Partie II: Mécanique des fluides

1. Hydrostatique.

2. Hydrodynamique.

2. Hydrodynamique

Hydrodynamique ?

Etude des fluides en mouvement

Débit

- **Débit:** L'écoulement d'une quantité de fluide dans une section S pendant le temps Δt

- **Débit:** L'écoulement d'une quantité de fluide dans une section S pendant le temps Δt

  - **Débit massique :** est la masse Δm du liquide qui traverse une section S par unité de temps Δt.

$$\boxed{D_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}} \qquad \textbf{(1)}$$

Unité :

- D_m en $\mathbf{kg.s^{-1}}$

- **Débit:** L'écoulement d'une quantité de fluide dans une section S pendant le temps Δt

- **Débit massique :** est la masse Δm du liquide qui traverse une section S par unité de temps Δt.

$$\boxed{D_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}} \qquad \textbf{(1)}$$

Unité :
- D_m en $\mathbf{kg.s^{-1}}$

- **Débit volumique :** est le volume ΔV du liquide qui traverse une section S par unité de temps Δt .

$$\boxed{D_V = \frac{\Delta V}{\Delta t}} \qquad \textbf{(2)}$$

Unité :
- D_V en $\mathbf{m^3.s^{-1}}$

- **Débit:** L'écoulement d'une quantité de fluide dans une section S pendant le temps Δt

- **Débit massique :** est la masse Δm du liquide qui traverse une section S par unité de temps Δt.

$$\boxed{D_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}} \qquad \textbf{(1)}$$

Unité :
- D_m en $\mathbf{kg.s^{-1}}$

- **Débit volumique :** est le volume ΔV du liquide qui traverse une section S par unité de temps Δt .

$$\boxed{D_V = \frac{\Delta V}{\Delta t}} \qquad \textbf{(2)}$$

Unité :
- D_V en $\mathbf{m^3.s^{-1}}$

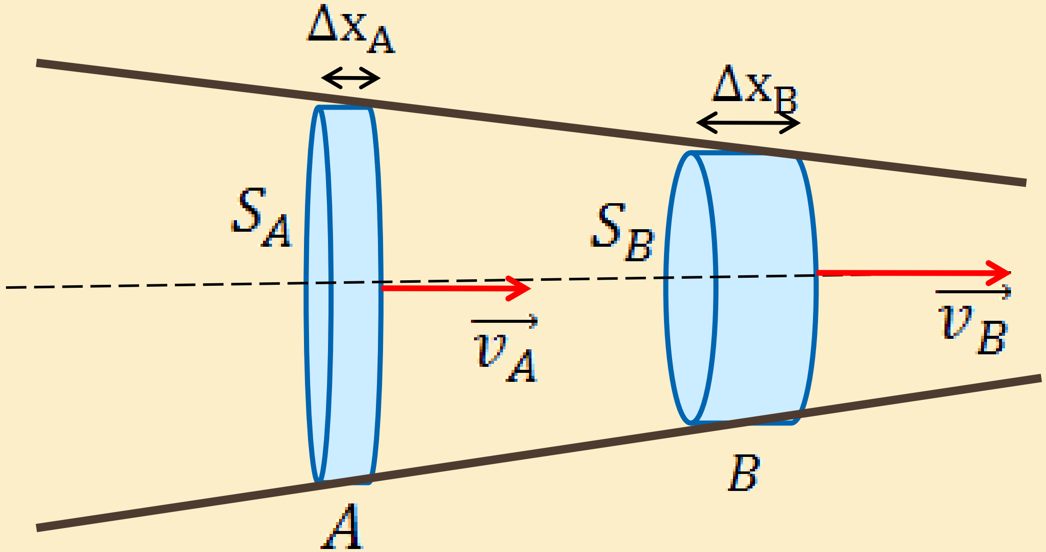
- Si $S = C^{te}$: le liquide se déplace une distance Δx pendant un temps Δt

Le volume sortant: $\Delta V = S.\Delta x$ Avec: $\Delta x = v.\Delta t$

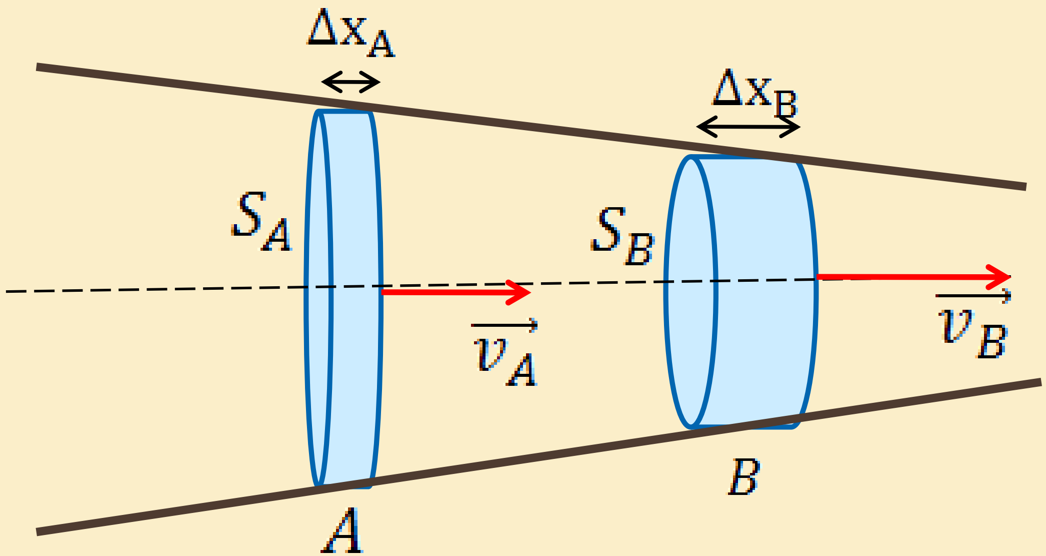
On obtient: $\boxed{\Delta V = S.v.\Delta t}$ **(3)**

(2) et **(3)** $\longrightarrow$ $\boxed{D_V = S.v}$ **(*)**

L'équation de continuité



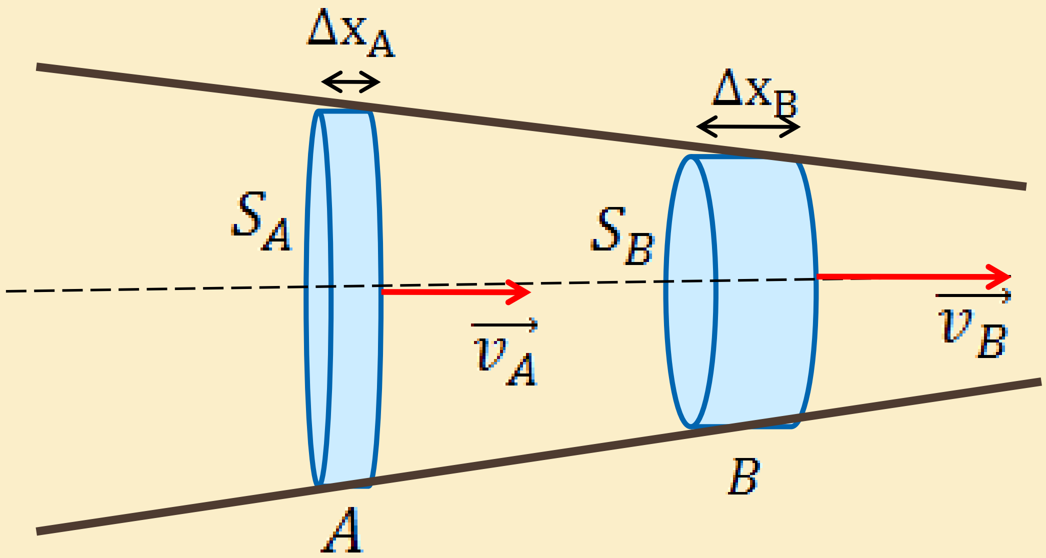
Soit un fluide parfait qui coule horizontalement dans un tuyau cylindrique de section variable S_A et S_B .



Soit un fluide parfait qui coule horizontalement dans un tuyau cylindrique de section variable S_A et S_B .

- Pour une surface fermée: $D_{m_A} = D_{m_B}$

$$\longrightarrow \frac{\Delta m_A}{\Delta t_A} = \frac{\Delta m_B}{\Delta t_B}$$



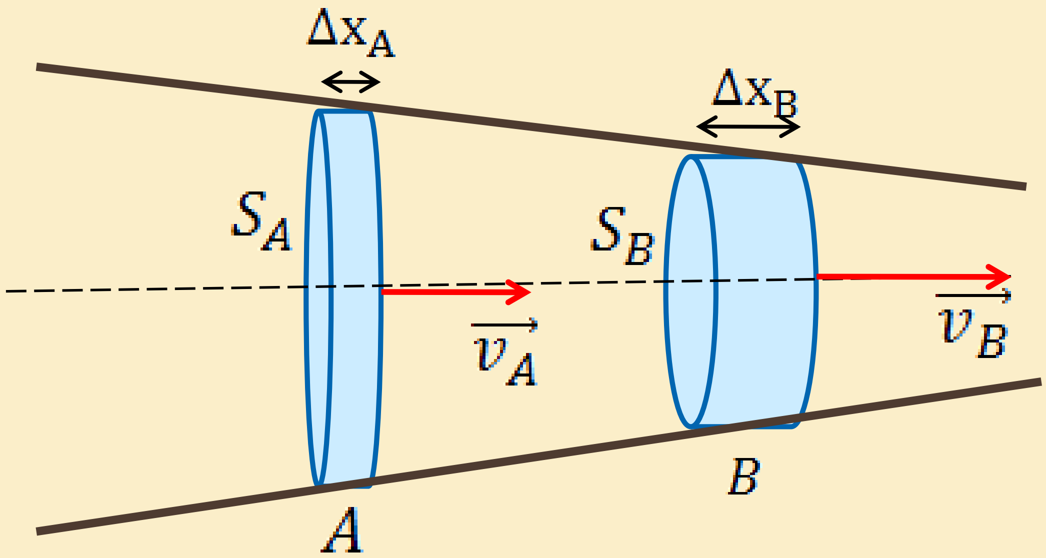
Soit un fluide parfait qui coule horizontalement dans un tuyau cylindrique de section variable S_A et S_B .

- Pour une surface fermée: $D_{m_A} = D_{m_B}$

$$\longrightarrow \frac{\Delta m_A}{\Delta t_A} = \frac{\Delta m_B}{\Delta t_B}$$

Sachant que $\Delta m = \rho . \Delta V$

$$\longrightarrow \frac{\rho . \Delta V_A}{\Delta t_A} = \frac{\rho . \Delta V_B}{\Delta t_B}$$



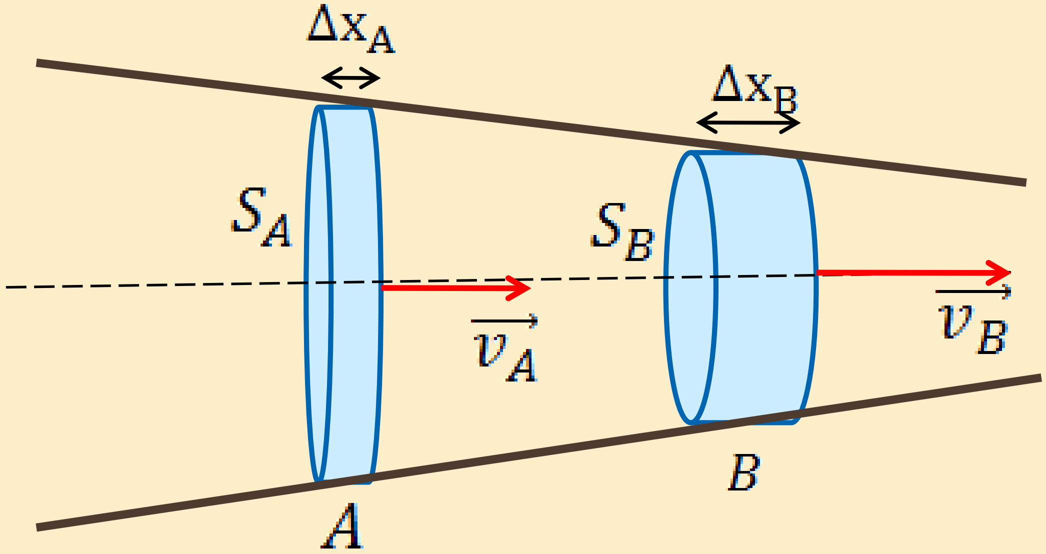
Soit un fluide parfait qui coule horizontalement dans un tuyau cylindrique de section variable S_A et S_B .

