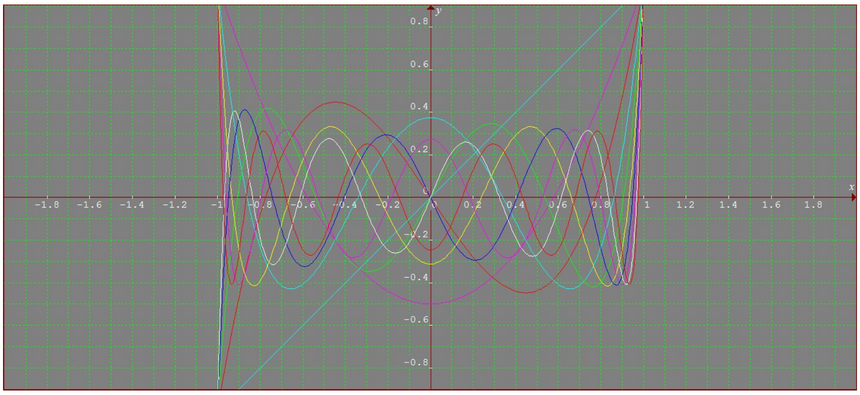
Université Mentouri Constantine 1

Fonctions réelles d'une variable réelle

2.0

Dr LATELI Ahcene



HTTPS://TELUM.UMC.EDU.DZ/COURSE/VIEW.PHP?ID=55

HTTPS://YOUTUBE.COM/@MATHEMATICSANDLIFE2291?FEATURE=SHARED

Octobre 2023

Légende

Entrée du glossaire

Abréviation

Référence Bibliographique

Référence générale

Table des matières

Chapitre II : Limites et Continuité

A. Limite d'une fonction en un point

Conseil

Étudier la limite d'une fonction f en un point x_0 de $\mathbb{R}$, c'est étudier le comportement de $f(x)$ quand x est " **très voisin** " de x_0, c'est-à-dire appartient à un intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ où ε est " **très petit** " mais non nul. Il sera commode d'adopter la terminologie suivante :

Définition

On appelle **voisinage** d'un point x_0 de $\mathbb{R}$ tout **intervalle ouvert**, de la forme $v_{x_0}(\varepsilon) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$

qui peut aussi s'écrire $v_{x_0}(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < \varepsilon\}$.

Notons par $V(x_0)$ l'ensemble des voisinages du point x_0.

Définition

On dit qu'une fonction f définie au voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}$, sauf peut-être au point x_0, **admet une limite** (finie) ℓ en x_0, si :

$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \,/\, \forall x \in D : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

On écrit dans ce cas, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Remarque

1. $|x - x_0| < \eta \Leftrightarrow x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$, c'est-à-dire $x \in V(x_0)$.
2. $|f(x) - \ell| < \epsilon \Leftrightarrow \ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$, c'est-à-dire $f(x) \in V(\ell)$.
3. Si f est définie en x_0 alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple

Considérons la fonction $f\ : x \mapsto 2x - 1$ qui est définie sur $\mathbb{R}$.
Au point $x_0 = 1$, on a $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.
En effet, pour tout $\epsilon > 0$, on a $|f(x) - 1| = 2|x - 1| < \epsilon$ si l'on a,
à fortiori, $|x - 1| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Le bon choix sera alors de prendre $\eta = \dfrac{\epsilon}{2}$.

Complément : Unicité de la limite

Si f admet une limite au point x_0, cette limite est **unique**.

Définition : Limite à gauche et limite à droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle D.

- On dit que f **admet une limite à gauche** ℓ en x_0 si, et seulement si :

$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \,/\, \forall x \in D\ : x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

On note $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

- On dit que f **admet une limite à droite** ℓ en x_0 si, et seulement si :

$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \,/\, \forall x \in D\ : x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

On note $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

Remarque

1. Si $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) = \ell_2$ avec $\ell_1 \neq \ell_2$, alors f n'admet pas de limite en x_0.
2. Si $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Exemple

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
On remarque que $\lim\limits_{x \overset{>}{\longrightarrow} 0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\longrightarrow} 0} f(x) = -\infty$, alors la limite de f quand x tend vers 0 n'existe pas.

