DERIVABILITE

1-Généralités- définitions

1.1- Fonction dérivable en un point

1.1.1 Définition :

Soit f : $I \to R$ et x_0 un point de I. On dit que f est dérivable en x_0, si: existe. Cette limite est appelée dérivée de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$.

Exemple : soit $f(x) = x^2 - 2x + 2$ et $x_0 = 1$. Calculer $f'(1)$.

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+2-1}{x-1} = 0$$

Remarques :

Autre définition : On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si

$\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{x}0+\mathrm{h})-f(\mathrm{x}0)}{h}$, existe et est finie.

Exemples : Etudier la dérivabilité en x_0 de :

1) $f(x) = 3x - 2$; $x0 = 1$; 2) $f(x) = x^2 - 1$; $x0 = -2$;

3) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+3}$; $x0 = 1$; 4) $f(x) = \sqrt{x}$; $x0 = 1$; 5) $f(x) = \sqrt{x}$; $x0 = 0$.

1.2 Fonction dérivable à droite – à gauche d'un point

Définition :

Si le rapport $\frac{f(x)-f(\mathrm{x}0)}{x-\mathrm{x}0}$ admet une limite finie à droite, (respectivement à gauche) au point x_0. Cette limite est appelée dérivée à droite (respectivement à gauche) de f au point x_0 et est notée $f'(x0+0)$ (respectivement $f'(x0-0)$).

Autres notations, $f'd(x0)$ et $f'g(x0)$.

Remarque : Pour que f soit dérivable en x_0, il faut et il suffit que $f'(x_0+0)$ et $f'(x_0-0)$ existent et soient égales. On a alors : $f'(x_0) = f'(x_0+0) = f'(x_0-0)$.

Autres définitions :

$\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{x}0+\mathrm{h})-f(\mathrm{x}0)}{h} = f'(x0+0) = f'd(x0)$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{x}0-\mathrm{h})-f(\mathrm{x}0)}{h} = f'(x0-0) = f'g(x0)$.

Exemples: 1) $f(x) = |x-1|$, $x0 = 1$ Etudier la dérivabilité de f en x_0.

1.3 Interprétation géométrique

La dérivée de f au point x_0, notée par $f'(x0)$ est le coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point $M(x_0; f(x_0))$.

1.4 Dérivabilité et continuité

Proposition :

si une fonction est dérivable en un point , elle est continue en ce point.

Remarque : la réciproque est fausse ; c'est-à-dire une fonction continue en un point n'est pas forcément dérivable en ce point.

Exemples : 1) $f(x) = \sqrt{x};\ x0 = 0$

2) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}\ , x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$

Dans les deux exemples $f(x)$ est continue en o mais non dérivable en ce point.

1.5 Dérivée sur un intervalle – fonction dérivée

Une fonction f définie sur un intervalle **I** est dite dérivable sur cet intervalle si elle est dérivable en tout point de **I .**

L'application f' : **I** → **R**

$x \to f'(x)$ est appelée fonction dérivée.

Exemple : Soit la fonction $f(x) = sinx$, calculer sa fonction dérivée.

Sa dérivée est :

$$(sinx)' = cosx$$

$$f'(x) = cosx$$

1.6 Dérivée d'ordre supérieur

Si f' admet à son tour une fonction dérivée, celle-ci est dite dérivée seconde ou dérivée d'ordre 2. Elle est notée par f''.

Par récurrence, on définit les dérivées nièmes ou d'ordre n, notées par $f^{(n)}$.

Nous avons donc : $f^{(n)}$ dérivée de $f^{(n-1)}$. C'est-à-dire : $f^{(n)} = f^{(n-1)'}$.

Par convention, $f^{(0)} = f$ (dérivée d'ordre zéro).

Exemple : On vérifie par récurrence que :

$(\sin x)^{(n)} = \sin(x+n\frac{\pi}{2})$ et $(\cos x)^{(n)} = \cos(x+n\frac{\pi}{2})$.

1.7 Opérations sur les fonctions dérivables

1.7.1 Théorème : f ; g : **I** → **R,** $x_0 \in \mathbf{I}$

Si f et g sont dérivables en x_0 , alors : f+g ; f.g et $\frac{f}{g}$ $(g(x0) \neq 0)$, sont dérivables en x_0 et l'on a :

$(f+g)' = f' + g'$; $(f.g)' = f'.g + f.g'$; $(\frac{f}{g})' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$ $(g(x0) \neq 0)$.