- Pour une surface fermée: $D_{m_A} = D_{m_B}$

$$\longrightarrow \frac{\Delta m_A}{\Delta t_A} = \frac{\Delta m_B}{\Delta t_B}$$ Sachant que $\Delta m = \rho . \Delta V$

$$\longrightarrow \frac{\rho . \Delta V_A}{\Delta t_A} = \frac{\rho . \Delta V_B}{\Delta t_B}$$ Avec $\Delta V = S . \Delta x$

$$\longrightarrow \frac{\rho . S_A . \Delta x_A}{\Delta t_A} = \frac{\rho . S_B . \Delta x_B}{\Delta t_B}$$



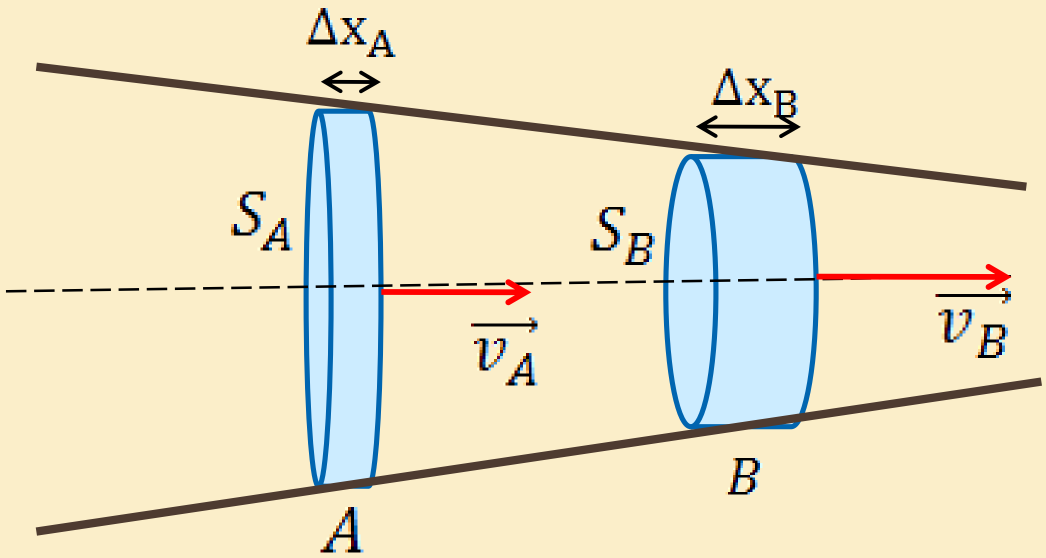
Soit un fluide parfait qui coule horizontalement dans un tuyau cylindrique de section variable S_A et S_B .

- Pour une surface fermée: $D_{m_A} = D_{m_B}$

$$\longrightarrow \frac{\Delta m_A}{\Delta t_A} = \frac{\Delta m_B}{\Delta t_B}$$ Sachant que $\Delta m = \rho.\Delta V$

$$\longrightarrow \frac{\rho.\Delta V_A}{\Delta t_A} = \frac{\rho.\Delta V_B}{\Delta t_B}$$ Avec $\Delta V = S.\Delta x$

$$\longrightarrow \frac{\rho.S_A.\Delta x_A}{\Delta t_A} = \frac{\rho.S_B.\Delta x_B}{\Delta t_B}$$ et $\Delta x = v.\Delta t$



$$\rightarrow \quad \boxed{S_A . \Delta v_A = S_B . \Delta v_B}$$

L’équation de continuité

$$\equiv$$

L’équation de conservation de Débit massique

L’énergie mécanique d’un fluide

- Un liquide en mouvement possède deux formes d’énergies mécanique

$$\boxed{E_m = E_p + E_c}$$

- Un liquide en mouvement possède deux formes d'énergies mécanique

$$\boxed{E_m = E_P + E_c}$$

- E_P : **Energies Potentiel** comporte deux termes:
  - L'énergie liée à la pression: $E_{P_1} = P$
  - L'énergie liée à l'altitude: $E_{P_2} = \rho . g . z$

- Un liquide en mouvement possède deux formes d'énergies mécanique

$$\boxed{E_m = E_P + E_c}$$

- E_P : **Energies Potentiel** comporte deux termes:
  - L'énergie liée à la pression: $E_{P_1} = P$
  - L'énergie liée à l'altitude: $E_{P_2} = \rho.g.z$
- E_c : **Energies Cinétique**:
  - L'énergie liée à la vitesse: $E_c = \frac{1}{2}\rho.v^2$

- Un liquide en mouvement possède deux formes d'énergies mécanique

$$\boxed{E_m = E_P + E_c}$$

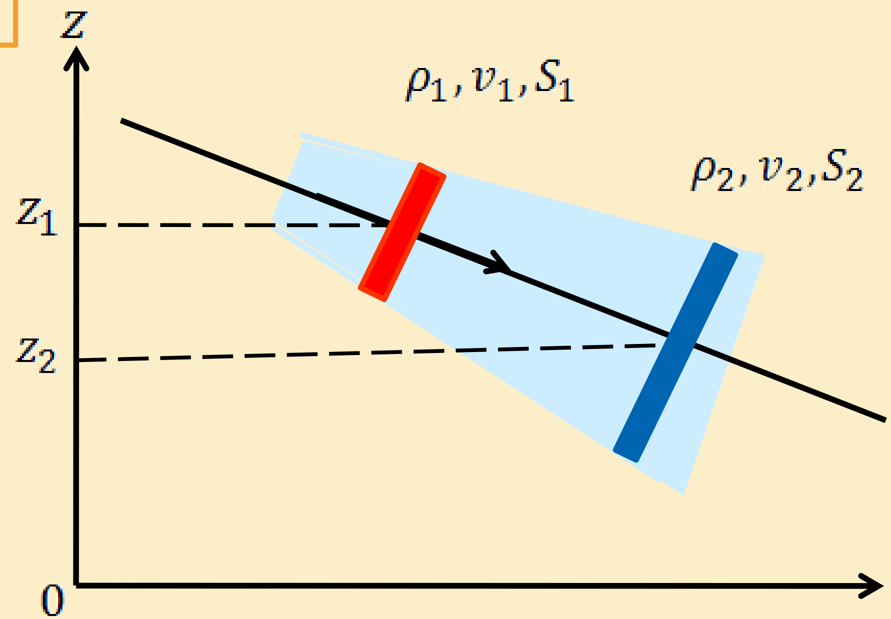
- E_P : **Energies Potentiel** comporte deux termes:
  - L'énergie liée à la pression: $E_{P_1} = P$
  - L'énergie liée à l'altitude: $E_{P_2} = \rho . g . z$
- E_c : **Energies Cinétique**:
  - L'énergie liée à la vitesse: $E_c = \frac{1}{2}\rho . v^2$
- L'énergies mécanique totale du fluide

$$\boxed{E_m = P + \rho . g . z + \frac{1}{2}\rho . v^2}$$

Le théorème de Bernoulli

- Ce théorème exprime simplement que **l'énergie mécanique totale** d'un **fluide parfait** est **constante** dans un circuit dans lequel il circule à **débit constant** au cours du temps

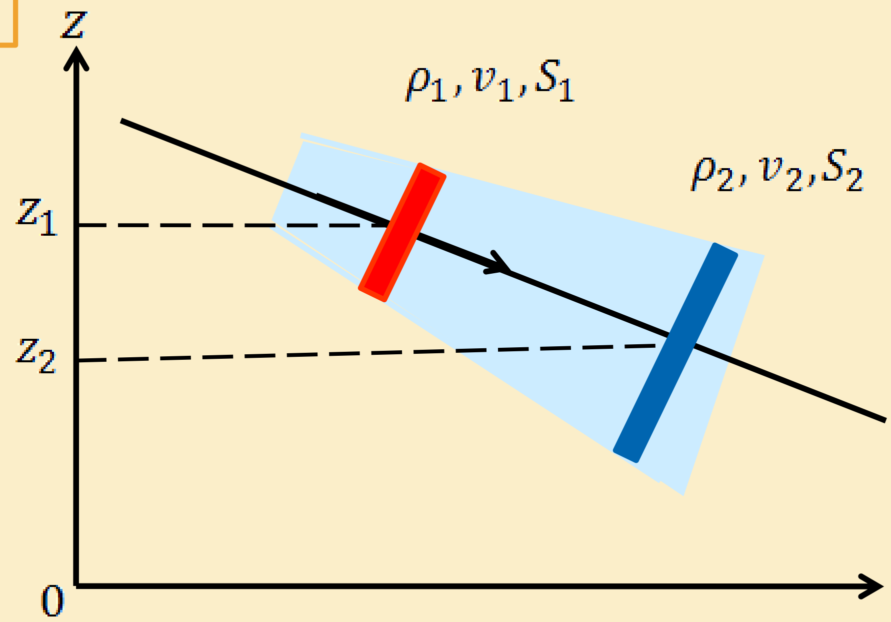
$$E_m = P + \rho.g.z + \frac{1}{2}\rho.v^2 = C^{te}$$



- Ce théorème exprime simplement que **l'énergie mécanique totale** d'un **fluide parfait** est **constante** dans un circuit dans lequel il circule à **débit constant** au cours du temps

$$E_m = P + \rho.g.z + \frac{1}{2}\rho.v^2 = C^{te}$$

- Mais Les différentes formes d'**énergie potentiel** et **cinétique** peuvent **se transformer** les unes dans les autres



$$P_1 + \rho.g.z_1 + \frac{1}{2}\rho.{v_1}^2 = P_2 + \rho.g.z_2 + \frac{1}{2}\rho.{v_2}^2$$

- Les conditions d'application du théorème de Bernoulli

  - Fluide incompressible et densité constante $(\rho = C^{te})$

  - Fluide non visqueux (pas de frottements)

    Pas de perte de charge mais perte de pression

  - Fluide en écoulement stationaire $(v = C^{te})$ et non turbulent

- Les conditions d'application du théorème de Bernoulli

  - Fluide incompressible et densité constante $(\rho = C^{te})$

  - Fluide non visqueux (pas de frottements)

    Pas de perte de charge mais perte de pression

  - Fluide en écoulement stationaire $(v = C^{te})$ et non turbulent

Remarque

✓ Si $v = 0$: le théorème de Bernoulli se réduit à

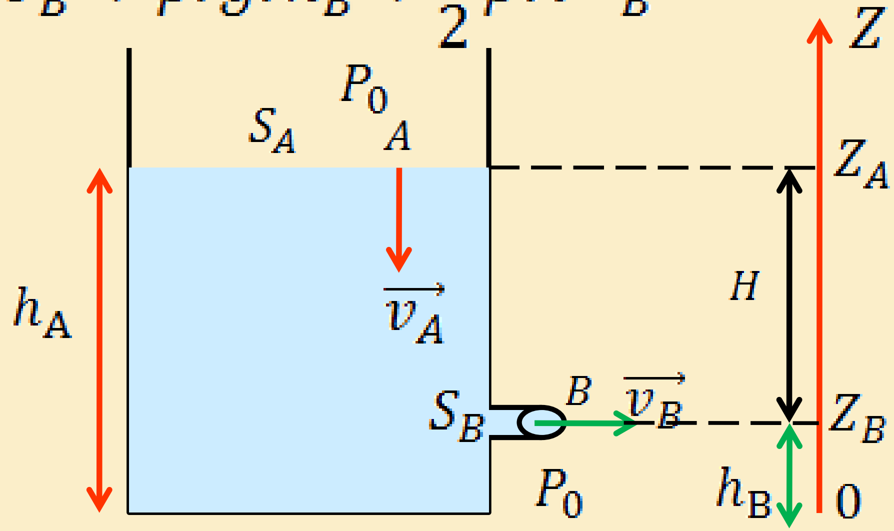
$$\boxed{P + \rho . g . z = C^{te}} \longrightarrow \text{La } \textbf{loi de Pascal}$$

Application
du théorème de Bernoulli

1. Vase de Torricelli

Considérons un réservoir cylindrique rempli d'un liquide dans lequel on perce un orifice. En appliquant le théorème de Bernoulli entre les deux points A et B

$$P_A + \rho . g . h_A + \frac{1}{2}\rho . v^2{}_A = P_B + \rho . g . h_B + \frac{1}{2}\rho . v^2{}_B$$



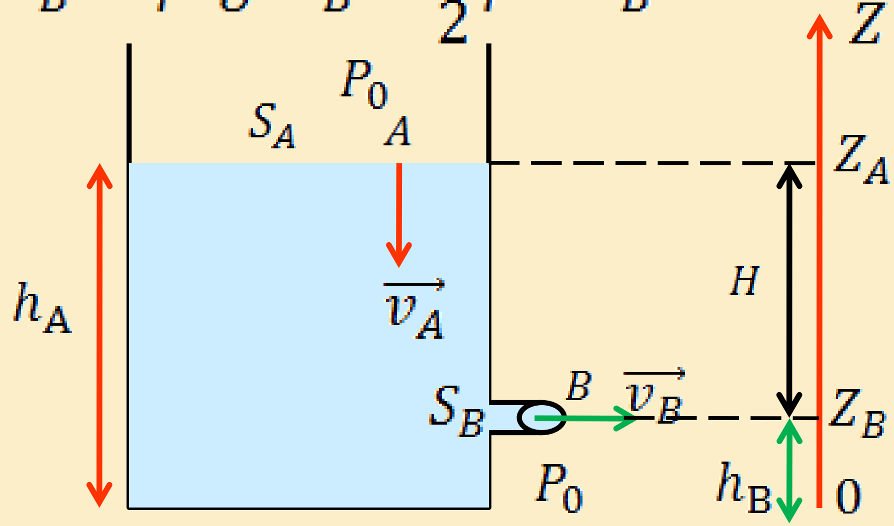
1. Vase de Torricelli

Considérons un réservoir cylindrique rempli d'un liquide dans lequel on perce un orifice. En appliquant le théorème de Bernoulli entre les deux points A et B

$$P_A + \rho.g.h_A + \frac{1}{2}\rho.v^2{}_A = P_B + \rho.g.h_B + \frac{1}{2}\rho.v^2{}_B$$