Définition : Opérations sur les limites

Soient $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, et x_0 un point d'accumulation de D.
Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$, alors on a:

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$.
2. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$.
3. Si de plus, $\ell_2 \neq 0$ et $g(x) \neq 0$ au $V(x_0)$, $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.
4. $\lim_{x \to x_0} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot \ell_1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
5. $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell_1|$.

1. Théorème d'Encadrement

Soient $f, g, h \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, et x_0 un point d'accumulation de D.
Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$, alors on a :

1. Si $f(x) < h(x) < g(x), \forall\, x \in D$ alors $\ell_1 \leq \lim_{x\to x_0} h(x) \leq \ell_2$.
2. Si $f(x) < g(x)$ sur D et $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
3. Si $h(x) < g(x)$ sur D et $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x\to x_0} h(x) = -\infty$.

2. Formes indéterminées

Dans le calcul des limites, on appelle **Forme Indéterminée** (notée $F.I$), toute situation qui conduit à un cas où les théorèmes portant sur les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure. Les formes indéterminées les plus courantes sont :

$\pm\infty \mp \infty$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \times \pm\infty$, $\dfrac{0}{0}$, 1^{∞}, 0^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}, etc...

3. Cas d'une fonction bornée

Théorème

Si on a $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

et s'il existe un réel M et un voisinage de a tels que $|g(x)| \leq M$

pour tout x appartenant à ce voisinage (autrement dit si g est **bornée** sur un voisinage de a),

alors $\lim_{x\to a} (f \cdot g)(x) = 0$.

Exemple

La fonction $x \mapsto x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers 0 lorsque $x \to 0$

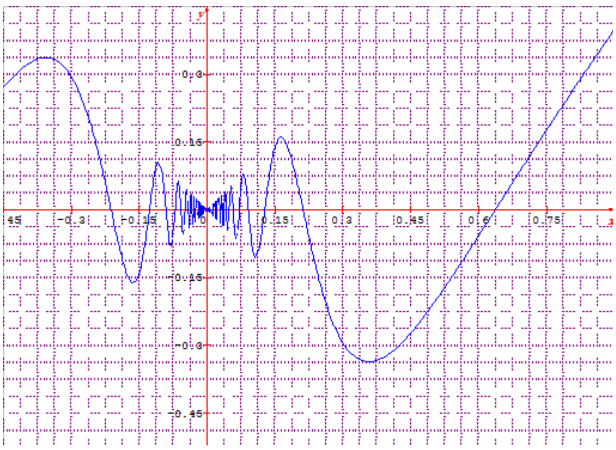


Figure 2.1 : Limite d'une fonction

4. Limite d'une fonction composée

Notations

1. On désigne par $\bar{\mathbb{R}}$ l'intervalle $[-\infty, +\infty]$.
2. On considère une fonction $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ admettant $b \in \bar{\mathbb{R}}$ pour limite en $a \in \bar{\mathbb{R}}$.
3. On considère d'autre part une partie non vide E de $\mathbb{R}$ et une fonction $g \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ admettant $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ pour limite en b (cela suppose que tout voisinage de b rencontre E).

4. On suppose de plus que $f(D) \subseteq E$: la fonction composée $g \circ f$ est alors bien définie sur D. On a alors

Définition : Composition des limites

Avec les notations introduites ci-dessus ;
Supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et que $\lim_{x \to b} g(x) = \ell$. Alors $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$.

B. Exercice

[*Solution n°1 p 21*]

Trouver la limite suivante ou dire si elle n'existe pas.

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + x}}{x^2}$

- ○ 0
- ○ n'existe pas
- ○ -1
- ○ 1

C. Exercice : Choisissez la bonne réponse :

[*Solution n°2 p 21*]

On a $\lim_{x \to 0} \dfrac{-1}{x}$

- ○ est égale à 0.
- ○ est égale à $+\infty$.
- ○ est égale à $-\infty$.
- ○ n'existe pas.

D. Exercice

[*Solution n°3 p 22*]

La limite $\lim_{x \to 0^+} x^x$

☐	est une forme indéterminée du type 0^0.
☐	est égale à 0.
☐	n'existe pas.
☐	est égale à 1

E. Continuité d'une fonction

Définition

Soit $x_0 \in D$. On dit que la fonction $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ est **continue au point** x_0 si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$, quand x tend vers x_0 pour tout $x \in D$, ce qui s'écrit $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si f est **continue en tout point** x_0 **de** D, nous dirons que f **est continue sur** D.