1.7.2 Dérivée d'une fonction composée

Soit f : **I** → **R,** g : f(I) → **R,** $x_0 \in \mathbf{I}$. Si f est dérivable en $x_0 \in \mathbf{I}$ et g est dérivable en $f(x_0)$, alors $go f$ est dérivable en x_0 et l'on a :

$(go f)'(x_0) = g'((x_0)).f'(x_0)$

Exemples :

$h(x) = \cos(x^2+1) \ \rightarrow \ h'(x) = (-\sin(x^2+1))2x \ = -2x\sin(x^2+1)$

1.7.3 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème : f : I → J, $x_0 \in \mathrm{I}$. On suppose que f est bijective; continue sur I et dérivable en $x_0 \in \mathrm{I}$ et telle que $f'(x_0) \neq 0$; alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable au point $f(x_0)$ et admet pour dérivée :

$$(f^{-1})'(f(x0) = \frac{1}{f'(x0)}$$

Exemple :

f : [1 ; +∞[→ **R**

$x \quad \rightarrow \quad y = f(x) = \sqrt{(x^2-1)}$

f^{-1} : [0; +∞[→ [1 ; +∞[

$y \quad \rightarrow \quad x = f^{-1}(y) = \sqrt{(y^2+1)}$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}} = \frac{\sqrt{(x^2-1)}}{x} = \frac{y}{\sqrt{(y^2+1)}}$$

2. Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle

2.1 Théorème de Rolle

Soit f : [a ; b] → $\boldsymbol{R}$, continue sur [a ; b], dérivable sur]a ; b[et telle que f(a) = f(b) ; alors il existe au moins c ∈]a ; b[tel que f'(c) = 0.

Exemple :

Soit f(x) = x^2 ; [-1 ; 1]

Appliquer le théorème de Rolle

La fonction f est continue sur [-1 ; 1] et dérivable sur]-1 ; 1[

$f(-1) = 1 = f(1)$

Donc il existe au moins c ∈]-1 ; 1[tel que f'(c) = 0

En effet : $f'(c) = 2c = 0 \implies c = 0$

2.2 Théorème des accroissements finis (A.F)

Soit f : [a ; b] → $\boldsymbol{R}$, continue sur [a ; b], dérivable sur]a ; b[; alors il existe au moins c ∈]a ; b[tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

Exemple :

Appliquer le théorème des accroissements finis à :

$f(x) = x^2 - 1$ sur [1 ; 3]

Réponse :

La fonction f est continue sur [1 ; 3] et dérivable sur]1 ; 3[

alors il existe au moins c ∈]1 ; 3[tel que : $f(3) - f(1) = (3-1)f'(c)$

$8 - 0 = 2.2c = 4c \implies c = 2$

<u>Autres applications</u> :

Montrer que :

1) ∀ x ∈]0 ; +∞[, $\frac{x}{x+1} < Log(1+x) < x$

Réponse :

Prendre f(t) = Logt ; appliquer le théorème des A.F sur [1 ; 1+x].

En effet :

La fonction f est continue sur [1 ; 1+x] et dérivable sur]1 ; 1+x[

alors il existe au moins c ∈]1 ; 1+x[tel que : $f(1+x) - f(1) = (1+x-1)f'(c)$

$$Log(1+x) - Log1 = x\frac{1}{c}$$

$Log(1+x) = x\frac{1}{c}$

$$1 < c < 1+x \;\Rightarrow\; \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < 1$$

$D'o$ù ⇒ ∀ x ∈]0 ; +∞[, $\frac{x}{x+1} < \frac{x}{c} < x$

1) Finalement, x ∈]0 ; +∞[, $\frac{x}{x+1} < Log(1+x) < x$

2) Montrer : ∀ x ∈]0 ; $\frac{\pi}{2}$[, sinx$< x < tgx$

Réponse :

Prendre f(t) = tgt et appliquer le théorème des A.F sur [0 ; x] ; puis prendre f(t) = sint et appliquer le théorème des A.F sur [0 ; x].