Comme $P_A = P_B = P_{atm}$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\rho.(v^2{}_B - v^2{}_A) = \rho.g.(h_A - h_B)$$



1. Vase de Torricelli

Considérons un réservoir cylindrique rempli d'un liquide dans lequel on perce un orifice. En appliquant le théorème de Bernoulli entre les deux points A et B

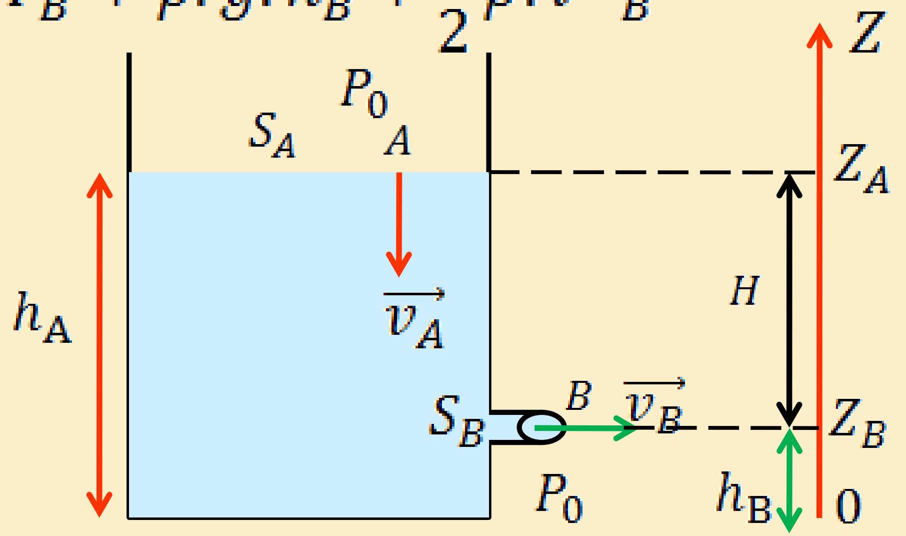
$$P_A + \rho.g.h_A + \frac{1}{2}\rho.v^2{}_A = P_B + \rho.g.h_B + \frac{1}{2}\rho.v^2{}_B$$

Comme $P_A = P_B = P_{atm}$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\rho.(v^2{}_B - v^2{}_A) = \rho.g.(h_A - h_B)$$

Avec $v_A \ll v_B$

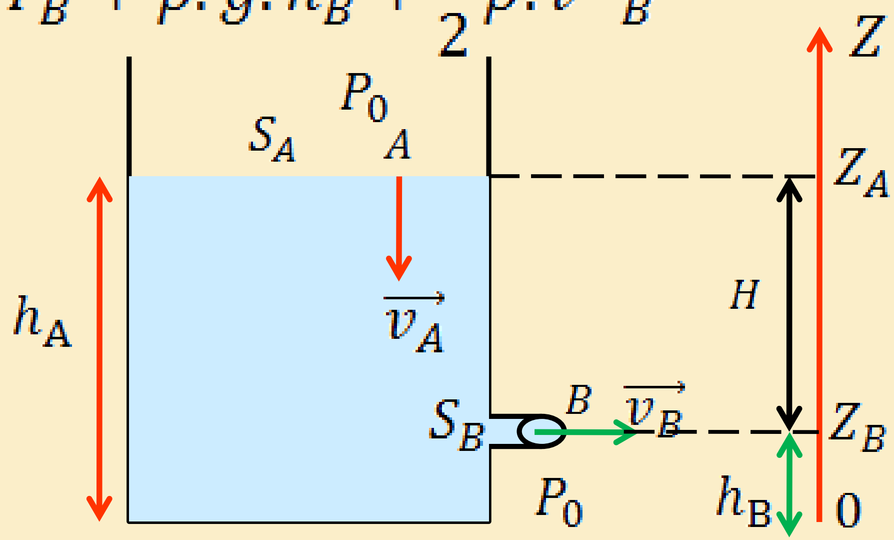
$$\rightarrow \quad v_B = \sqrt{2g.(h_A - h_B)}$$



1. Vase de Torricelli

Considérons un réservoir cylindrique rempli d'un liquide dans lequel on perce un orifice. En appliquant le théorème de Bernoulli entre les deux points A et B

$$P_A + \rho.g.h_A + \frac{1}{2}\rho.v^2{}_A = P_B + \rho.g.h_B + \frac{1}{2}\rho.v^2{}_B$$



Comme $P_A = P_B = P_{atm}$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\rho.(v^2{}_B - v^2{}_A) = \rho.g.(h_A - h_B)$$

Avec $v_A \ll v_B$

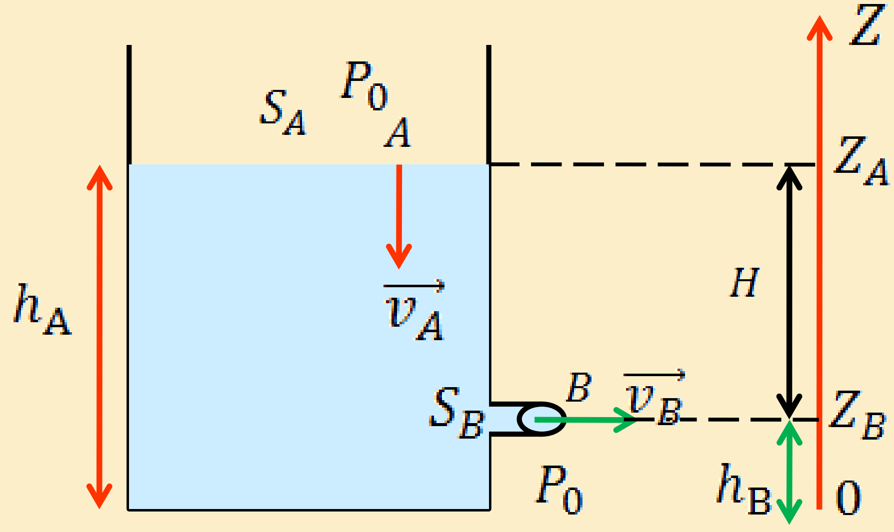
$$\rightarrow \quad v_B = \sqrt{2g.(h_A - h_B)}$$

