3. CONTINUITE

3.1-Continuité en un point

3.1.1 Définition : Soit f $\boldsymbol{I} \to \boldsymbol{R}$ et x_0 un point de I. On dit que f est continue en x_0, si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Cette définition peut aussi s'écrire :

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0\colon\ \forall x \in I\colon\ |x - x_0| < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

3.2- Continuité à droite – à gauche en un point

- La fonction f est continue à droite en x_0, si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Ceci est équivalent à: $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0\colon\ \forall x \in I\colon 0 < x - x_0 < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

- De même, f est continue à gauche en x_0, si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Ceci est équivalent à : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0\colon\ \forall x \in I\colon 0 < x_0 - x < \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Remarque: f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche de x_0.

Exemples :

1) $f(x) = \begin{cases} |x-1|\,, x \neq 1 \\ 0, \ x = 1 \end{cases}$

2) $g(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{|x|}\,, x \neq 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$

Les fonctions f et g sont elles respectivement continues en $x_0 = 1$ et $x_0 = 0$?

Réponses :

1) $f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1; & x>1 \\ 1-x; & x<1 \\ 0; & x=1 \end{cases}$

- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1) = 0 = f(1)$
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x) = 0 = f(1)$

Donc, la fonction f est continue $x_0 = 1$.

2) $f(x) = \frac{sinx}{|x|}$; $x_0 = 0$

$f(x) = \frac{sinx}{|x|} = \begin{cases} \frac{sinx}{x}; & x>0 \\ \frac{sinx}{-x}; & x<0 \end{cases}$

$f(0) = 1$

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{sinx}{x} = 1 = f(0)$

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{sinx}{-x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{sinx}{x} = -1 \neq f(0)$

La fonction f est continue à droite de $x_0 = 0$; mais elle n'est pas continue à gauche de $x_0 = 0$; donc elle n'est pas continue en $x_0 = 0$.

3.3- Fonction continue sur un intervalle

Une fonction définie sur un intervalle I est dite continue sur I, si elle est continue en tout point de I.

Exemples :

1) une fonction constante est continue sur son domaine de définition.
2) La fonction identité (f(x) = x) est continue sur R.
3) Les polynômes sont des fonctions continues sur R.
4) La fonction f(x) = sinx est continue sur R

3.4- Opérations sur les fonctions continues

Si f et g sont définies sur un même intervalle I et sont continues en un point $x_0 \in I$; alors les fonctions f+g ; f.g ; et $\frac{f}{g}$ (g$\neq 0$) ; $|f|$ et $\sqrt{f}$ sont continues en ce point.

3.5- Continuité de la fonction composée

Soit f : $I \rightarrow I'$ et g : $I' \rightarrow R$. Si f est continue en x_0 et g est continue en f(x_0) ; alors gof est continue en x_0.

Exemples : Soient

1) $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
2) $h(x) = \sin(x^2 + x + 1)$.

3.6- Théorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle fermé

3.6.1 Théorème 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b]. Si f(a) et f(b) sont de signes contraires, alors il existe au moins c ∈]a ; b[tel que f(c) = 0.

Exemple : soit f(x) = x^5 - 3x + 1
On a : f(0) = 1 ; f(1) = -1 et f est continue sur [0 ; 1] ; alors il existe au moins c ∈]0 ; 1[tel que f(c) = 0.

3.6.2 Théorème 2 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f : $I \rightarrow R$ et x_1 ; $x_2 \in I$, et f(x_1) et f(x_2) deux valeurs quelconques de f ; alors f atteint toute valeur intermédiaire entre f(x_1) et f(x_2).

3.6.3 Théorème 3 : Soit f : $I \to R$, monotone ; alors on a :

f est continue sur I est équivalent à f(I) est un intervalle.

3.6.4 Théorème 4 : Théorème de la fonction réciproque

Soit f : $I \to R$, si f est continue et strictement monotone sur I, alors :

1) La fonction f est bijective
2) La fonction réciproque notée par f^{-1} est strictement monotone et est de même sens que f.
3) La fonction f^{-1} est continue sur f(I).

Exemple

Soit la fonction f définie par :

$f\colon [1,+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \quad \to \quad y = f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

1) Montrer que f admet une fonction réciproque.
2) Déterminer son domaine de définition
3) Déterminer son expression.

