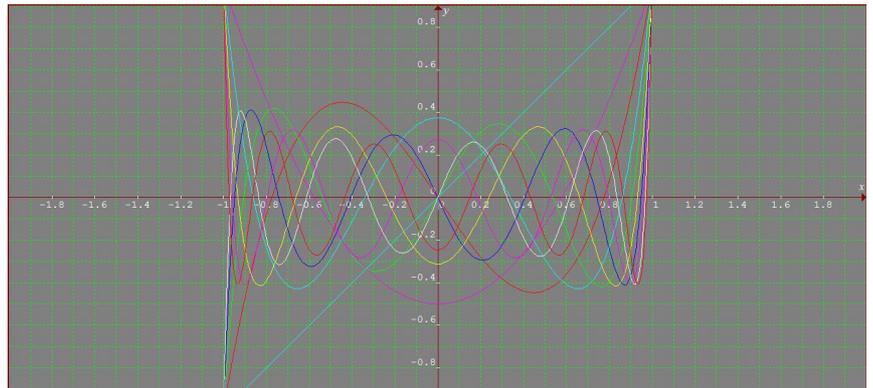


Fonctions réelles d'une variable réelle

1.0

Dr LATELI Ahcene



[HTTPS://TELUM.UMC.EDU.DZ/COURSE/VIEW.PHP?ID=55](https://telum.umc.edu.dz/course/view.php?id=55)
[HTTPS://YOUTUBE.COM/@MATHEMATICSANDLIFE2291?](https://youtube.com/@MATHEMATICSANDLIFE2291?FEATURE=SHARED)
FEATURE=SHARED

Légende

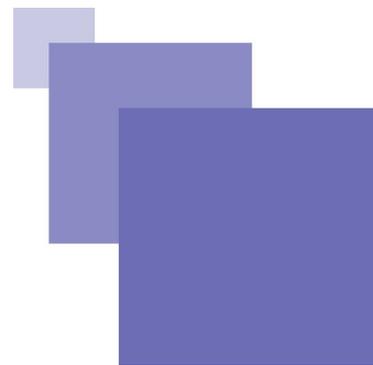


Abréviation



Référence générale

Table des matières



Chapitre I : Généralités sur les fonctions

A. Notion de fonction



Définition

Étant donnés deux ensembles D et F , une fonction f de D dans F est la donnée pour **tout élément** $x \in D$ d'**un unique élément** $y \in F$ que l'on note $f(x)$.

- Lorsque l'**ensemble d'arrivée** est \mathbb{R} , on dit que f est une **fonction réelle**.
- Lorsque l'**ensemble de départ** est un sous-ensemble de \mathbb{R} , on dit que f est une **fonction d'une variable réelle**.
- Si $D \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$, on dit que f est une **fonction réelle d'une variable réelle**.

On note alors $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. L'ensemble de départ D est alors appelé un **ensemble (domaine) de définition** de la fonction f .



Définition : Domaine de définition

C'est l'ensemble des x de \mathbb{R} pour lequel f **existe** (**soit définie**). Généralement, on note D_f l'ensemble de définition d'une fonction donnée par une telle expression.
 $D_f = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \text{ existe}\}$

Domaine de définition de fonctions usuelles

Voici le tableau des fonctions usuelles ainsi que leurs ensembles de définition.

Fonction	D_f
$f(x) = k$	\mathbb{R}
$f(x) = x$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*

Fonction	D_f
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}^*
$f(x) = e^x$	\mathbb{R}
$f(x) = \ln x$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin x$	\mathbb{R}
$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$



Exemple

- La fonction $f : x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sin(nx)}, n \in \mathbb{N}^*$ est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{n} \cdot k, k \in \mathbb{Z}\}$.
- La fonction $g : x \mapsto \ln \frac{x(x+1)}{(x-1)(x-2)}$ est définie sur $D_g =]-\infty; -1[\cup]0; 1[\cup]2; +\infty[$.
- La fonction $h : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{\ln(x-1)}$ est définie sur $D_h =]1; 2[\cup]2; +\infty[$.



Définition : Graphe d'une fonction

Dans un plan rapporté à un repère (o, \vec{i}, \vec{j}) (généralement orthonormé). Les points $M(x, f(x))$ avec $x \in D_f$ constituent la courbe représentative de f , noté C_f .
 $C_f = \{M(x, f(x)) : x \in D_f\}$.