D'ou $H = h_A - h_B$

$$\rightarrow \quad \boxed{v_B = \sqrt{2g.H}} \quad \textbf{(4)}$$

1. Vase de Torricelli

$$\boxed{v_B = \sqrt{2g.H}} \quad \textbf{(4)}$$

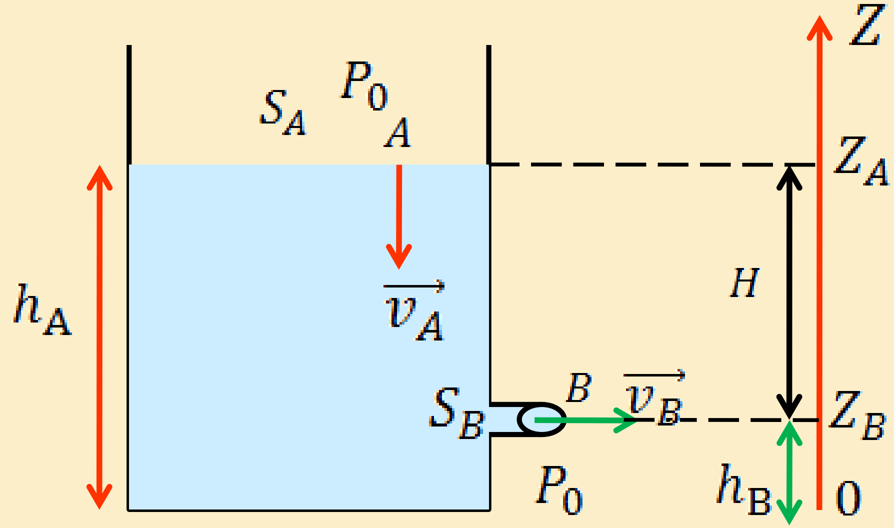


1. Vase de Torricelli

$$\boxed{v_B = \sqrt{2g.H}} \quad \textbf{(4)}$$

D'après **(*)** $D_V = S.v$

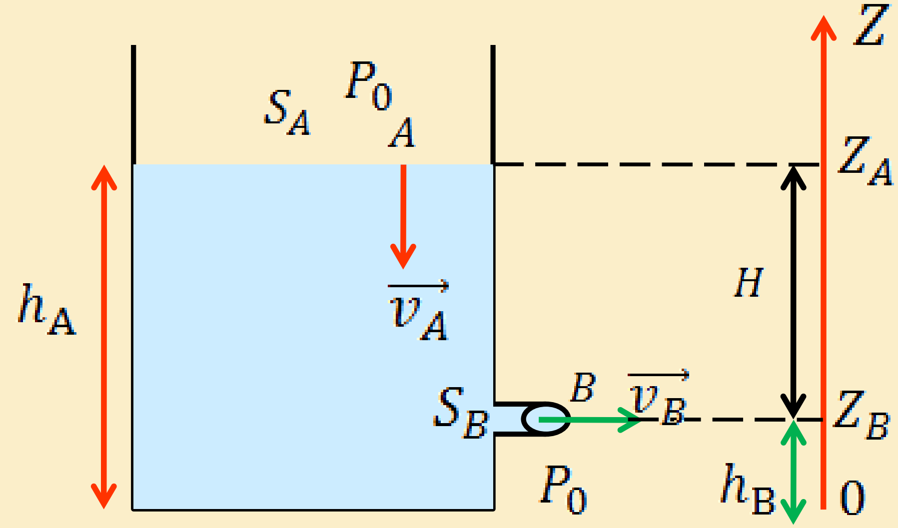
En remplaçant **(4)** dans **(*)**



1. Vase de Torricelli

$$\boxed{v_B = \sqrt{2g.H}} \quad \textbf{(4)}$$

D'après **(*)** $D_V = S.v$



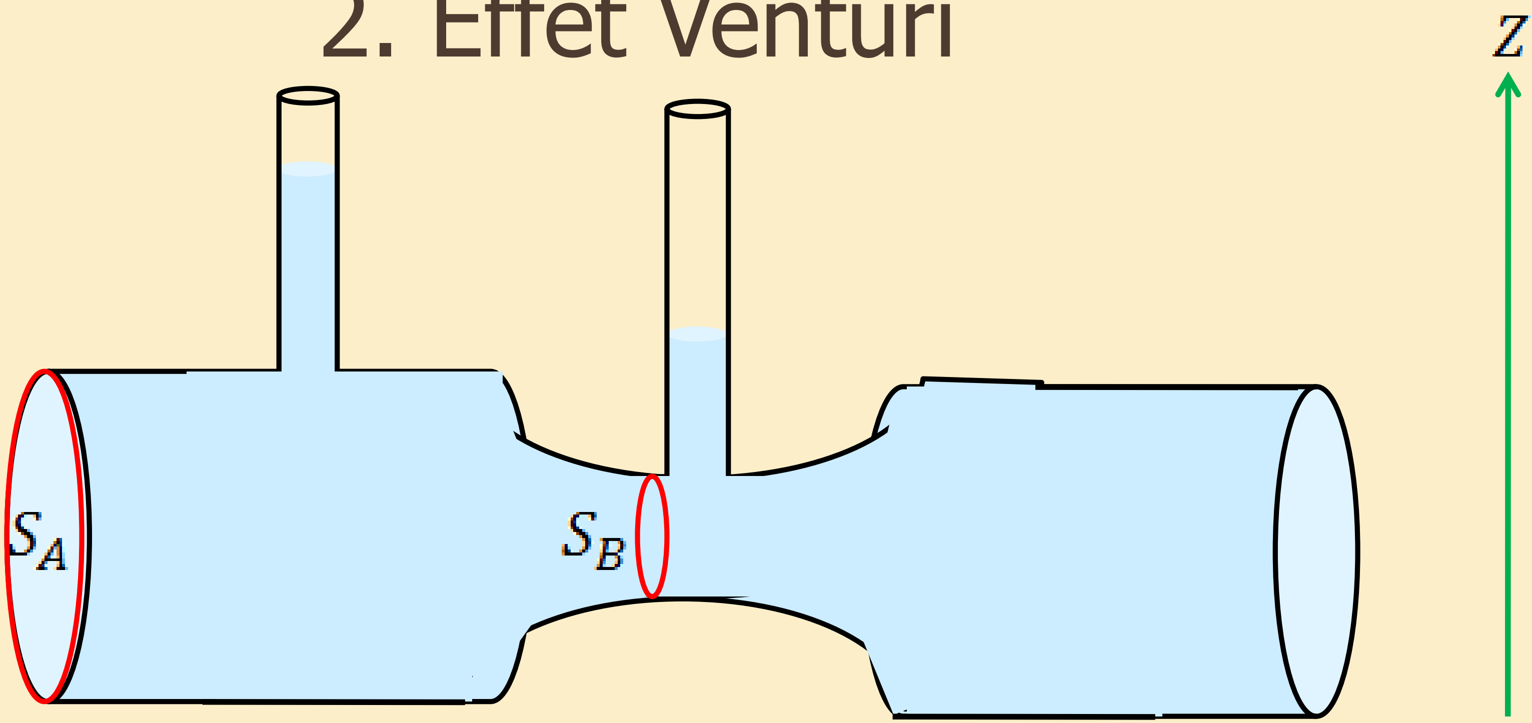
En remplaçant **(4)** dans **(*)**

On obtient

$$\boxed{D_V = S.\sqrt{2g.H}}$$

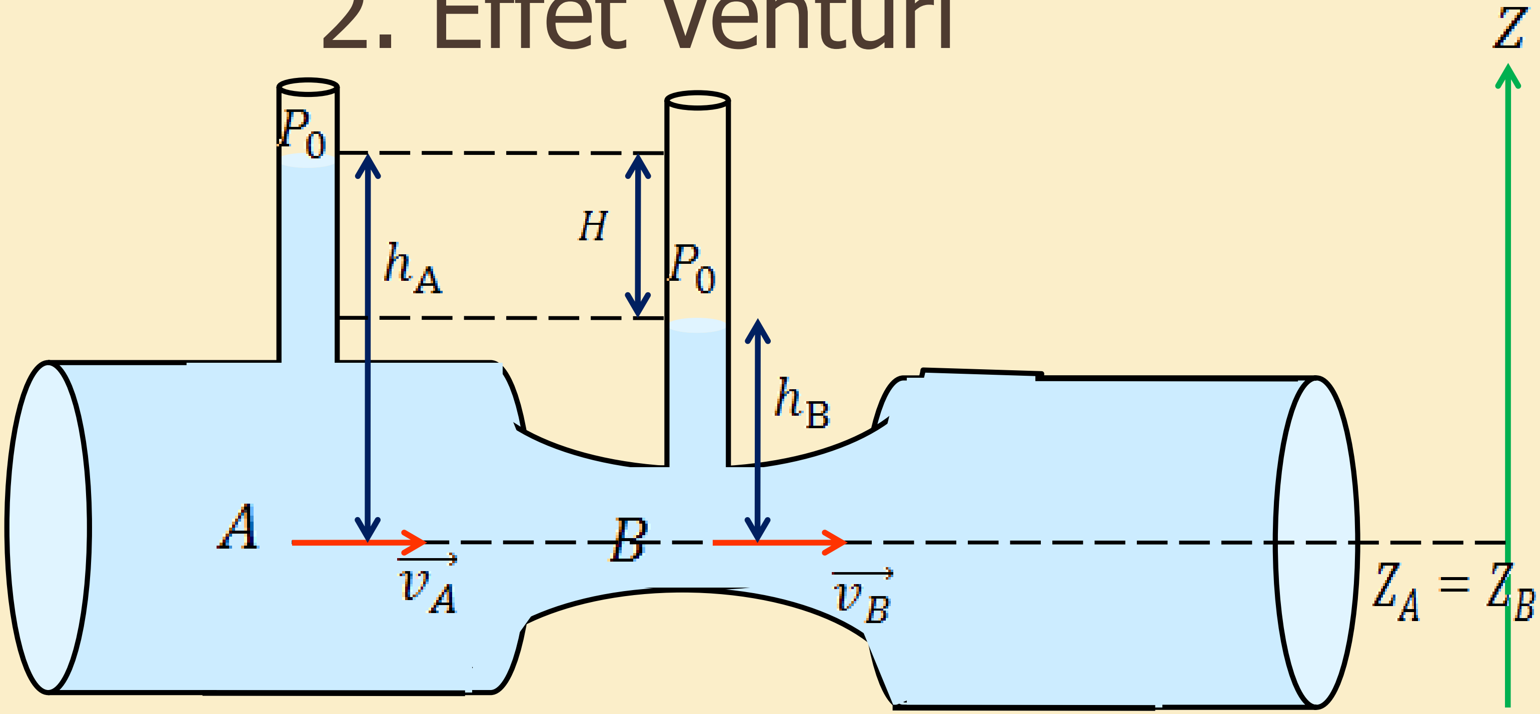
La formule de **Torricelli** relie le **Débit** d'écoulement avec la **hauteur** de liquide

2. Effet Venturi



- Un tube de Venturi est constitué d'un rétrécissement qui sépare deux régions, de sections différentes S_A et S_B ($S_A > S_B$), d'une canalisation horizontale. Des tubes verticaux émergent de ces régions et sont ouverts sur l'air.

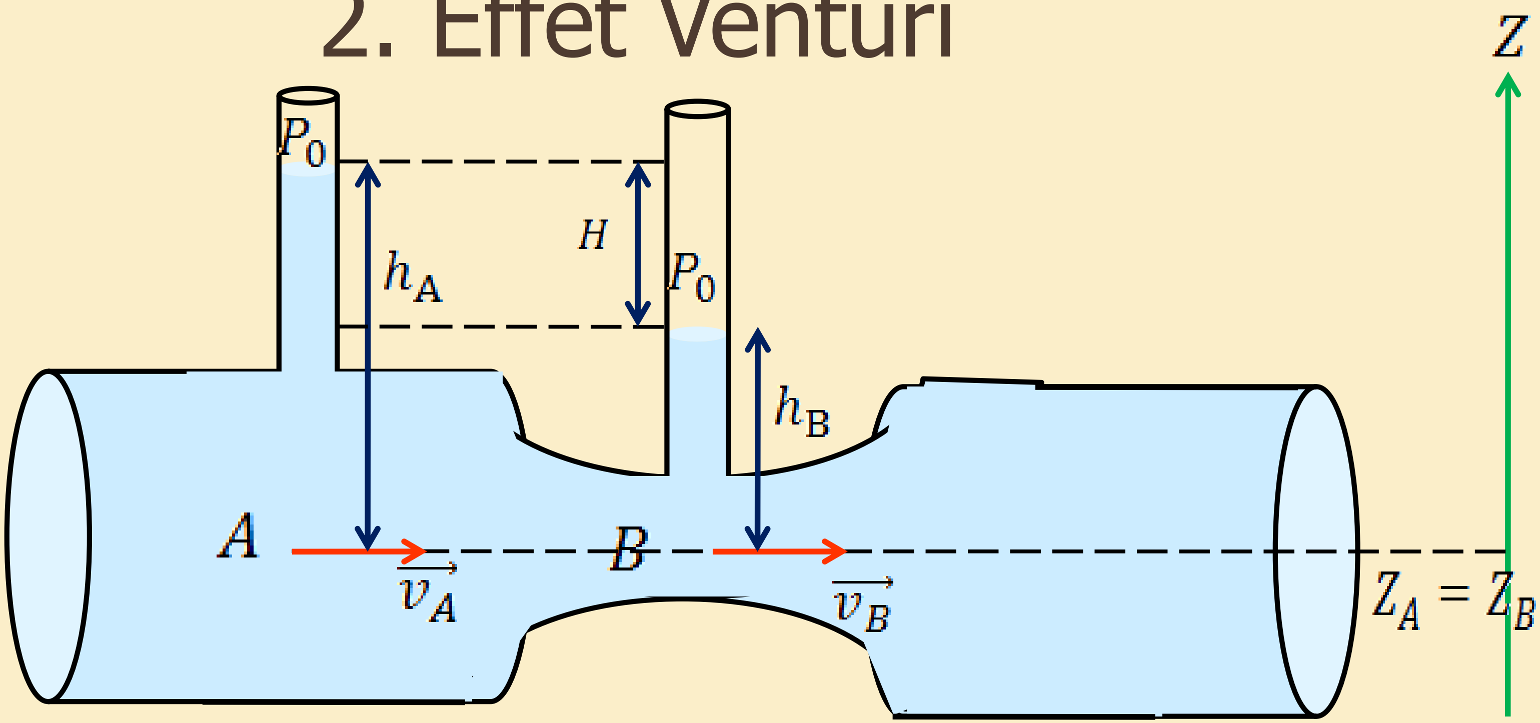
2. Effet Venturi



En appliquant le théorème de Bernoulli entre les deux points A et B

$$P_A + \rho.g.Z_A + \frac{1}{2}\rho.v_A{}^2 = P_B + \rho.g.Z_B + \frac{1}{2}\rho.v_B{}^2$$

2. Effet Venturi



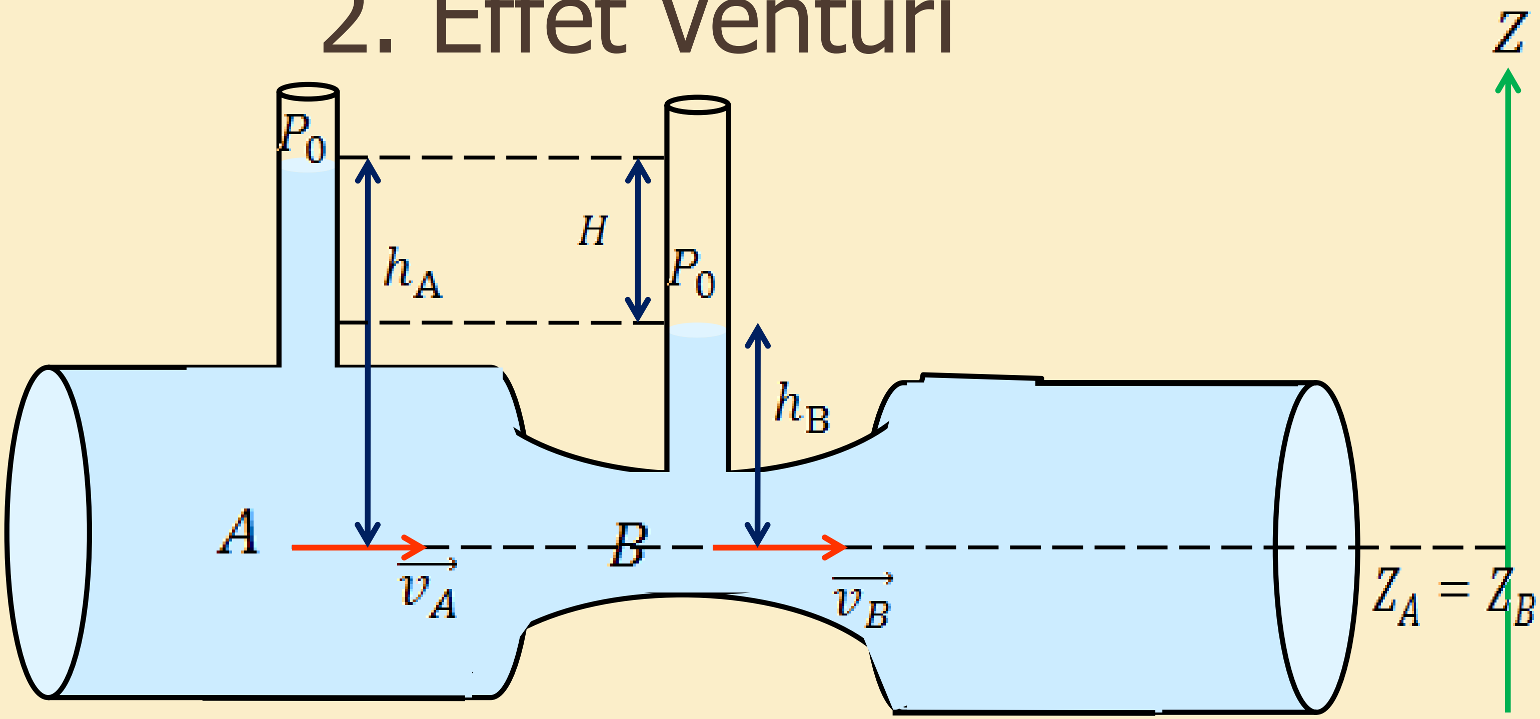
En appliquant le théorème de Bernoulli entre les deux points A et B

$$P_A + \rho . g . Z_A + \frac{1}{2}\rho . v_A{}^2 = P_B + \rho . g . Z_B + \frac{1}{2}\rho . v_B{}^2$$

Les deux points A et B situés sur le même horizontale : $Z_A = Z_B$

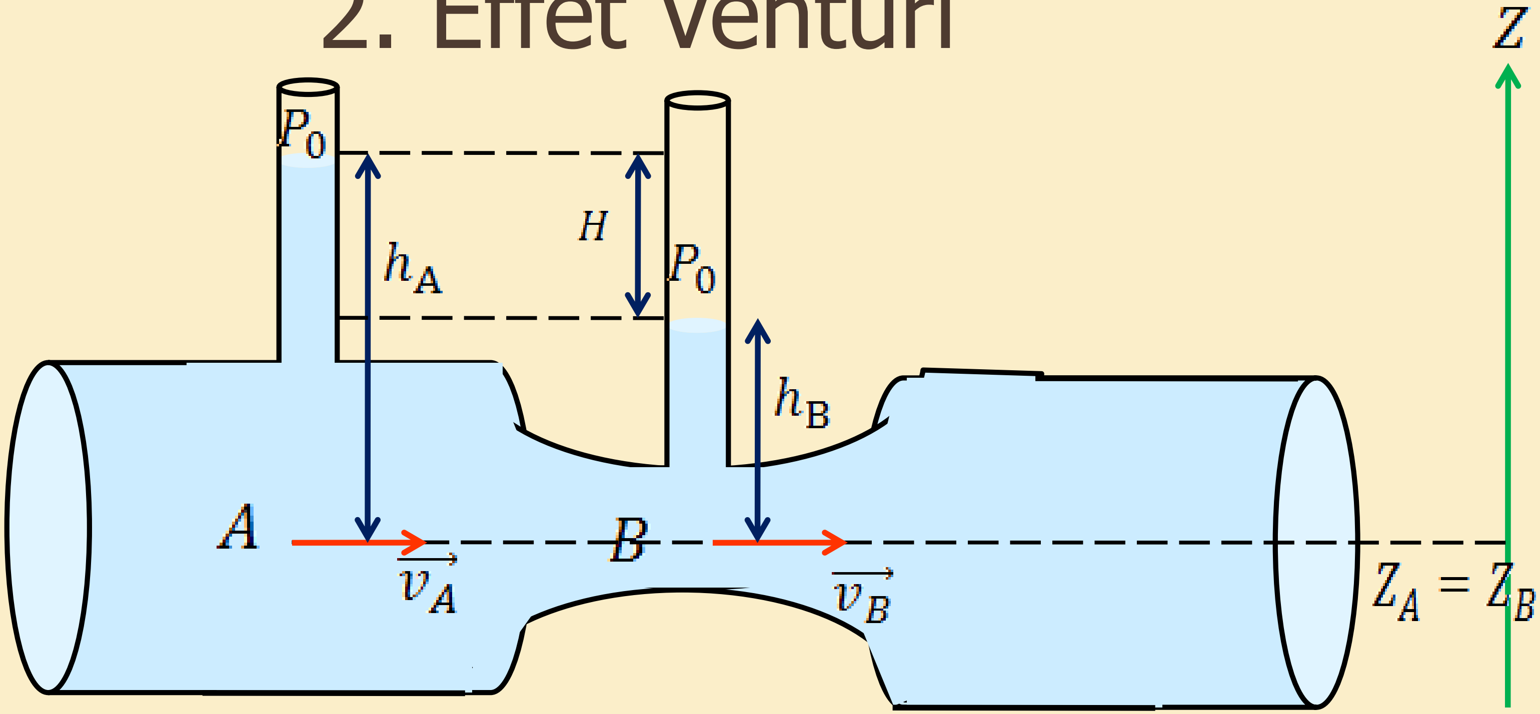
$$\boxed{P_A + \frac{1}{2}\rho . v_A{}^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho . v_B{}^2} \qquad \textbf{(5)}$$

2. Effet Venturi



- $P_A > P_B$: Les régions de faible section, donc de grande vitesse, sont aussi des régions de basse pression (**effet Venturi**).

