Chap1: Fonction numérique d'une variable réelle

1- Définitions – généralités

1.1 Définition d'une fonction :

On appelle fonction numérique notée f d'une variable réelle de I dans **R**, I partie de **R**, $(I \neq \emptyset)$, toute relation f de I dans **R**, qui à tout élément x appartenant à I, fait correspondre au plus un élément y appartenant à **R.**

Exemples :

1) $f(x) = 2x + 1$; 2) $f(x) = \sqrt{x}$; 3) $f(x) = \sqrt{|x-1|}$; 4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; 5) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ 6) $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$; 7) $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$; 8) $f(x) = \frac{1}{sin 2x}$; 9) $f(x) = tg 2x$; 10) $f(x) = cotg 2x$.

tg : tangente ; $cotg$: cotangente.

Le domaine de définition d'une fonction f, noté D_f est donné par :

$D_f = \{x \in \mathbf{R} / \text{f(x) existe}\}$

Exercice :

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions données précédemment.

Réponse :

1) $f(x) = 2x + 1$.

$D_f = \{x \in \mathbf{R} / \text{f(x) existe}\}$; $f(x)$ étant un polynôme ; donc $D_f = \mathbf{R}$

2) $f(x) = \sqrt{x}$

$D_f = \{x \in \mathbf{R} / x \geq 0\}$, d'où $Df = [0; +\infty[$

3) $f(x) = \sqrt{|x-1|}$

$D_f = \mathbf{R}$

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

$D_f = \{x \in \mathbf{R}/(x^2 - 3x + 2) \geq 0\}$

$\Delta = 9 - 8 = 1$; $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

D'où : $D_f =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$

5) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

$D_f = \{x \in \mathbf{R}/(x^2 - 1) \neq 0\}$

D'où : $D_f = \mathbf{R} - \{-1; 1\}$

6) $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

$D_f = \{x \in \mathbf{R}/ \mathbf{x^3} + 1 \neq 0\}$

$\mathbf{x^3} + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1 \neq 0)$

D'où : $D_f = \mathbf{R} - \{-1\}$ car $(x^2 - x + 1 \geq 0)$

7) $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$

$D_f = \{x \in \mathbf{R}/ \mathbf{x^3} - 1 \neq 0\}$

$\mathbf{x^3} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1 \neq 0)$

D'où : $D_f = \mathbf{R} - \{1\}$ car $(x^2 + x + 1 \geq 0)$

8) $f(x) = \frac{1}{sin\,2x}$

$D_f = \{x \in \mathbf{R}/\ sin2x \neq 0\}$

$sin2x \neq 0 \Leftrightarrow (2x \neq k\pi; k \in Z) \Leftrightarrow \left(x \neq \frac{k\pi}{2}; k \in Z\right)$

D'où : $D_f = \mathbf{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}; k \in Z\right\}$

9) $f(x) = tg2x = \frac{sin2x}{cos2x}$

$D_f = \{x \in \mathbf{R} /\ cos2x \neq 0\}$

$cos2x \neq 0 \Leftrightarrow \left(2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z\right) \Leftrightarrow \left(x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in Z\right)$

D'où : $D_f = \mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in Z\right\}$

10) $f(x) = cotg2x = \frac{cos2x}{sin2x}$

$D_f = \{x \in \mathbf{R} /\ sin2x \neq 0\}$

$sin2x \neq 0 \Leftrightarrow (2x \neq k\pi; k \in Z) \Leftrightarrow \left(x \neq \frac{k\pi}{2}; k \in Z\right)$

D'où : $D_f = \mathbf{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}; k \in Z\right\}$

1.2 Fonction croissante - décroissante – constante – monotone

Une fonction f définie de I dans **R** est dite :

- Croissante sur I : si $\forall x; x' \in I: x < x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x')$
  (ou, si $\forall x; x' \in I: x > x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x')$)
- Décroissante sur I : si $\forall x; x' \in I: x < x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x')$
  (ou, si $\forall x; x' \in I: x > x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x')$)
- Constante sur I : si $\forall x; x' \in I: f(x) = f(x') = Cste$ ($Cste$= constante)
- Monotone sur I, si elle est soit croissante, soit décroissante, soit constante sur l'intervalle I.

De même, on définit la notion de croissance ou de décroissance stricte en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

1.3 Fonction bornée

Une fonction f définie de I dans **R** est dite :

- Majorée sur I : si $\exists M \in \boldsymbol{R} : \ \forall x \in I, \ f(x) \leq M$
- Minorée sur I : si $\exists m \in \boldsymbol{R} : \ \forall x \in I, \ m \leq f(x)$
- Une fonction qui est majorée et minorée est dite bornée.