Remarque

1. Intuitivement, une fonction f, définie sur un intervalle $[a, b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$, est continue sur $[a, b]$ si l'**on peut tracer son graphe** (sa courbe représentative) **sans lever le crayon**.
2. La fonction f est continue en x_0 si, et seulement si :

$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$.

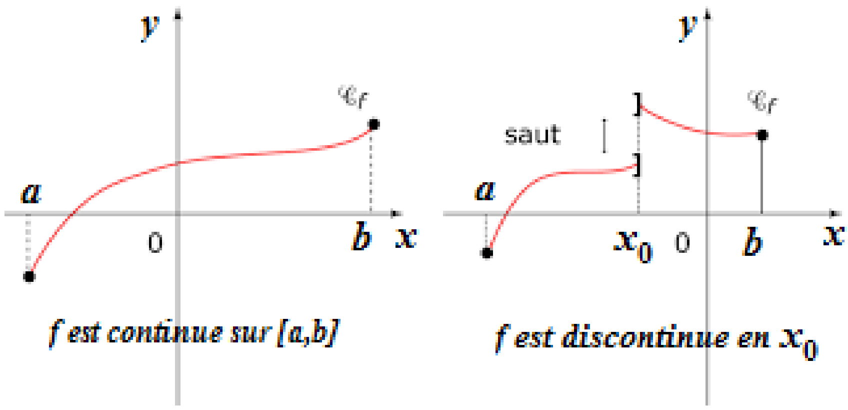


Figure 2.2: La continuité

1. La continuité à droite et à gauche

Définition

1. On dit que f est **continue à droite** en x_0 si et seulement si : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
2. On dit que f est **continue à gauche** en x_0 si et seulement si : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Remarque

1. On remarque que f est **continue** en x_0 si et seulement si f est **continue à droite** et **à gauche** en x_0.
2. On dit que f est **continue sur un intervalle** $I \subseteq D$ si et seulement si f est **continue en tout point de** I.

2. Opérations sur les fonctions continues

Proposition

soient $x_0 \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.

1. Si f est continue en x_0 (resp. sur D), alors $|f|$ est continue en x_0 (resp. sur D).
2. Si f et g sont continues en x_0 (resp. sur D), alors $f + g$ est continue en x_0 (resp. sur D).
3. Si f est continue en x_0 (resp. sur D), alors λf est continue en x_0 (resp. sur D).
4. Si f et g sont continues en x_0 (resp. sur D), alors $f \cdot g$ est continue en x_0 (resp. sur D).
5. Si g est continue en x_0 (resp. sur D) et $g(x_0) \neq 0$ (resp. $g(x) \neq 0$), alors $\frac{1}{g}$ est définie dans un voisinage de x_0 et est continue en x_0 (resp. sur D).
6. Si f et g sont continues en x_0 (resp. sur D) et $g(x_0) \neq 0$ (resp. $g(x) \neq 0$), alors $\frac{f}{g}$ est définie dans un voisinage de x_0 et est continue en x_0 (resp. sur D).

Exemple

1. La fonction $x \mapsto x^n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Les **fonctions polynômes** sont continues sur tout $\mathbb{R}$.
3. Les fonctions trigonométriques **sinus** et **cosinus** sont continues sur $\mathbb{R}$.

3. Continuité d'une fonction composée

Soient $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(F, \mathbb{R})$. On suppose que $f(E) \subset F$ (de sorte que $g \circ f$ est définie sur E). Soit $x_0 \in E$.

Si f est continue en x_0 (resp. sur E) et g est continue en $f(x_0)$ (resp. sur F). Alors, $g \circ f$ est continue en x_0 (resp. sur E).

4. Prolongement par continuité

Soient $D \subseteq R, f : D \to R$ et x_0 un réel. Nous supposons que la fonction f n'est pas définie en x_0 mais admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0. Nous posons alors $\tilde{f}$ la fonction définie sur $D \cup \{x_0\}$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \ \ si \, x \in D \\ \\ \ell \ \ si \ \ x = x_0 \end{cases}.$$

La fonction $\tilde{f}$ est continue en x_0 et s'appelle le **prolongement par continuité** de f en x_0.