2. Effet Venturi

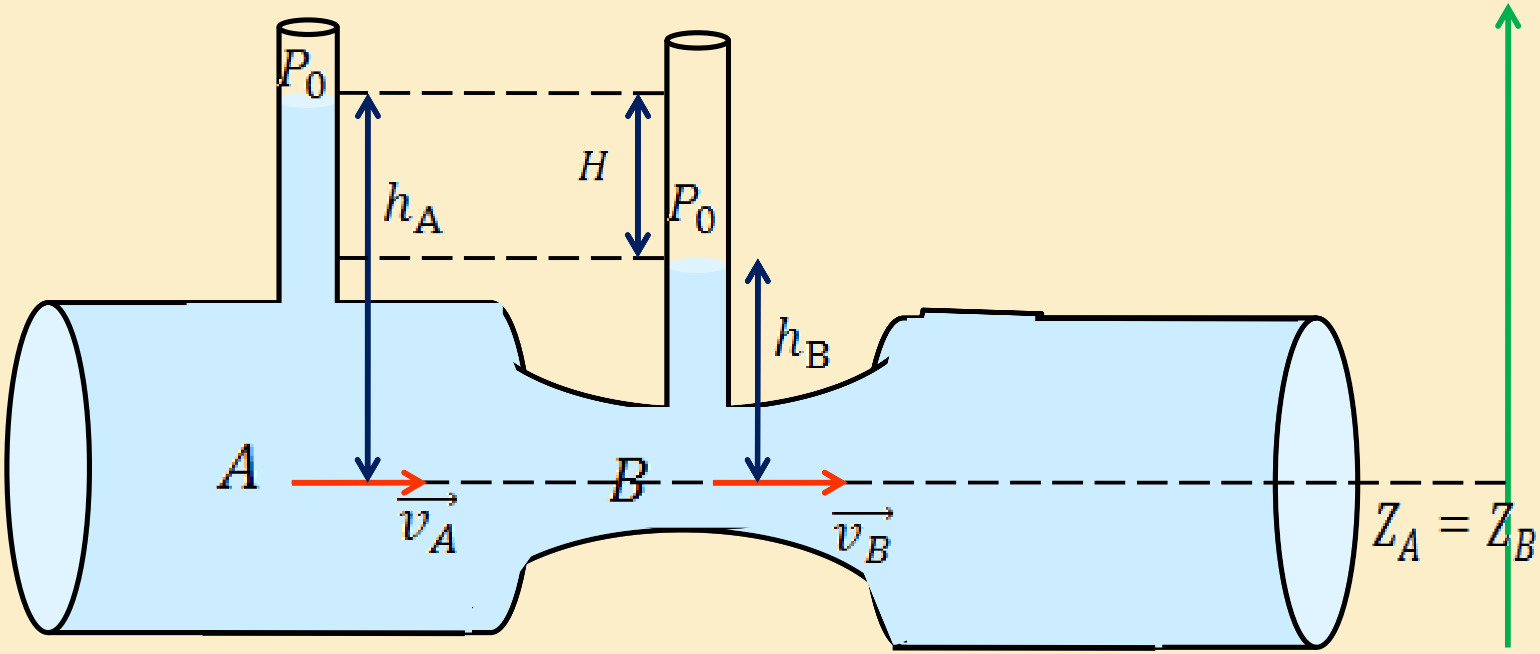


- $P_A > P_B$: Les régions de faible section, donc de grande vitesse, sont aussi des régions de basse pression (**effet Venturi**).

Dans les tubes verticaux, le fluide est immobile, en appliquant la loi de Pascal

- Au points A : $P_A = P_0 + \rho . g . h_A$ **(a)**
- Au points B : $P_B = P_0 + \rho . g . h_B$ **(b)**

2. Effet Venturi



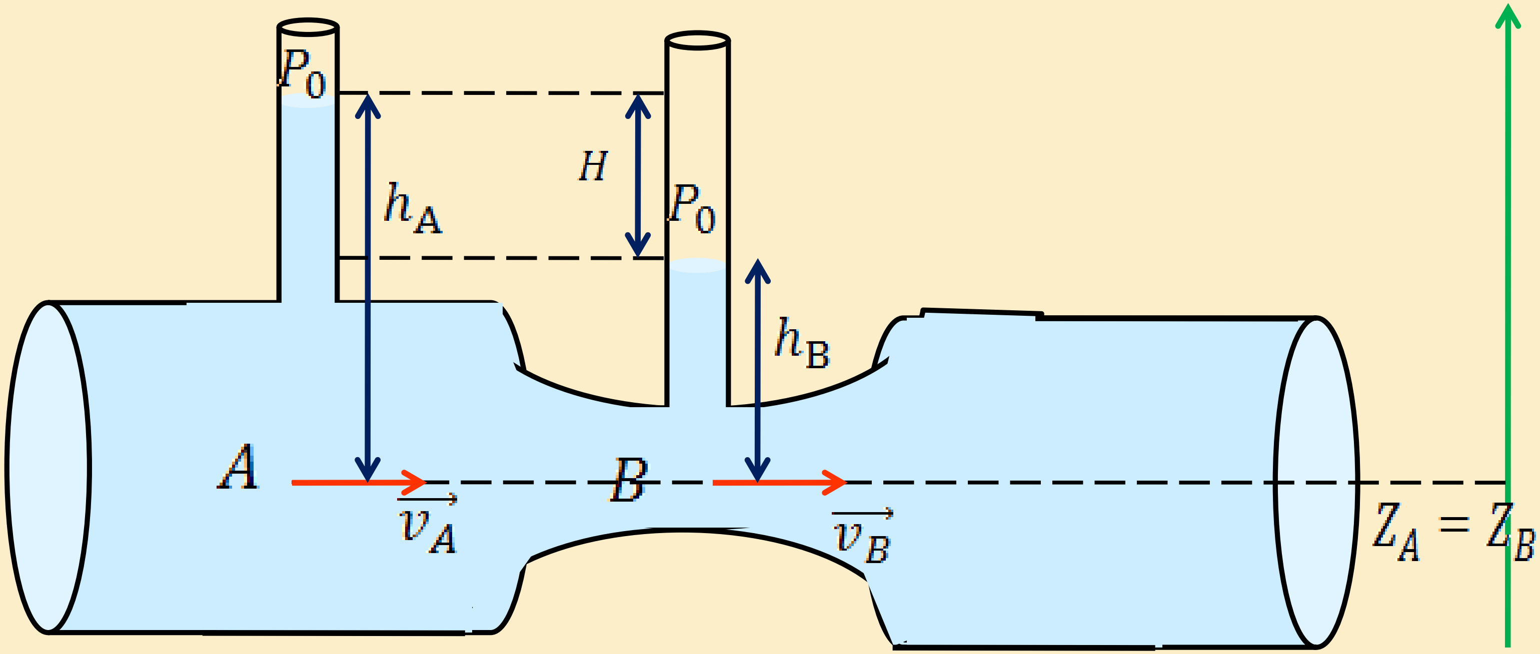
➢ $P_A > P_B$: Les régions de faible section, donc de grande vitesse, sont aussi des régions de basse pression (**effet Venturi**).

Dans les tubes verticaux, le fluide est immobile, en appliquant la loi de Pascal

- Au points A : $P_A = P_0 + \rho.g.h_A$ **(a)**
- Au points B : $P_B = P_0 + \rho.g.h_B$ **(b)**

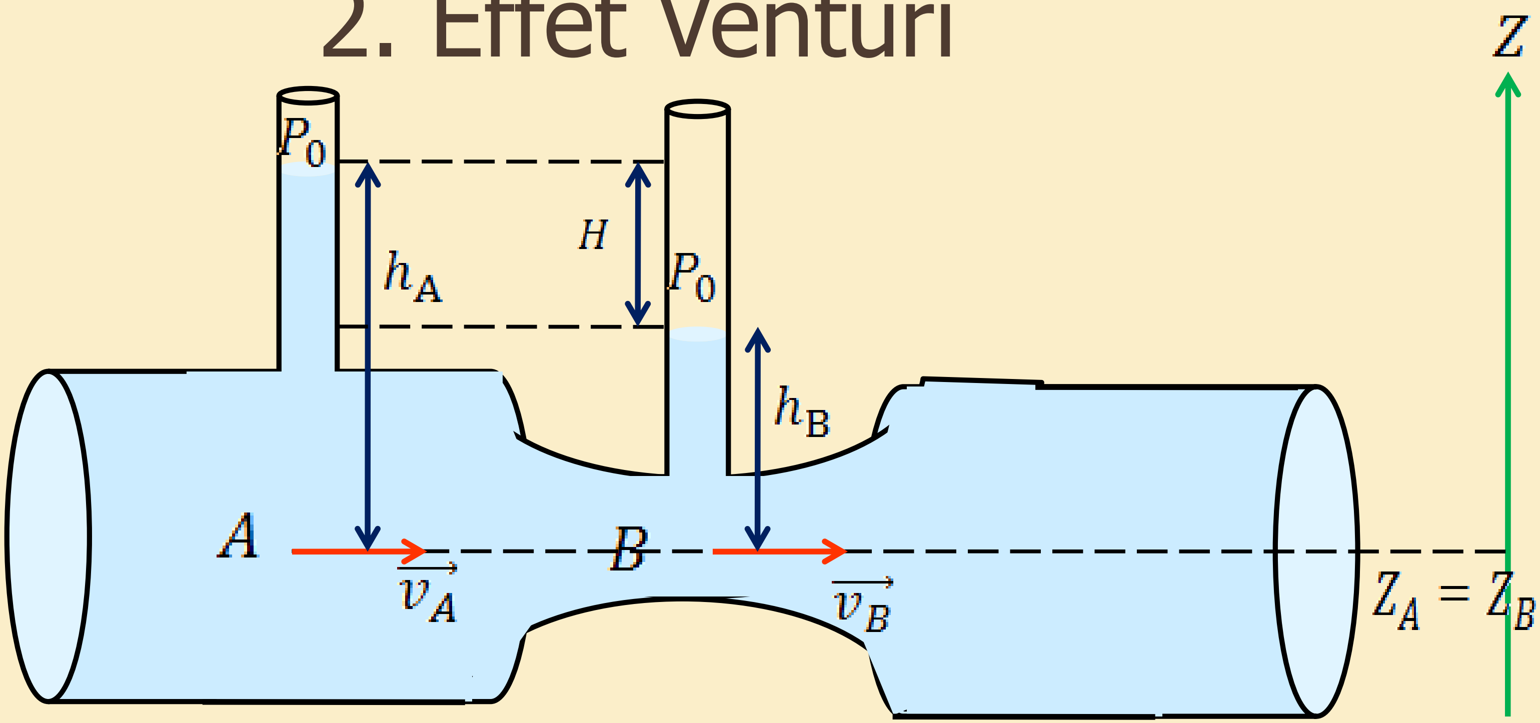
En substituant **(a)** et **(b)** dans **(5)** → $\boxed{\frac{1}{2}\rho.(v_B{}^2 - v_A{}^2) = \rho.g.(h_A - h_B)}$ **(6)**

2. Effet Venturi



Or: $H = h_A - h_B \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}\rho.(v_B{}^2 - v_A{}^2) = \rho.\mathrm{g}.H}$ **(6)'**