En effet :

- La fonction f(t) =tgt est continue sur [0 ; x] et dérivable sur]0 ; x[

alors il existe au moins c ∈]0 ; x[tel que : $f(x) - f(0) = (x-0)f'(c)$

$$tgx - tg0 = x\frac{1}{cos^2c}$$

$$tgx = x\frac{1}{cos^2c}$$

$$cos^2c < 1 \;\Rightarrow 1 < \frac{1}{cos^2c} \;\Rightarrow x < \frac{x}{cos^2c}$$

D'où : $x < tgx$

- La fonction f(t) =sint est continue sur [0 ; x] et dérivable sur]0 ; x[

alors il existe au moins c ∈]0 ; x[tel que : $f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c)$

$$sinx - sin0 = xcosc$$

$$sinx = xcosc$$

$$cosc < 1 \;\Rightarrow sinx < x$$

1) Finalement, on a : ∀ x ∈]0 ; $\frac{\pi}{2}$[, sinx< $x < tgx$

2.3 Règle de l'Hopital

Soient f et g deux fonctions dérivables dans un voisinage de x_0 .

Si $\lim_{x \to x0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

et si $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite l au point x_0 alors $\lim_{x \to x0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Exemples : Calculer les limites suivantes au point x_0.

1) $\frac{tgx}{x}$, $x_0 = 0$.
2) $\frac{cosx - 1}{x}$, $x_0 = 0$.
3) $\frac{cosx - cosa}{sinx - sina}$, $x_0 = a$; $a \in \boldsymbol{R}$.
4) $\frac{Logx}{x-1}$, $x_0 = 1$;
5) $\frac{sinx}{x^2+3x}$, $x_0 = 0$.

Réponses:

1) $\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{(tgx)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{cos^2x.1} = 1$
2) $\lim_{x \to 0} \frac{cosx - 1}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{-sinx}{1} = 0$

3) $\lim_{x\to a}\frac{cosx - cosa}{sinx - sina} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to a}\frac{-sinx}{cosx} = -tga$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{Logx}{x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x.1} = \infty$

(Nous avons deux limites)

Remarque:

Si $\lim_{x\to x0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$ et si $\lim_{x\to x0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = l$, alors : $\lim_{x\to x0}\frac{f(x)}{g(x)} = l$

Exemples :

1) $\frac{1-cosx}{x^2}$, x0 = 0. 2) $\frac{cos2x-1}{x^3+5x^2}$, x0 = 0.

EXERCICES

Exercice1 :

1) Etudier la dérivabilité en x_0 des fonctions suivantes, en utilisant la définition:

a) $f(x) = ((x-3)/(x^2+3)), x_0 = 1$

b) $g(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1$

2) Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x)\ , x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$

b) $g(x) = ((1-x)/(1+|x|))$

Exercice 2:

Appliquer le théorème des accroissements finis quand cela est possible à :

1) $f(x) = 2(x^2-5), sur\ [3;\ 5]$

2) $g(x) = \sqrt{x}, x \in [-1;\ 1]$.

3) $h(x) = x^5(x-4), x \in [0;\ 4]$.

4) $t(x) = |x-1|, x \in [0;\ 2]$.

Exercice 3 :

Montrer que :

1) $\forall$ x $\in]0 ; \frac{\pi}{2}[$, $sinx < x < tgx$

1) 2) $\forall$ x $\in]0 ; +\infty[$, $\frac{1}{x+1} < L\,\mathrm{og}(1+x) - Log x < \frac{1}{x}$

Exercice 4 :

Soit f(x) une fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)\ln(1-x), 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + ax + b, x \geq 1 \end{cases}$$

1) Calculer a et b pour que f soit continue sur [0;+∞[et vérifie f(0) = f(2).

2) Vérifier que f vérifie les conditions du théorème de Rolle sur l'intervalle [0; 1], trouver ensuite le nombre c qui figure dans le théorème.

3) Trouver c' en appliquant le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle [2; 3].

Exercice 5 :

Soit f définie par :

$f(x) = x(ax^2 + bx + c)$

Déterminer a,b,c tels que le graphe de f noté par (C) admet pour tangente la 1ière bissectrice à l'origine, et la tangente au point M(1,2) est parallèle à la 2ième bissectrice.

Exercice 6 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - cosx - sinx}{x^2}$; 2) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2}$; 3) $\lim_{x\to \pi} \frac{sin^2(x-\pi)}{(x^2-\pi^2)}$;

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2+3}$; 5) $\lim_{x\to a} \frac{cosx - cosa}{sinx - sina}$, $a \in \boldsymbol{R}$; 6) $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx^2}{x^4}$