Exemple

La fonction $f\ : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ alors f admet un prolongement par continuité $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & si\ x \in \mathbb{R}^* \\ 1 \quad si\ x = 0 \end{cases}.$$

Et dont la courbe représentative est :

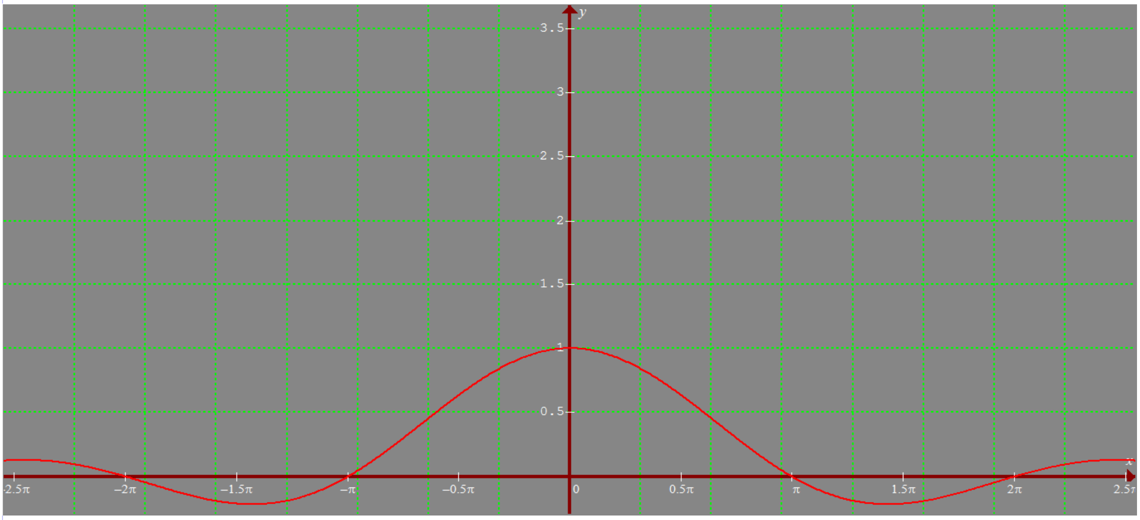


Figure 2.3: Courbe représentative du prolongement par continuité de f

5. Théorèmes sur les fonctions continues

a) Théorème des valeurs intermédiaires

Définition : Théorème 1

Soiten $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, et f une fonction **continue** de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$.
Alors, la fonction f **prend toutes les valeurs comprises entre** $f(a)$ et $f(b)$, c'est-à-dire que pour tout λ appartenant à l'intervalle dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = \lambda$.
(Autrement dit : l'équation $f(x) = \lambda$ **admet au moins une solution dans** $[a, b]$) **(Voir Figure 2.4)**.

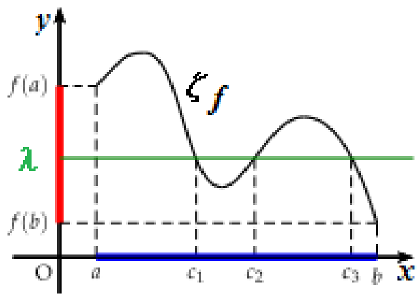


Figure 2.4 : Théorèmes des valeurs intermédiaires

Définition : Théorème 2 (Cas des fonctions strictement monotones)

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I et $a, b \in I$ avec $a < b$.

Pour tout réel λ **compris** entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique réel** x_0 de $[a;b]$ tel que $f(x_0) = \lambda$.