2. Effet Venturi

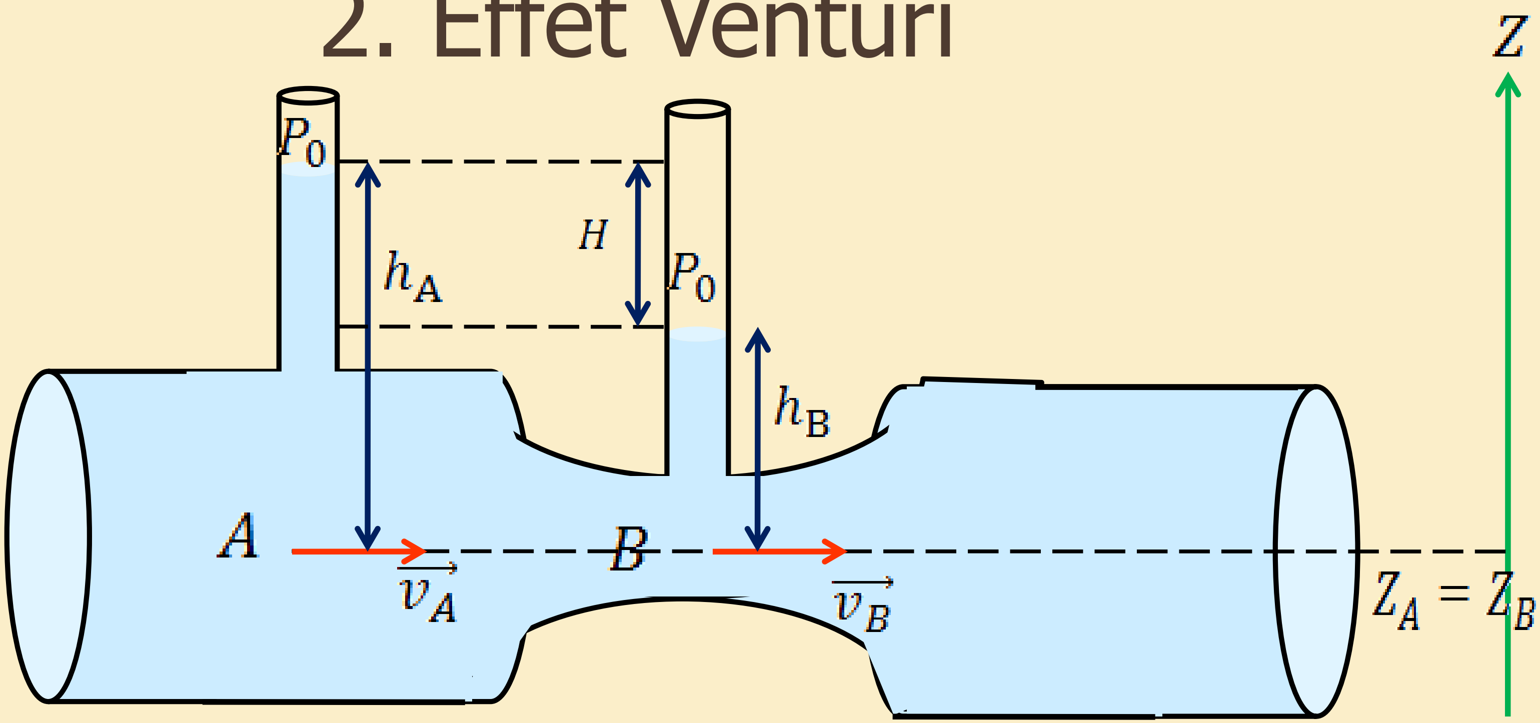


Or: $H = h_A - h_B \longrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2}\rho.({v_B}^2 - {v_A}^2) = \rho.\mathrm{g}.H}$ **(6)'**

En appliquant l'équation de continuité entre les deux points A et B

$S_A.v_A = S_B.v_B \longrightarrow$ $\boxed{v_B = \frac{S_A.v_A}{S_B}}$ **(7)**

2. Effet Venturi



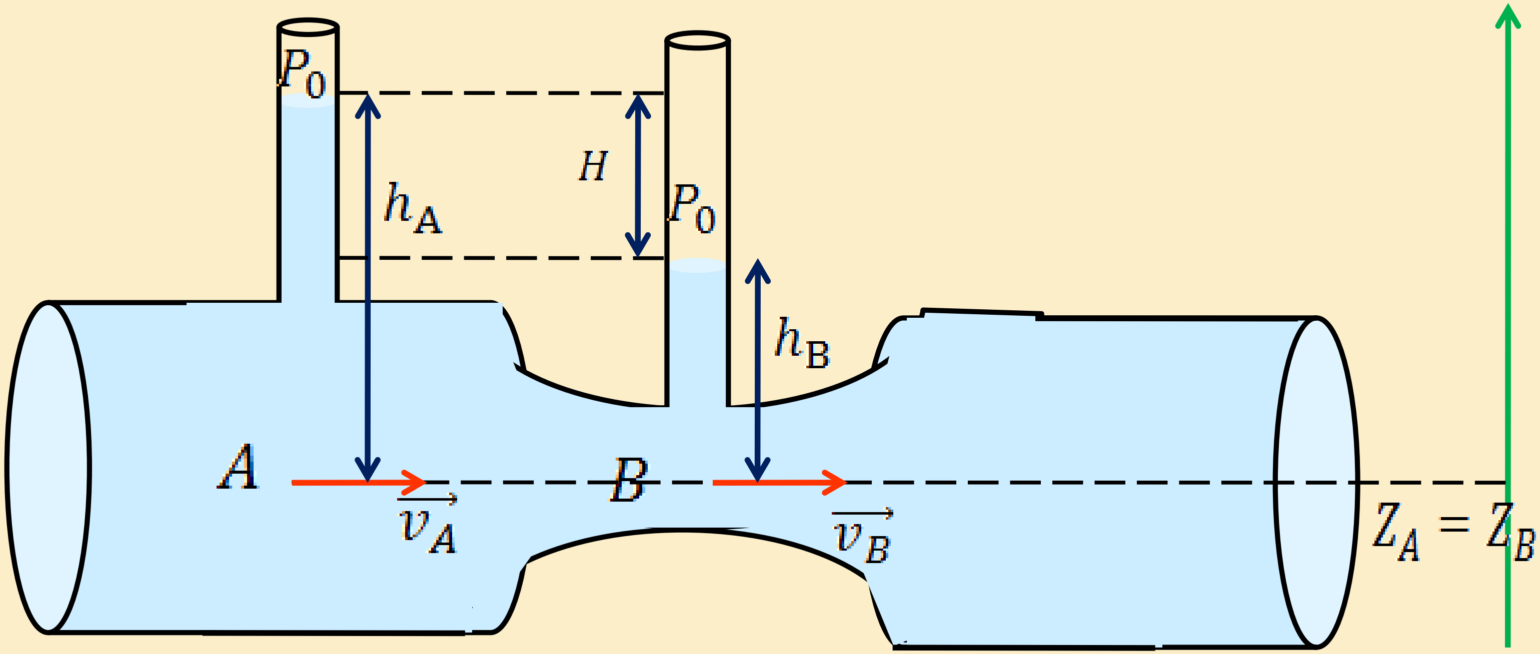
Or: $H = h_A - h_B \longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}\rho.(v_B{}^2 - v_A{}^2) = \rho.g.H}$ **(6)'**

En appliquant l'équation de continuité entre les deux points A et B

$$S_A.v_A = S_B.v_B \longrightarrow \boxed{v_B = \frac{S_A.v_A}{S_B}} \quad \textbf{(7)}$$

En substituant **(7)** dans **(6)'** $\longrightarrow \boxed{v_A = \sqrt{\frac{S_B{}^2}{S_A{}^2 - S_B{}^2} 2g.H}}$

2. Effet Venturi



$$\boxed{v_A = \sqrt{\frac{{S_B}^2}{{S_A}^2 - {S_B}^2} 2g.H}}$$

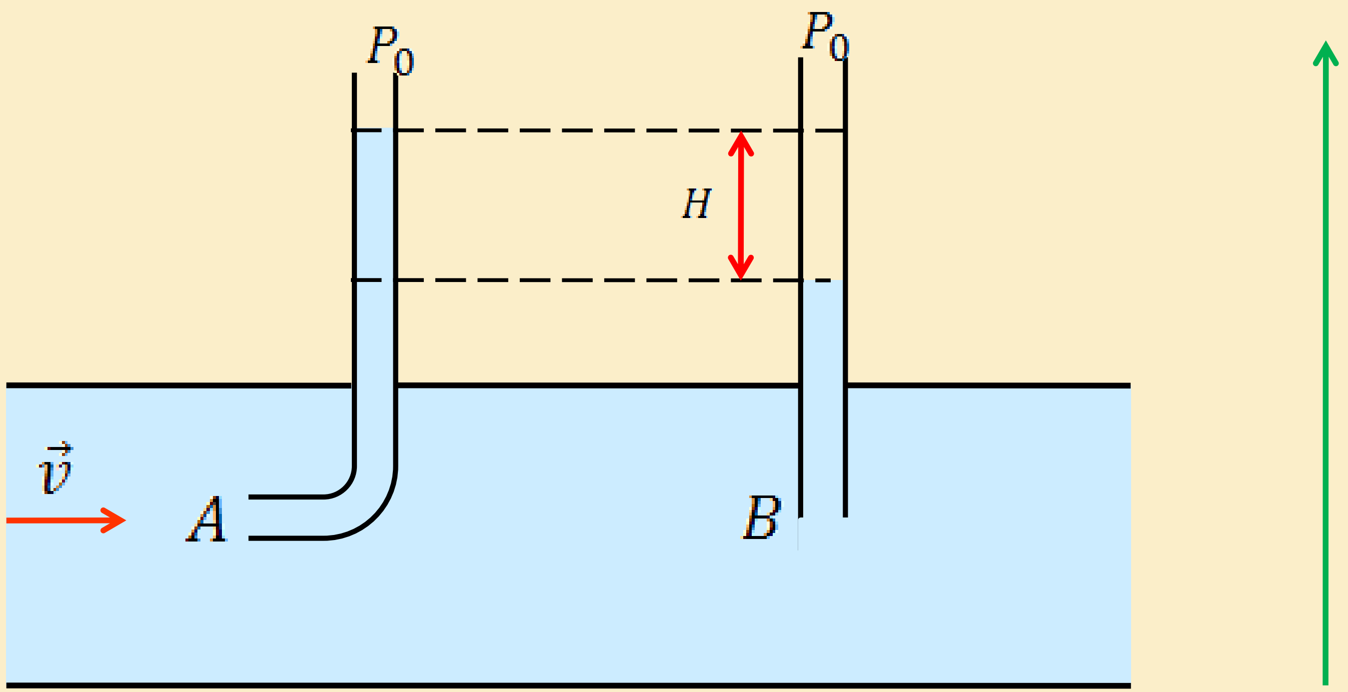
- La vitesse circulatoire v d'un fluide .

3. Tube de Pitot

- On considère une conduite, dans laquelle s'écoule de l'eau à une vitesse $\vec{v}$

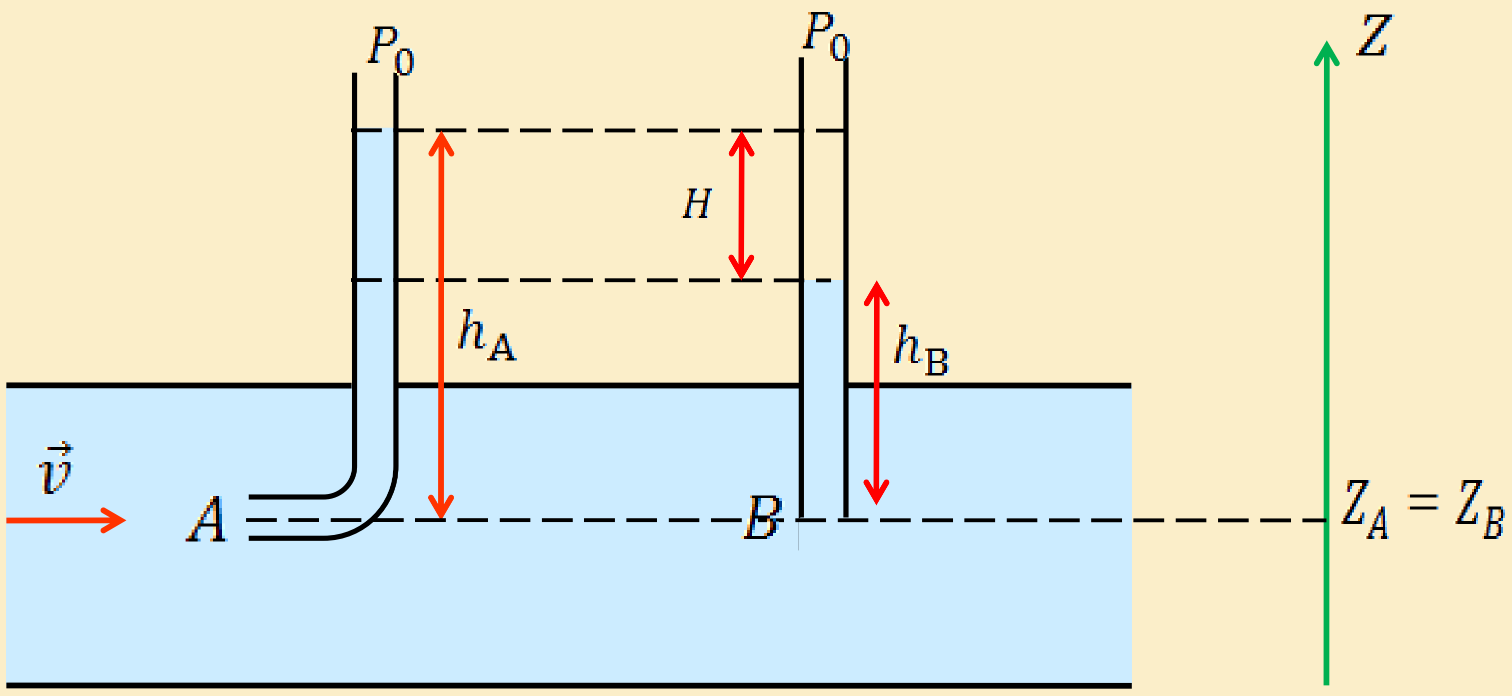
  la canalisation a été équipée de deux tubes plongeant dans le liquide,

  l'un débouchant en A face au courant et l'autre en B est le long des lignes de courant, En mesurant la dénivellation H du liquide dans les deux tubes.