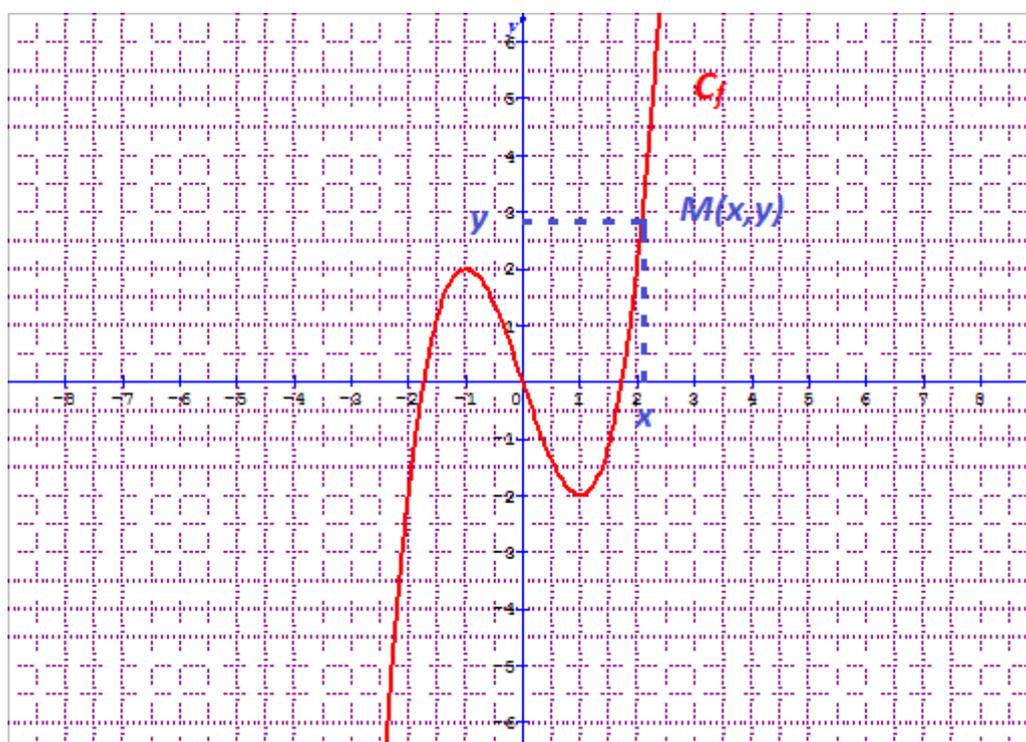


Figure 1.1 : Graphe d'une fonction

B. Exercice

[Solution n°1 p 19]

Soit f la fonction donnée par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, donc elle est définie sur le domaine

- \mathbb{R}
-
- $] -\infty; -1[\cup] 1; +\infty[$
-
- $] -\infty; -1] \cup [1; +\infty[$
-
- $[-1; 1]$
-
- $] -1; 1[$

C. Fonctions monotones



Définition

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle. Soit $E \subseteq D$.

- On dit que la fonction f est **croissante** sur E si et seulement si pour tout couple $(x_1, x_2) \in E^2$, tel que $x_1 < x_2$ alors: $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- On dit que la fonction f est **décroissante** sur E si et seulement si pour tout couple $(x_1, x_2) \in E^2$, tel que $x_1 < x_2$ alors: $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Une fonction qui est **croissante** ou **décroissante** sur E sera dite **monotone** sur E .



Définition

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle. Soit $E \subseteq D$.

- On dit que la fonction f est **strictement croissante** sur E si et seulement si pour tout couple $(x_1, x_2) \in E^2$, tel que $x_1 < x_2$ alors: $f(x_1) < f(x_2)$.
- On dit que la fonction f est **strictement décroissante** sur E si et seulement si pour tout couple $(x_1, x_2) \in E^2$, tel que $x_1 < x_2$ alors: $f(x_1) > f(x_2)$.
- Une fonction qui est **strictement croissante** ou **strictement décroissante** sur E sera dite **strictement monotone** sur E .



Exemple

- La fonction $h: x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$ définie sur \mathbb{R} est strictement décroissante sur \mathbb{R}^+ et strictement croissante sur \mathbb{R}^- , car $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tel que $x_1 < x_2$ nous avons :

$$\begin{aligned}
 x_1^2 < x_2^2 &\iff x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1 \\
 &\iff \frac{1}{x_1^2 + 1} > \frac{1}{x_2^2 + 1} \\
 &\iff h(x_1) > h(x_2), \text{ d'une part.} \\
 \text{D'autre part on a : } \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \text{ tel que } x_1 < x_2 \text{ nous avons :} \\
 x_1^2 > x_2^2 &\iff x_1^2 + 1 > x_2^2 + 1 \\
 &\iff \frac{1}{x_1^2 + 1} < \frac{1}{x_2^2 + 1} \\
 &\iff h(x_1) < h(x_2).
 \end{aligned}$$

2. Donc la fonction $h: x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$ est strictement monotone sur \mathbb{R}^+ et sur \mathbb{R}^- .

