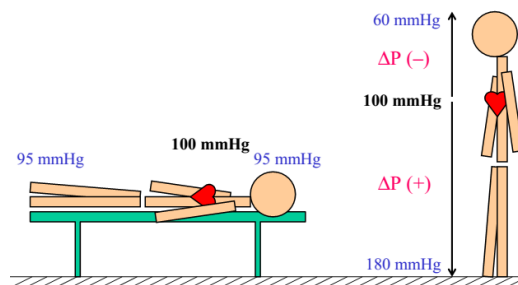
Remarque : Une PAM de 14/8 signifie :

- Une PA maximale de 14 cm Hg
- Une PA minimale de 8 cm Hg

- **Mesure de la pression en fonction de la position**

La valeur de référence de mesure de la pression artérielle est celle au niveau du cœur P(0). On mesure la **distance** (ΔZ) entre le cœur et l'endroit (X) où l'on veut connaître la pression. Application de la relation fondamentale de l'hydrostatique :

$$PA(x) = PA(0) - \rho g \Delta z$$



Remarque :

- Pour une personne allongée : $PA(x) = PA(0)$.
- Pour une personne debout : si la mesure est faite en dessous du cœur, la distance, $\Delta z < 0$, la pression augmente et l'inverse.

5.2. La perfusion



Principe de la perfusion : pour introduire (de façon lente) un liquide dans une artère il faut que la pression du liquide soit supérieure à la pression du sang. Le flacon contenant la solution doit donc être placé à une hauteur (h) suffisante au dessus du patient $\rho gh > p_A$

5.3. Le débit cardiaque

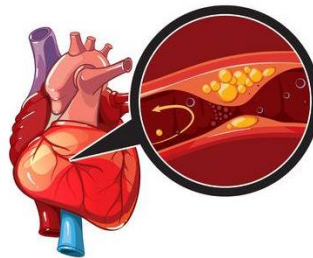
Le **débit cardiaque** correspond au **volume de sang éjecté par le cœur en une minute**. Ce débit dépend du volume de sang éjecté à chaque contraction cardiaque (volume d'éjection systolique) et de la **fréquence cardiaque**.

Le **débit cardiaque** peut être calculé moyennant **l'échocardiographie-Doppler**.

Effet Doppler est un phénomène s'appliquant aux ondes ultrasonores focalisés sur le cœur (voir ch. Son et Ultrason). La variation de fréquence des ondes ultrasonores envoyées et reçues permet de **déterminer la vitesse d'écoulement des hématies**.

$$V = \frac{c \cdot \Delta F}{2F_e \cos(\theta)_r}$$

En connaissant cette vitesse on peut estimer **le diamètre (D) d'un vaisseau** au niveau d'un rétrécissement (en connaissant le diamètre normal).



Le volume d'éjection systolique aortique (volume de sang quittant le cœur à chaque systole) est donné par la formule :

$$V_{ES} = VTI_{A_0} * (\pi D^2/4)$$

Où VTI_{A_0} est l'intégrale temps-vitesse de l'éjection aortique obtenue moyennant le Doppler pulsé au niveau de l'anneau.

Débit cardiaque:

$$Q_c = f_c * V_{ES} \quad ; \quad f_c : \text{Fréquence cardiaque}$$

Ainsi, d'après le principe de continuité des débits :

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$D_1^2 \cdot v_1 = D_2^2 \cdot v_2$$

5.4. La résistance vasculaire

Comme tout liquide visqueux s'écoulant dans un tube, le sang propulsé par le cœur dans le système circulatoire est soumis à une résistance à l'écoulement.

Cette résistance vasculaire est l'un des deux facteurs qui influencent la pression et le débit du courant sanguin, l'autre étant la compliance des vaisseaux sanguins.

Rappelons-nous la loi de Poiseuille :

$$p_A = R_v Q_c$$

P_A : Pression artérielle

Q_c : Débit cardiaque

R_v : Résistances vasculaires périphériques

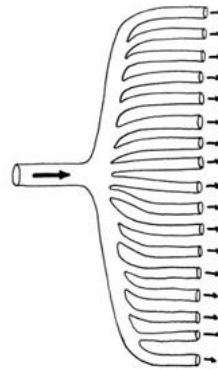
Le siège principal de la résistance vasculaire se trouve dans les artérioles, ces petites artères à paroi très musculaire, et qui peuvent donc faire varier fortement leur diamètre, jouant directement sur la résistance vasculaire. Les grosses artères n'opposent qu'une faible résistance au courant sanguin.

Dans le corps humain, on s'intéresse à la perte de pression de part et d'autre d'un système constitué de milliers de conduits en parallèle (les capillaires par exemple), il faut alors prendre en compte les résistances de chaque conduit (on simplifie généralement en considérant qu'elles sont identiques) pour calculer la résistance totale (R_t).

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Puisque $R_1=R_2=\dots=R_n$

$$\frac{1}{R_t} = \frac{n}{R_1} \rightarrow R_t = \frac{R_1}{n}$$



Pour calculer la chute de pression entre l'entrée et la sortie d'un réseau de n capillaires/conduits en parallèle, la loi de Poiseuille donne :

$$\Delta P = Q \frac{8\eta L}{n\pi r^4}$$

Référence :

Notions de mécanique des fluides, Riadh ben hamouda

<https://docplayer.fr> :

- Viscosité des liquides et des solutions rhéologie
- Biophysique : mécanique des fluides

<http://gpip.cnam.fr/ressources-pedagogiques-ouvertes/hydraulique>.