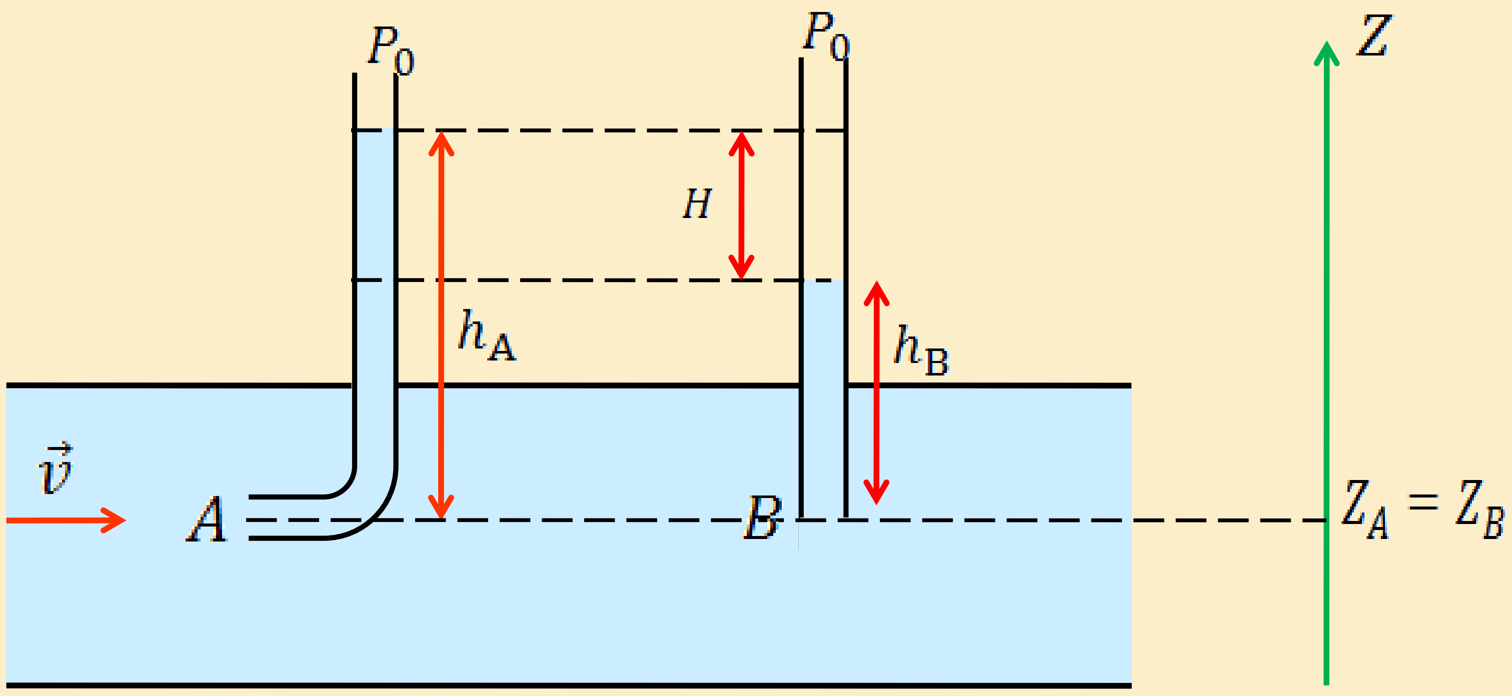
3. Tube de Pitot

- Au point B: $\vec{v}_B = \vec{v}$ (le liquide a la même vitesse $\vec{v}$ que dans la canalisation)



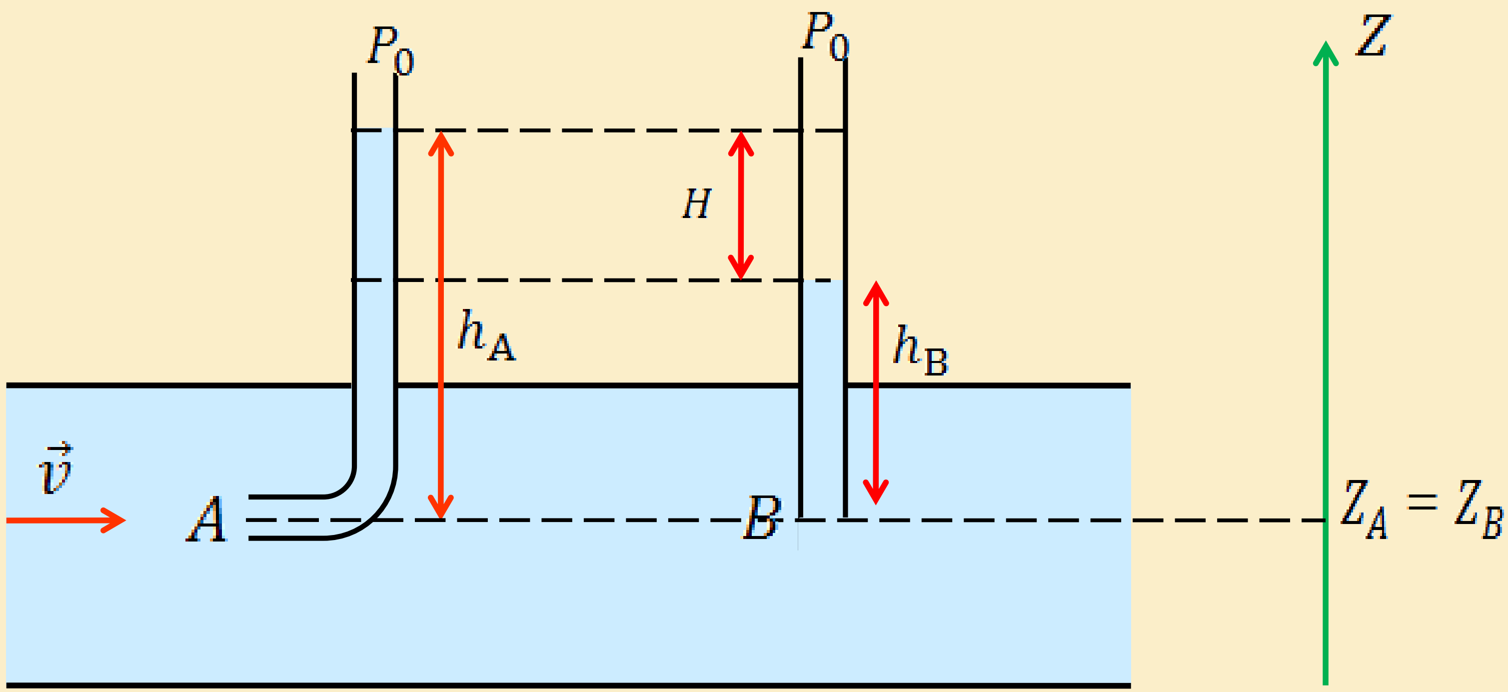
3. Tube de Pitot

- Au point B: $\vec{v}_B = \vec{v}$ (le liquide a la même vitesse $\vec{v}$ que dans la canalisation)
- Au point A (point d'arrêt) : $\vec{v}_A = \vec{0}$ (la vitesse d'écoulement est nulle)



3. Tube de Pitot

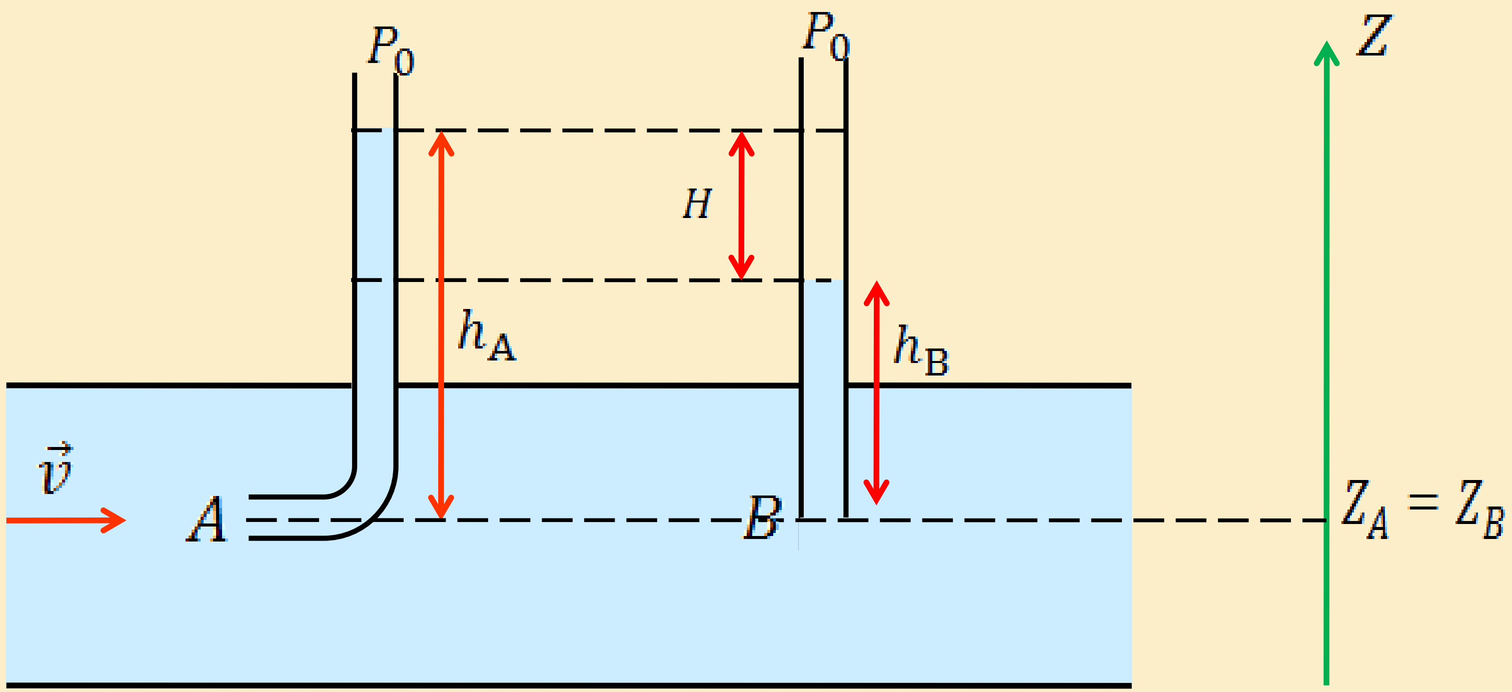
- Au point B: $\vec{v}_B = \vec{v}$ (le liquide a la même vitesse $\vec{v}$ que dans la canalisation)
- Au point A (point d'arrêt) : $\vec{v}_A = \vec{0}$ (la vitesse d'écoulement est nulle).
- $Z_A = Z_B$: A et B se trouvent sur le même horizontale.