D. Fonction paire, impaire

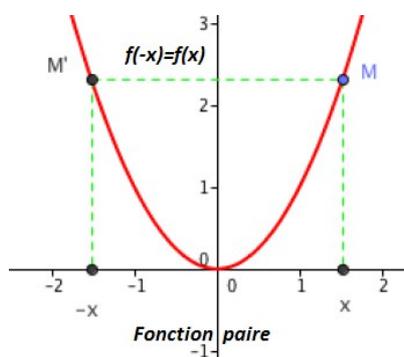


Définition : Fonction paire

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle.

On dit que la fonction f est **paire** si et seulement si pour tout réel $x \in D$, nous avons : $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$.

Interprétation géométrique



La **courbe** représentative d'une fonction **paire** est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

Image 1 Figure 1.2 : Graphe d'une fonction paire

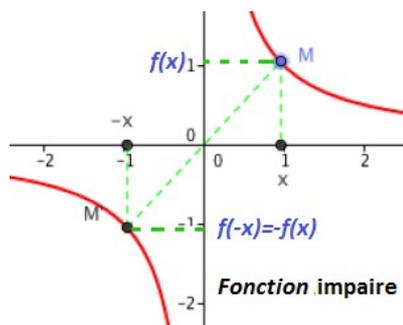


Définition : Fonction impaire

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle.

On dit que la fonction f est **impaire** si et seulement si pour tout réel $x \in D$, nous avons : $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.

Interprétation géométrique



La **courbe** représentative d'une fonction **impaire** est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

Image 2 Figure 1.3 : Graphe d'une fonction impaire



Exemple

- La fonction **cosinus** est **paire** sur l'intervalle $] -\pi ; \pi[$.
- La fonction **sinus** est **impaire** sur l'intervalle $] -\pi ; \pi[$.

E. Fonctions périodiques



Définition

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle et λ un réel strictement positif. La fonction f est dite **périodique** de **période** λ (ou encore λ -périodique) si pour tout $x \in D$,

$$\begin{cases} x + \lambda \in D \\ f(x + \lambda) = f(x) \end{cases}$$



Remarque

λ est la plus petite période qui vérifie la Définition précédente



Exemple

- Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont périodiques de **période** 2π .
- Les fonctions **tangente** et **cotangente** sont périodiques de **période** π .



Remarque

Si f est de période T alors :

1. $\forall k \in \mathbb{Z} : (x + kT) \in D_f, f(x + kT) = f(x)$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \mapsto f(\alpha x + b)$ est de **période** $\frac{T}{|\alpha|}$.



Exemple

1. $\forall k \in \mathbb{Z} : \sin(x + 2\pi \cdot k) = \sin(x)$,
2. Soit $f : x \mapsto \sin(5x + 3)$ une fonction, alors on a:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(5x + 3) \\ &= \sin(5x + 3 + 2\pi) \\ &= \sin\left(5\left[x + \frac{2\pi}{5}\right] + 3\right) \\ &= f\left(x + \frac{2\pi}{5}\right). \text{ Donc la fonction } f \text{ est } \frac{2\pi}{5} \text{-périodique.} \end{aligned}$$

F. Fonctions bornées



Définition

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle.

1. On dit que f est **majorée** sur D s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$.
2. On dit que f est **minorée** sur D s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in D$, $m \leq f(x)$.

Une fonction numérique qui est à la fois **majorée et minorée**, est dite **bornée** .



Exemple

1. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est bornée, $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin(x) \leq +1$.
2. La fonction $x \mapsto e^x$ est non bornée, mais elle est minorée par 0, car : $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq e^x$.

G. Opérations sur les fonctions



Définition

Soit $E \subseteq D$. On note $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de E dans \mathbb{R} .

Soient f et $g \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit de nouvelles fonctions, appartenant à $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$, par :

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x), \lambda f : x \mapsto \lambda \cdot f(x), f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x) \text{ et } |f| : x \mapsto |f(x)|.$$



Définition : Composée de deux fonctions

Soient $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(F, \mathbb{R})$ deux fonctions. Si $f(E) \subset F$ alors on définit la fonction $g \circ f : E \rightarrow \mathbb{R}$ par, pour tout $x \in E$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. La fonction $g \circ f$ s'appelle **la composée** de f avec g .



Exemple

- $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \ln(x)$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*, x \mapsto g(x) = \exp(x)$ alors $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \exp(\ln(x)) = x$.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1], x \mapsto f(x) = \sin(x)$ et $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \ln(x)$ alors $g \circ f$ n'existe pas car $[-1; 1] \not\subset \mathbb{R}_+^*$.