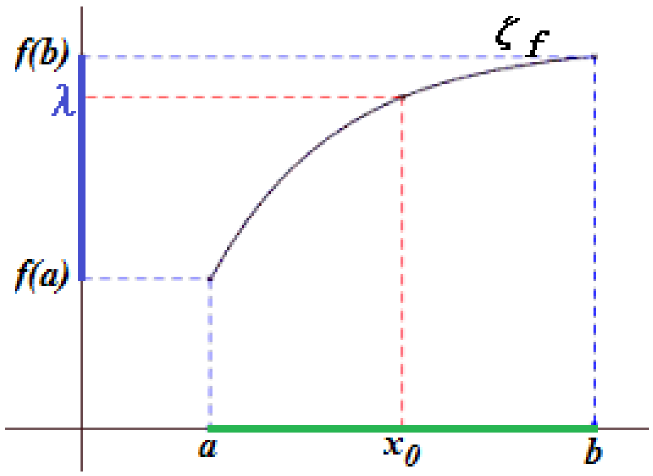


Figure 2.5: Cas d'une fonction strictement monotone

b) Théorème 3 (Théorème de Bolzano)

Si la fonction f est **continue sur l'intervalle** $[a,b]$ et si $f(a)\cdot f(b)<0$, **il existe** alors **au moins** un point $x_0\in]a,b[$ tel que $f(x_0)=0$.

Ce théorème permet donc d'obtenir l'existence de solutions d'équation de type $f(x)=0$.

Image 1 Bernhard Bolzano (1781-1848)

Remarque

1. Si f est **strictement monotone** sur $[a,b]$, le point x_0 est **unique**.
2. Si f est **continue** sur un **intervalle** I, alors $f(I)$ est un **intervalle**.
3. Si f est **continue** sur **un segment** I, alors $f(I)$ **est un segment**.

Exemple

Montrez que l'équation $4x^3-6x^2+3x-2=0$ admet au moins une solution entre 1 et 2.

Posons $f(x)=4x^3-6x^2+3x-2$, f est une fonction de polynôme , donc elle est définie et continue sur $[1;2]$. De plus on a $f(1)\cdot f(2)=(-1)\cdot(12)<0$. Dans ces conditions, le **théorème de la valeur intermédiaire** affirme l'existence d'un nombre x_0 entre 1 et 2 tel que $f(x_0)=0$. Autrement dit, l'équation $4x^3-6x^2+3x-2=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]1;2[$.

c) Théorème 4 (Théorème du point fixe)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I=[a,b]$. Si $f(I)\subset I$, alors f admet (au moins) **un point fixe** sur I. (C'est-à-dire : il existe (au moins) un réel x de I tel que $f(x)=x$).

6. Fonctions réciproques (ou inverses)

Si $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ est une **fonction continue** et **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**), alors f est **une bijection** de $[a,b]$ vers l'ensemble d'arrivée $[f(a),f(b)]$ (resp. $[f(b);f(a)]$). La bijection réciproque f^{-1} est continue et **strictement croissante** (resp. **décroissante**).

Texte légal : Consequence

Si f est une **fonction continue** et **strictement croissante** (resp.**strictement décroissante**) de $f:[a,b]\rightarrow[m,M]$, alors, f admet une **bijection réciproque** notée f^{-1} avec $f^{-1}:[m,M]\rightarrow[a,b]$.

Définition : Théorème

Si f est une **fonction continue** et **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**)

sur un intervalle $[a, b]$, alors f admet une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement

croissante (resp. strictement décroissante) sur $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$) vers $[a, b]$.

Proposition

Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est **continue** et **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**), alors f^{-1} est continue et **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) sur $[f(a), \lim_{x\to b^-} f(x)[$ (resp. $]\lim_{x\to b^-} f(x), f(a)]$) vers $[a, b[$.

F. Évaluation formative

Objectifs
Tester la compréhension

1. Calcule des limites

Compréhension

Question

[Solution n°1 p 19]

Trouver les limites suivantes ou dire si elles n'existent pas.

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3-1}$.
2. $\lim_{x\to 0} x^3 \cos \dfrac{1}{x^3}$.
3. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$.
4. $\lim_{x\to +\infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x$.

2. La continuité

Compréhension

Question 1

[Solution n°2 p 19]

Étudier la continuité de fonction suivante en $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 \quad si\ \ x = 0 \end{cases}$$

.

Question 2

[Solution n°3 p 19]

Étudier la continuité sur le domaine de définition de la fonction :

$$f\ : x \mapsto \frac{\sin x}{2 + \sin x}$$

3. Applications de continuité

Prolongement par continuité

Montrer que les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^*$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$ et dire si on peut les prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$.