3. Tube de Pitot

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les deux points A et B

$$P_A + \rho.g.Z_A + \frac{1}{2}\rho.v_A{}^2 = P_B + \rho.g.Z_B + \frac{1}{2}\rho.v_B{}^2$$

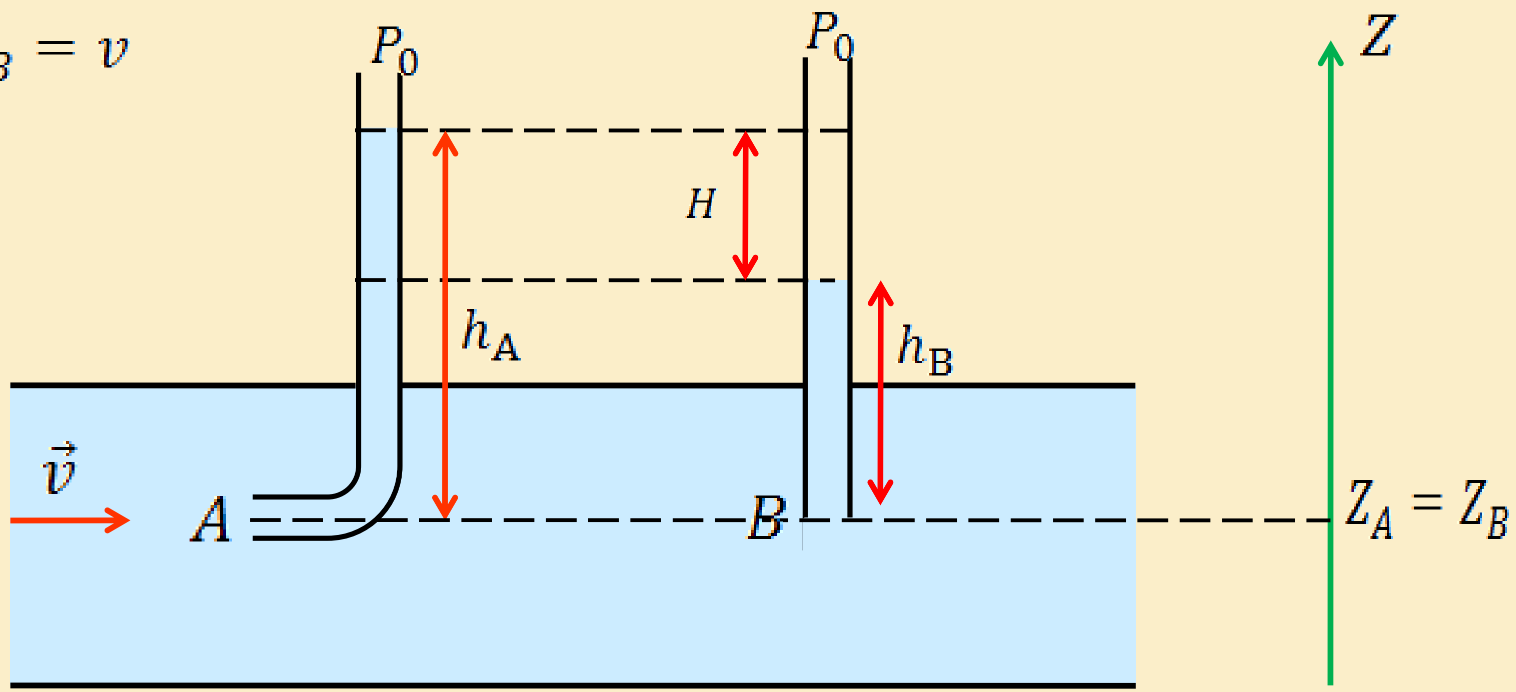


3. Tube de Pitot

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les deux points A et B

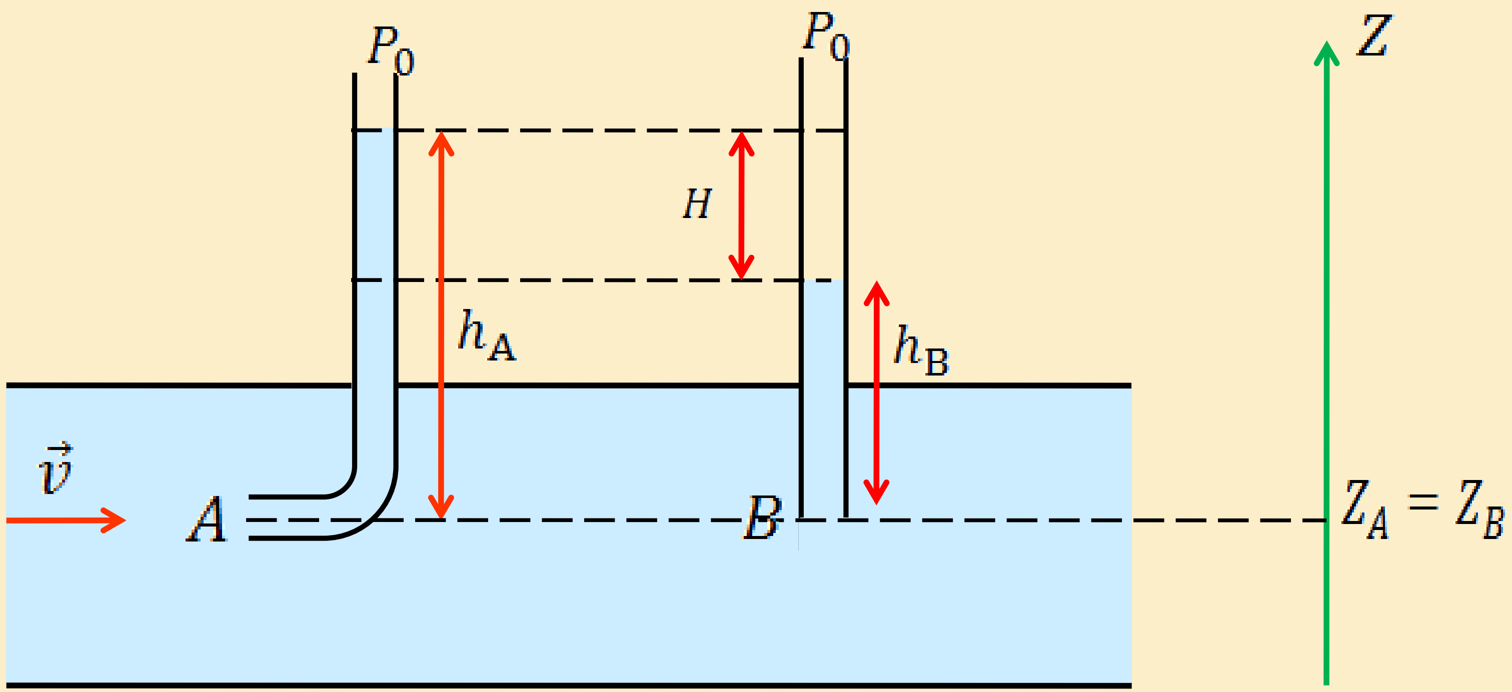
$$P_A + \rho . g . Z_A + \frac{1}{2}\rho . v_A{}^2 = P_B + \rho . g . Z_B + \frac{1}{2}\rho . v_B{}^2$$

Or : $\begin{cases} Z_A = Z_B \\ v_A = 0 \\ v_B = v \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\boxed{P_A = P_B + \frac{1}{2}\rho . v^2}$ **(8)**



3. Tube de Pitot

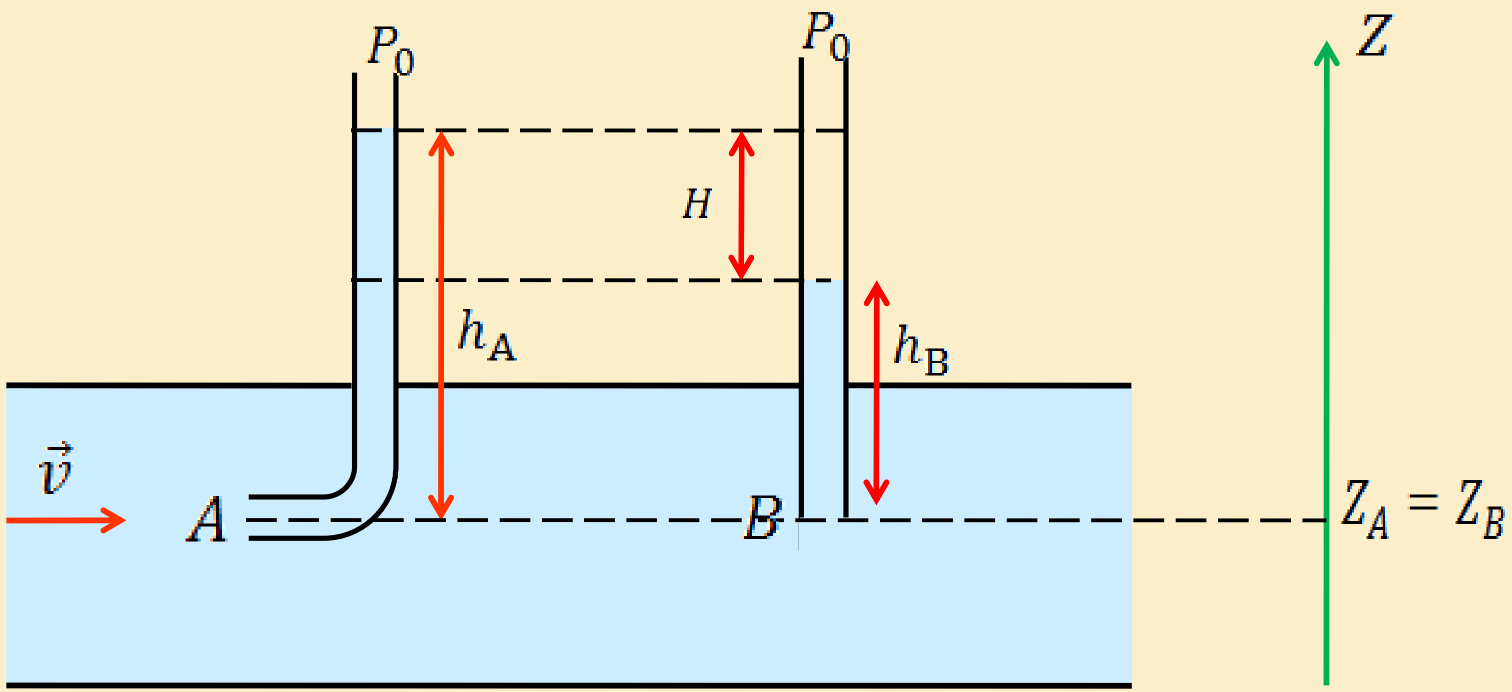
- En appliquant le théorème de Pascal (relation fondamentale de l'hydrostatique)
  - Au points A : $P = P_0 + \rho.\mathrm{g}.h_A$ **(c)**
  - Au points B : $P = P_0 + \rho.\mathrm{g}.h_B$ **(d)**



3. Tube de Pitot

- En appliquant le théorème de Pascal (relation fondamentale de l'hydrostatique)
  - Au points A : $P = P_0 + \rho . g . h_A$ **(c)**
  - Au points B : $P = P_0 + \rho . g . h_B$ **(d)**

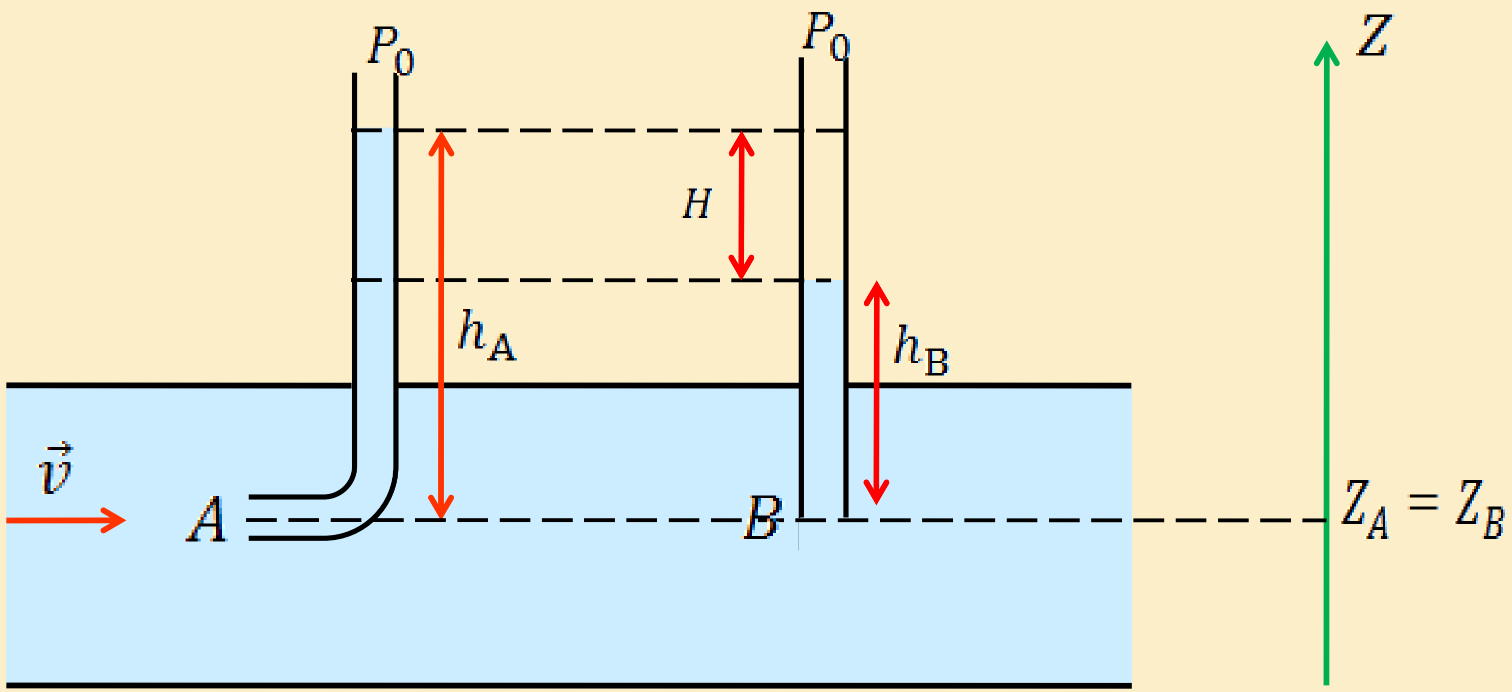
En substituant **(c)** et **(d)** dans **(8)** $\longrightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2}\rho . v^2 = \rho . g . (h_B - h_A)}$



3. Tube de Pitot

$$\longrightarrow \quad \frac{1}{2}\rho.v^2 = \rho.g.(h_B - h_A)$$

Or : $H = h_A - h_B$ $\longrightarrow$ $\boxed{v = \sqrt{2g.H}}$



3. Tube de Pitot

$$\boxed{v = \sqrt{2g.H}}$$

En mesurant la dénivellation H du liquide dans les deux tubes, on peut en déduire la vitesse v d'écoulement du fluide.