H. Évaluation formative

Objectifs

Tester la compréhension

1. La parité

La parité

Compréhension

Question 1

[Solution n°1 p 17]

Étudier la parité des fonctions suivante :

- $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$,
- $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$,

Question 2

[Solution n°2 p 17]

Étudier la parité des fonctions suivante :

- $h(x) = a^x + a^{-x}, (a > 0)$,
- $t(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x}$

2. Exercice : Périodicité d'une fonction

[Solution n°2 p 19]

Exercice 1

La fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ est périodique de période :

2π

π

4π

$\frac{\pi}{2}$

Exercice 2

La fonction $g : x \mapsto \sin\left(\frac{2}{3}x + 2\right) + \cos(x + 1)$ est périodique de période :

2π

6π

3π

4π

3. Exercice : Exercice 3

[Solution n°3 p 20]

Choisissez la (les) bonne (s) réponse (s):

La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 3}{1 + |x|}$ est :

Définie si, et seulement si, $1 + |x| \neq 0$.

Définie si, et seulement si, $x \neq 1 \vee x \neq -1$.

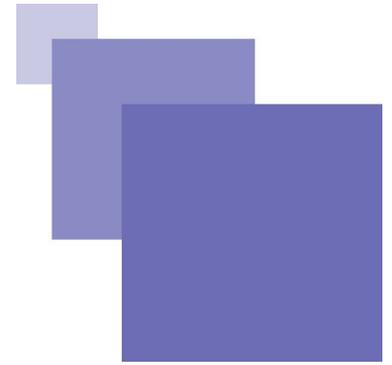
Bornée sur D_f .

Impaire sur D_f .

Paire sur D_f .

Monotone sur D_f .

Questions de synthèse



- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$, est bornée et paire sur \mathbb{R} .

- Montrer que la fonction $g : x \mapsto \frac{x}{x + 1}$, est strictement monotone et bornée sur $[0; +\infty[$.



Solution des exercices

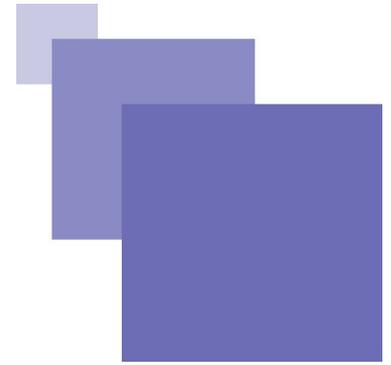
> Solution n°1 (exercice p. 13)

1. La fonction f est définie sur \mathbb{R} , $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$, de plus on a
$$\begin{aligned}f(-x) &= \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) \\ &= \ln \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} \\ &= -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) \\ &= -f(x), \text{ donc } f \text{ est impaire.}\end{aligned}$$
2. La fonction g est définie sur $] -1; 1[$ et on a
$$\begin{aligned}g(-x) &= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= -g(x), \text{ donc la fonction } g \text{ est impaire,}\end{aligned}$$

> Solution n°2 (exercice p. 13)

1. La fonction h est définie sur \mathbb{R} , et $h(-x) = a^{-x} + a^{+x} = h(x)$, alors h est paire.
2. La fonction t est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, et on a
$$t(-x) = \frac{-\sin x}{1 - \sin^2 x} = -t(x), \text{ d'où } t \text{ est impaire.}$$

Solution des exercices



> Solution n°1 (exercice p. 7)

- \mathbb{R}
- $] -\infty; -1[\cup] 1; +\infty[$
- $] -\infty; -1] \cup [1; +\infty[$
- $[-1; 1]$
- $] -1; 1[$

> Solution n°2 (exercice p. 13)

Exercice 1

- 2π
- π
- 4π
- $\frac{\pi}{2}$

Exercice 2

Solution des exercices

2π

6π

3π

4π

La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{2}{3}x + 2\right)$ est de période 3π , et la fonction $x \mapsto \cos(x + 1)$ est de période 2π

dans la fonction \mathcal{G} est de période $\text{ppcm}(3\pi, 2\pi) = 6\pi$.

> **Solution n°3** (exercice p. 14)

Choisissez la (les) bonne (s) réponse (s):

Définie si, et seulement si, $1 + |x| \neq 0$.

Définie si, et seulement si, $x \neq 1 \vee x \neq -1$.

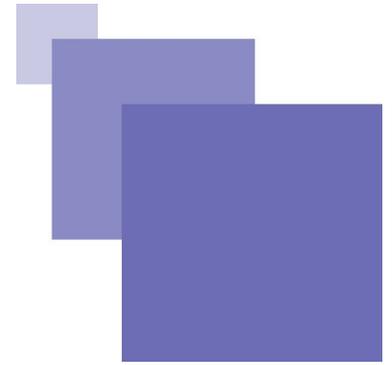
Bornée sur D_f .

Impaire sur D_f .

Paire sur D_f .

Monotone sur D_f .

Index



*Fonction réelle, Fonction
bornée, Monotonie,*

Parité, Périodicité..... p.4