Chap2 : LIMITES

2. LIMITES

2.1- Intervalles centrés

Des intervalles tels que [$x_0 -$ α ; x_0+ α] et]$x_0 -$ α ; x_0 b+ α [dans lesquels α est un réel positif et non nul, sont respectivement appelés intervalle centré fermé et intervalle centré ouvert de centre x_0. Le nombre α s'appelle rayon de l'intervalle.

2.2- Voisinage d'un point de R

Soit x_0 un point de **R** ; on appelle voisinage de x_0 toute partie V, de **R** contenant un intervalle ouvert de centre x_0.

2.3- Limite en un point x_0

Soit $x_0 \in \boldsymbol{R}$ et f une fonction définie dans un voisinage de x_0, sauf peut être en x_0. On dit que f admet le nombre l pour limite au point x_0 (ou encore que f(x) tend vers l quand x tend vers x_0), si quel que soit ε positif, il existe un nombre α positif (dépendant en général de ε) tel que pour tout x différent de x_0 et vérifiant $|x - x_0| < \alpha$, on ait $|f(x) - l| < \varepsilon$.
C'est-à-dire, pour x voisin de x_0 , f(x) est aussi voisin de l qu'on veut.
Sous forme quantifiée, cette définition se traduit par :
$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \alpha > 0\colon \ \forall x\colon \ |x - x_0| < \alpha \ \Longrightarrow \ |f(x) - l| < \ \varepsilon$
On écrit aussi : $\lim\limits_{x \to \mathrm{x}0} f(x) = l$

Exemple : Montrer que $\lim\limits_{x \to 1} (3\mathrm{x} - 2) = 1$
Réponse :
$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \alpha > 0\colon \ \forall x\colon \ |x - 1| < \alpha \ \Longrightarrow \ |3x - 2 - 1| < \ \varepsilon$
$|3x - 3| \ < \ \varepsilon \quad \Longrightarrow \ 3|x - 1| \ < \ \varepsilon \Longrightarrow \ |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$
Il suffit de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{3}$

2.4- Théorème : Si une fonction admet une limite l en un point x_0, cette limite est unique.

2.5- Limite à droite – à gauche en un point

- On dit qu'une fonction f admet le nombre l pour limite à droite de x_0 si :

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0\colon\ \forall x\colon 0 < x - x_0 < \alpha\ \Longrightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon$

Notation : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

- De même, une fonction f admet le nombre l pour limite à gauche de x_0 si :

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0\colon\ \forall x\colon 0 < x_0 - x < \alpha\ \Longrightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon$

Notation : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

Exemples :

1) $f(x) = |x - 1|\ ;\ x_0 = 1$

2) $f(x) = \frac{sinx}{|x|}\ ;\ x_0 = 0$

Calculer : $\lim_{x \to x_0} f(x)$

Réponses :

1) $f(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1; & x > 1 \\ 1 - x; & x < 1 \\ 0; & x = 1 \end{cases}$

- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 1) = 0$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (1 - x) = 0$

Donc, $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$

2) $f(x) = \frac{sinx}{|x|}\ ;\ x_0 = 0$

$$f(x) = \frac{sinx}{|x|} = \begin{cases} \frac{sinx}{x}; & x > 0 \\ \frac{sinx}{-x}; & x < 0 \end{cases}$$

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{sinx}{x} = 1$

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{sinx}{-x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{sinx}{x} = -1$

Donc, $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

2.6- Opérations sur les limites

2.6.1 Théorème :

Si f et g admettent respectivement pour limites l et l' en x_0, alors f+g ; f.g et $\frac{f}{g}$,

admettent respectivement pour limites l + l' ; ll' et $\frac{l}{l'}$, ($l' \neq 0$) en x_0.

2.6.2 Rappel : formes indéterminées

On a les formes indéterminées suivantes : $\frac{0}{0}$; $0.\infty$; $\infty.\infty$; $\infty - \infty$; aussi, nous

avons : 0^0 ; 1^∞ ; ∞^0

2.6.3 Théorème :

Soient Soit f ; g : $I \to R$ et x_0 un point de I.

Si $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x\to x0} f(x) = l$; $\lim_{x\to x0} g(x) = l'$; alors $l \leq l'$

Remarque :

Le résultat reste vrai pour l'inégalité stricte, c'est-à-dire :

Si f(x)$< g(x)$ alors $l \leq l'$

2.6.4 Théorème de l'encadrement :

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, si $\lim_{x\to x0} f(x) = l$ et si $\lim_{x\to x0} h(x) = l$; alors $\lim_{x\to x0} g(x) = l$

Exemple :

$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $Cosx < \frac{sinx}{x} < 1$

Nous avons :

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = \lim_{x\to 0} Cosx = 1$

$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

Donc $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

2.6.5 Théorème :

a) $\lim_{x \to x0} f(x) = l \implies \lim_{x \to x0}$ lf(x)l = $|l|$, (f(x) et l en valeur absolue)

b) $\lim_{x \to x0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x0}$ lf(x)l = 0