  On peut écrire : f est bornée sur I $\Leftrightarrow \ \exists m; M \in \boldsymbol{R} : \ \forall x \in I, \ m \leq f(x) \leq M$

  Autre écriture : f est bornée sur I $\Leftrightarrow \ \exists M' \geq 0 : \ \forall x \in I, \ |f(x)| \leq M'$

Exemple : $f(x) = sinx$ et $g(x) = cosx$ sont des fonctions bornées sur **R**

En effet : $\forall x \in \boldsymbol{R}, -1 \ \leq sinx \leq 1$ et $-1 \ \leq cosx \leq 1$

On peut aussi écrire :

$\forall x \in \boldsymbol{R}$, $|sinx| \leq 1$ et $\forall x \in \boldsymbol{R}$, $|cosx| \leq 1$

Remarque :

Les fonctions, tangente et cotangente ne sont pas bornées sur **R.**

1.4 Fonction paire – Impaire – Périodique

Une fonction f définie de I dans **R** est dite :

- Paire : si $\forall x \in I$; alors -$x \in I$ et $f(-x) \ = \ f(x)$

Exemple : $f(x) = \frac{cosx}{1+x^2}$

En effet, D_f = $\mathbf{R}$; si $x \in \boldsymbol{R}$ alors $-x \in \boldsymbol{R}$

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{cosx}{1+x^2} = f(x)$$

- Impaire : si $\forall x \in I$; alors -$x \in I$ et $f(-x) \ = \ -f(x)$

Exemple : $f(x) = \frac{sinx}{x^2}$

En effet :

$$Df = \mathbf{R} \ - \ \{0\}$$

si $x \in \mathbf{R} \ - \ \{0\}$, alors $-x \in \mathbf{R} \ - \ \{0\}$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2} = \frac{-sinx}{x^2} = -f(x)$$

- Périodique : si $\exists \ T \neq 0$: $\forall x \in I$ alors $x + T \in I$ et $f(x+T) \ = \ f(x)$

Le nombre T est appelé période de la fonction f.

Exemples : Soient les fonctions suivantes :

$f(x) = sinx$; $f(x) = cosx$; $f(x) = tgx$ et $f(x) = cotgx$

Ces fonctions sont périodiques, de période respective $2\pi; 2\pi;\ \pi;\ \pi$.

Remarque :

Si T est une période pour f, tous les nombres de la forme kT $(k \in \boldsymbol{Z} - \{0\})$ sont également des périodes pour f.

Exemple : $f(x) = sinx$

On a : $T_1 = 2\pi$ est une période pour f . On peut considérer $T_2 = 4\pi$, aussi comme période pour f.

1.5 Composée de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions définies par :

f : $I \rightarrow I'$ et g : $I' \rightarrow R$.

On définit la composée de f par g, la fonction notée gof et qui est définie par :

$gof \quad I \ \rightarrow R$:

$$x \ \rightarrow \ gof\ (x) \ = \ g(f(x))$$

Remarques:

1) En général $fog \neq \ gof$
2) $fo(goh) = \ (fog)oh$

Exemples d'application:

Exemple1 :

1) $f(x) = x + 1$; 2) $g(x) = x^2$; 3) $h(x) = sinx$

Calculer :

1) $fog(x)$ et $gof(x)$

2) $fo(goh)(x)$ et $(fog)o\big(h(x)\big)$

Réponse:

1) $fog(x) = f(x^2) = x^2 + 1$
   $gof(x) = g(x+1) = (x+1)^2$
   Nous remarquons que : $fog(x) \neq \ gof(x)$

2) $fo(goh) = fo\left(g\big(h(x)\big)\right) = fo(g(sinx))) = fo(sinx)^2 = ((sinx)^2 + 1)$

$(fog)\big(h(x)\big) = (fog)(sinx) = ((sinx)^2 + 1)$

Nous remarquons que : $fo(goh)(x) = \ (fog)o\big(h(x)\big)$

Exemple2 :

1) $f(x) = cosx$; 2) $g(x) = x^2 + 1$; 3) $h(x) = 2x + 1$

Calculer :

1) $fog(x)$ et $gof(x)$

2) $fo(goh)(x)$ et $(fog)o\big(h(x)\big)$

Réponse:

1) $fog(x)$ et $gof(x)$?

$$fog(x) = f(x^2 + 1) = \cos(x^2 + 1)$$

$$gof(x) = g(cosx) = cos^2x + 1$$

On remarque bien que $fog(x) \neq \ gof(x)$

2) $fo(goh)(x)$ et $(fog)o\big(h(x)\big)$?

$$fo(goh)(x) = f\big(g(2x+1)\big) = f((2x+1)^2 + 1) = \cos((2x+1)^2 + 1)$$

$$(fog)o\big(h(x)\big) = (\cos(x^2 + 1)o\big(h(x)\big) = \cos((2x+1)^2 + 1)$$

On remarque que $fo(goh)(x) = \ (fog)o\big(h(x)\big)$

Exemple3 :

1) $f(x) = x + 1$; 2) $g(x) = \frac{1}{x+1}$; 3) $h(x) = x^2$

Calculer :

1) $fog(x)\ et\ gof(x)$

2) $fo(goh)(x)\ et\ (fog)o\big(h(x)\big)$

Comparer les résultats trouvés

A faire comme exercice.