

Série d'exercices N°2

Ex1: Etudier la continuité des fonctions suivantes en  $x_0 = 0$ ; sauf pour 4)  $x_0 = 1$ .

1)  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$     2)  $g(x) = \frac{x - |x|}{2}$ ,  $x \neq 0$

3)  $h(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \end{cases}$     4)  $t(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$ ,  $t(1) = 1/2$

5) étudier la continuité sur le domaine de définition de :

a)  $u(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x}$     b)  $v(x) = x|x|$     c)  $w(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

Ex2: Soit  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq -2 \\ x + a, & x < -2 \end{cases}$

Déterminer  $a$  pour que  $f$  soit continue.

Ex3 (Supplémentaire): Soit  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$  et  $f$  définie par :

1)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{a e^x - 1} / x, & x < 0 \\ ab, & x = 0 \\ (e^x - 1)(1 - \cos x) / \sin x, & x > 0 \end{cases}$

Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit continue en  $x_0 = 0$ .

Ex4 : Les fonctions suivantes admettent-elles des prolongements par continuité ?

1)  $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$     2)  $g(x) = \frac{\cos^2 x - 1}{x}$     3)  $h(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$

4) Soit  $t(x) = \frac{a \sin x}{\sin a x}$ , où  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $t(x)$  admet-elle un prolongement par continuité en  $x_0 = 0$ , (sans calculer le domaine de définition  $D_t$  de  $t$ ).

Ex5 : Montrer que l'équation suivante :  $x^{12} = x^{11} + 1$

admet au moins une solution dans  $\mathbb{R}$  ( Ne pas calculer cette solution ).

Ex6 : Soit  $f(x) = x^3 + x$  Montrer que la courbe de  $f$  et la droite d'équation  $y = -1$  se coupent au moins en un point de l'intervalle  $[-1, -1/2]$

Ex7 (Supplémentaire) : Soit  $g(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$  Montrer que cette équation admet au moins 3 racines réelles, puis encadrer chacune d'elles entre 2 nombres relatifs successifs.

Ex8 : Soit la fonction  $f$  définie par :

$f: [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

1) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque.

2) Déterminer : a) son domaine de définition. b) son expression.

Ex9 (Supplémentaire) : Soit la fonction  $f$  définie par :

$f: [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow f(x) = \frac{2x^2 + x + 2}{x^2 + 1}$

Mêmes questions que celles de l'ex.8