Réponse :

1) Existence de la fonction réciproque ?

- La fonction f est continue sur $[1,+\infty[$ (car composée de fonctions continues)
- Elle est strictement croissante sur cet intervalle

En effet : $\forall x < x' \Rightarrow x^2 < x'^2 \Rightarrow x^2 - 1 < x'^2 - 1 \Rightarrow$

$$\sqrt{x'^2 - 1} < \sqrt{x'^2 - 1} \Rightarrow f(x) < f(x')$$

Donc fa fonction réciproque existe.

2) Déterminons son domaine de définition

$$Df = f([1, +\infty[)$$

$f(1) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Donc :

$$Df = f([1, +\infty[) = [0, +\infty[$$

3) Expression de la fonction réciproque ?

Soit : $y = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow y^2 = x^2 - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y^2 + 1}$ ou $x = -\sqrt{y^2 + 1}$

Comme $x \in [1, +\infty[$

La bonne réponse est : $x = \sqrt{y^2 + 1}$

Donc la fonction réciproque est donnée par :

$f^{-1}(y) = \sqrt{y^2 + 1}$

3.6.5 Fonctions réciproques circulaires

a) Fonction Arcsinus

Soit f : [$-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$] → [-1 ; 1]

y → x = f(y) = siny

La fonction f est continue ; strictement monotone, car strictement croissante. On peut donc définir une fonction réciproque que nous noterons par g (ou f^{-1}), donnée ou notée par : y = g(x) = f^{-1}(x) = Arcsinx et définie par :

soit g : [-1 ; 1] → [$-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$]

x → y = g(x) = Arcsinx

b) Fonction Arccosinus

Soit f : [$0; \pi$] → [-1 ; 1]

y → x = f(y) = cosy

La fonction f est continue ; strictement monotone, car strictement décroissante. On peut donc définir une fonction réciproque que nous noterons par g (ou f^{-1}), donnée ou notée par : y = g(x) = f^{-1}(x) = Arccosx et définie par :

soit g : [-1 ; 1] → [- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$]

x → y = g(x) = Arccosx

c) Fonction Arctangente

Soit f :] - $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ [→ R

y → x = f(y) = tgy

La fonction f est continue ; strictement monotone, car strictement croissante. On peut donc définir une fonction réciproque que nous noterons par g (ou f^{-1}), donnée ou notée par : y = g(x) = f^{-1}(x) = Arctgx et définie par :

soit g : R →] - $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$ [

x → y = g(x) = Arctgx

d) Fonction Arccotangente

Soit f :] 0; π[→ R

y → x = f(y) = cosy

La fonction f est continue ; strictement monotone, car strictement décroissante. On peut donc définir une fonction réciproque que nous noterons par g (ou f^{-1}), donnée ou notée par : y = g(x) = f^{-1}(x) = Arccotgx et définie par :

soit g : R →] 0; π [

x → y = g(x) = Arccotgx

3.7- Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, sauf (peut être) en $x_0 \in I$. Supposons que f ait une limite (finie) l au point x_0; la fonction $\tilde{f}(x)$ définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ l, & x = x_0 \end{cases}$$

est appelée prolongement par continuité de f en x_0.

Exemples :

1) $(x) = \frac{tgx}{x}$, $x_0 = 0$.

2) $(x) = \frac{tgax}{tgbx}$, a; b ∈ R^* ; $x_0 = 0$.

Les fonctions f et g admettent-elles des prolongements par continuité en $x_0 = 0$.

Réponses :

1) On a : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} . \frac{1}{cosx} = 1$,

D'où $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

2) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{tgax}{tgbx} = \lim_{x\to 0} \frac{sinax}{cosax} . \frac{cosbx}{sinbx} = \lim_{x\to 0} ax. \frac{sinax}{ax.cosax} . \frac{bx.cosbx}{bx.sinbx}$

$$\lim_{x\to 0} ax. \frac{sinax}{ax.} \frac{cosbx}{cosax} . \frac{bx}{sinbx} . \frac{1}{bx} = \frac{a}{b}$$

D'où $\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq 0 \\ \frac{a}{b}, & x = 0 \end{cases}$