Question 1

[Solution n°4 p 19]

$$g(x) = \sin(x) \cdot \sin(\frac{1}{x}).$$

Question 2

[Solution n°5 p 20]

$$h(x) = \frac{\cos^2 x - 1}{x}$$

Théorème des valeurs intermédiaires

Question 3

[Solution n°6 p 20]

Montrer que l'équation : $x^{17} = x^{11} + 1$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0, 2]$.

Questions de synthèse

Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, s'annule en au moins un point.

Montrer que l'équation $x^3 + x^2 = 5x - 4$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 15)

1. On remarque que $x^3 - 1 = (x-1)\cdot(x^2+x+1)$, donc $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}$.
2. On a $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$ et $|\cos \frac{1}{x^3}| \leq 1$, alors $\lim_{x\to 0} x^3 \cos \frac{1}{x^3} = 0$.
3. On utilise l'expression conjuguée $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x} = 0$.
4. On sait que $(1+\frac{1}{x})^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$, d' ou $\lim_{x\to +\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$.

> Solution n°2 (exercice p. 15)

On a $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$, car $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ et $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$,
comme $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ alors la fonction f est continue en point $x_0 = 0$.

> Solution n°3 (exercice p. 16)

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, on a les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto 2 + \sin x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto 2 + \sin x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f qui est le quotient de deux fonctions précédentes est continue sur $\mathbb{R}$.

> Solution n°4 (exercice p. 16)

Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et que $x \mapsto \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors par composition, $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Par produit, g est donc continue sur $\mathbb{R}^*$.

On sait que $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$ et la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ est bornée par 1, donc on a $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, comme la limite existe et finie alors on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

> Solution n°5 (exercice p. 16)

Comme précédemment facile de démontrer la continuité de h sur $\mathbb{R}^*$. De plus on a $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x} = 0$, comme la limite existe et finie alors on peut prolonger h par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$.

> Solution n°6 *(exercice p. 16)*

On pose $f(x) = x^{17} - x^{11} - 1$, la fonction f est continue sur $[0, 2]$ car elle est polynomiale, de plus on a $f(0) \cdot f(2) = -(2^{17} - 2^{11} - 1) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0, 2[$, $t.q.\ f(c) = 0$).

Solution des exercices

> Solution n°1 (exercice p. 9)

- ○ 0
- ○ n'existe pas
- ○ -1
- ◉ 1

  Il s'agit d'une forme indéterminée. On va multiplier par l'expression conjuguée.

  $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x} = 1$.

> Solution n°2 (exercice p. 9)

- ○ est égale à 0.
- ○ est égale à $+\infty$.
- ○ est égale à $-\infty$.
- ◉ n'existe pas.

On a $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{-1}{x} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$ et $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{-1}{x} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$,

et comme $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{-1}{x} \neq \lim_{x \to 0^-} \dfrac{-1}{x}$, alors $\lim_{x \to 0} \dfrac{-1}{x}$ n'existe pas.

> Solution n°3 (exercice p. 9)

☑	est une forme indéterminée du type 0^0.
☐	est égale à 0.
☐	n'existe pas.
☑	est égale à 1

On a une forme indéterminée du type 0^0, pour lever l'indétermination, on utilise l'expression suivante au voisinage de 0 :

$x^x = e^{x\ln x}$, et comme $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ on a $\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$.

Glossaire

Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre ***O*** et de rayon **1** sur le quel on définit un sens de parcours : sens trigonométrique direct ou indirect.

Continuité en un point

On dit que f est **continue** en x_0 si et seulement si **la limite de** $f(x)$ est **égale** $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0.

Continuité sur un intervalle

f est **continue sur** I si et seulement si f est **continue en tout point de** I.

Cosinus

Soit M un point du cercle trigonométrique.

On appelle cosinus de l'angle (OI, OM), l'abscisse du point M.

Domaine de définition

ou **ensemble de départ** d'une fonction réelle d'une variable réelle Ensemble des éléments pour lesquels la fonction f est définie.

Ensemble d'arrivée

ou **image d'une fonction réelle d'une variable réelle** est

$f(D)=\{y \in \mathbb{R} \,/\, y=f(x), x \in D\}$.

Extremum d'une fonction

Un extremum est un minimum ou un maximum.

Fonction bijective

Fonction **injective** et **surjective à la fois**.

Fonction bornée

f est **bornée**, si f est **à la fois majorée** et **minorée c'est-à-dire:**

$\exists m,M\in\mathbb{R}$, *tel que* $\forall x\in D, m\leq f(x)\leq M$.

Fonction croissante

$\forall x_1,x_2 \in I$, **tel que** $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$.

Fonction décroissante

$\forall x_1,x_2\in I$, tel que $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$.

Fonction dérivable au point x_0

f est **dérivable au point** x_0 si et seulement si la quantité $f(x)-f(x_0)$ / $x-x_0$ **admet une limite finie** lorsque x tend vers x_0.

Fonction dérivable sur un intervalle

f est **dérivable sur *I*** si elle est **dérivable en tout point de *I*.**

Fonction dérivée

La fonction dérivée ou **dérivée** de *f* sur *I* est la fonction f' qui a tout x de *I* associe $f'(x)$.

fonction monotone

Une fonction qui est **croissante** ou **décroissante**.

Fonction polynôme de degré 1

Une fonction polynôme de degré un *f* est une fonction dépendant de deux paramètres réels α et β et définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x)=\alpha x+\beta$ où $\alpha \neq 0$.

Fonction polynôme de degré n

Un polynôme de degré n est une fonction *f* dépendant de $n+1$ paramètres réels $a^0, a^2, \dots, a^n$ et définie par $f(x)=a^n x^n+a^{n-1}x^{n-1}+\dots+a^1 x+a^0$ où $a^n \neq 0$.

Fonction strictement croissante

$\forall x_1, x_2 \in I$, **tel que** $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Fonction strictement décroissante

$\forall x_1, x_2 \in I$, **tel que** $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

fonction strictement monotone

Une fonction qui est **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

Fraction rationnelle

Une **fraction rationnelle** se présente sous la forme $P(x)/Q(x)$,où $P(x),Q(x)$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Graphe ou courbe représentative d'une fonction réelle d'une variable réelle

Ensemble des points M de coordonnées (x,y) avec $x \in D$ et $y=f(x)$.

Parité d'une fonction numérique

En **mathématiques**, **la parité d'une fonction d'une variable réelle**, complexe ou vectorielle est une propriété qui requiert d'abord la symétrie du domaine de définition par rapport à l'origine, puis s'exprime par l'une ou l'autre des relations suivantes :

1. fonction paire : pour tout x du domaine de définition, $f(-x) = f(x)$;
2. fonction impaire : pour tout x du domaine de définition, $f(-x) = -f(x)$.

Point d'accumulation

Un point a de D est un point d'accumulation de D s'il existe des points aussi proches que l'on veut de a, distincts de a et appartenant à D.

C'est-à-dire s'il existe a, b $\in$ IR t.q. a < ɑ < b et D $\supset$]a, ɑ[$\cup$]ɑ, b[

Sinus

Soit ***M*** un point du cercle trigonométrique. On appelle sinus de l'angle ***(OI,OM)***, l'ordonnée du point ***M***.

Voisinage de point x_0

Tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ **contenant** x_0 : $\forall a>0,\ ]x_0-a,x_0+a[$ est un voisinage de x_0.

Bibliographie

[BELAIDI Benharrat] Analyse mathématique Exercices Corrigés. Office Des Publications Universitaires (Alger), 05-2013 ; 1.01.5364.

[HITTA Amara] Cours Algèbre et Analyse I. Université 8 Mai 1945 - Guelma

[MEHBALI Mohamed] Mathématiques 1 Fonction d'une variable réelle. Office Des Publications Universitaires (Alger), 01-2013 ; 1.01.5048.

[Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak, Traduction : Eric Kouris] PROBLÈMES D'ANALYSE II Continuité et dérivabilité. EDP Sciences (France), 2008 (03)

Webographie

[mp.cpgedupuydelome] [http://mp.cpgedupuydelome.fr] édité le 9 janvier 2014

[wikipedia] http://fr.wikipedia.org/w/index.php?oldid=89849582

[wikipedia] Source: http://fr.wikipedia.org/w/index.php?oldid=100567156