

2LMD Corrigé Série de TD N° 3 et 4

Ahsene. Lanani

Exercice I :

Remarque : on peut répondre aux différentes questions en suivant les différentes étapes du cours en utilisant plusieurs tableaux, comme on peut y répondre en utilisant un seul tableau (voir corrigé çï-dessous).

X \ Y	7	11	12	15	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$	$n_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$
2	9	2	2	0	13	26	52	218
6	7	27	4	1	39	234	1404	2454
8	1	3	15	4	23	184	1472	2240
12	0	0	4	17	21	252	3024	3636
14	0	1	2	1	4	56	784	700
n_j	17	33	27	23	100	752	6736	
$n_j \cdot y_j$	119	363	324	345	1151			
$n_j \cdot y_j^2$	833	3993	3888	517	13889			
$n_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$	476	2244	2688	3840				9248

1°) Calcul des moyennes et des écarts types :

$$\bar{X} = (\sum n_i \cdot X_i) / N = 752 / 100 = 7.52$$

$$\bar{Y} = (\sum n_j \cdot Y_j) / N = 1151 / 100 = 11.51$$

$$\text{Var}(X) = ((\sum n_i \cdot X_i^2) / N) - \bar{X}^2 = 6736 / 100 - (7.52)^2 = 10.81$$

L'écart type est : $\sigma(X) = 3.29$

$$\text{Var}(Y) = (\sum n_j \cdot Y_j^2) / N - \bar{Y}^2 = 13889 / 100 - (11.51)^2 = 6.41$$

L'écart type est : $\sigma(Y) = 2.53$

2°) a) Détermination de la covariance :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X,Y) &= (\sum n_{ij} X_i Y_j) / N - \bar{X} \bar{Y} \\ &= 9248 / 100 - (7.52)(11.51) = 5.92 \end{aligned}$$

b) Détermination du coefficient de corrélation linéaire :

$$\begin{aligned} \rho &= \text{Cov}(X,Y) / \sigma(X) \cdot \sigma(Y) \\ &= 5.92 / (3.29)(2.53) = 0.71. \end{aligned}$$

3°) Droite de régression (ou des moindres carrés) de Y en X :

Son équation est $Y = \hat{a}X + \hat{b}$

$$\hat{a} = \text{Cov}(X,Y) / \text{Var}(X) = 5.92 / 10.81 = 0.55$$

$$\hat{b} = \bar{Y} - \hat{a} \bar{X} = 11.51 - (0.55)(7.52) = 7.37$$

d'où : $Y = 0.55 X + 7.37$

Exercice II : Même méthode (Ex. I) en prenant les centres des classes

Exercice III :

Température T°C	Bactéries N	T	N	T.N
10	8	100	64	80
15	15	225	225	225
20	23	400	529	460
25	31	625	961	775
30	38	900	1444	1140
35	46	1225	2116	1610
$\Sigma = 135$	161	3475	5339	4290

1°) Calcul des moyennes de T et de N :

$$\bar{T} = (\Sigma T_i) / N = 22.5$$

$$\bar{N} = (\Sigma N_i) / N = 26.83.$$

2°) Calcul des variances de T et de N :

$$\text{Var}(T) = ((\Sigma T_i^2) / N) - \bar{T}^2 = 3475 / 6 - (22.5)^2 = 72.91.$$

$$\text{Var}(N) = ((\Sigma N_i^2) / N) - \bar{N}^2 = 5339 / 6 - (26.83)^2 = 169.98.$$

3°) a) Calcul de la covariance :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(T,N) &= (\Sigma T_i N_i) / N - \bar{T} \bar{N} \\ &= 4290/6 - (22.5) (26.83) = 111.32. \end{aligned}$$

b) Calcul du coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho = \text{Cov}(T,N) / \sigma(T) \cdot \sigma(N) = 111.32 / (8.54) (13.04) = 0.999.$$

Remarque : $\rho \cong 1$.

4°) L'équation de la droite de régression (ou des moindres carrés) de N en T est : $N = aT + b$

$$a = \text{Cov}(T, N) / \text{Var}(T) = 111.32 / 72.91 = 1.52$$

$$b = \bar{N} - a\bar{T} = 26.83 - (1.52)(22.5) = -7.37$$

d' où l'équation cherchée : $N = 1.52T - 7.37$.

Exercice IV : Soit le tableau suivant :

	T _i	V _i	T _i ²	V _i ²	T _i V _i	LnV _i	T _i LnV _i
	1	10	1	100	10	2.3025	2.3025
	2	23	4	529	46	3.1354	6.2709
	3	38	9	1444	114	3.6375	10.9127
	4	77	16	5929	308	4.3438	17.3752
	5	165	25	27225	825	5.1059	25.5287
	6	318	36	101124	1908	5.7620	34.5723
	7	642	49	412164	4494	6.4645	45.2521
	8	1270	64	1612900	10160	7.1467	57.1741
Σ	36	2543	204	2161415	17865	37.8983	199.3895

$$1°) \bar{T} = (\sum T_i) / 8 = 4.5$$

$$\bar{V} = (\sum V_i) / 8 = 317.875$$

$$\text{Var}(T) = (\sum T_i^2) - \bar{T}^2 = 25.5 - (4.5)^2 = 5.25$$

$$\text{L'écart type est : } \sigma(T) = \sqrt{5.25} = 2.291$$

$$\text{Var}(V) = (\sum V_i^2) - \bar{V}^2 = 270176.875 - (317.875)^2 = 169132.3594.$$

$$\text{L'écart type est : } \sigma(V) = \sqrt{\text{Var}(V)} = 411.257.$$

$$\text{Cov}(V, T) = (\sum V_i T_i) / 8 - \bar{V} \bar{T} = 802.6875.$$

2°) Coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho = \text{Cov}(V,T) / \sigma(V) \sigma(T) = 0.8519$$

3°) $V = B.A^T$

$$\text{Ln}V = (\text{Ln} A).T + \text{Ln} B$$

$$\text{Ln} A = (\text{Cov}(T,\text{Ln}V) / \text{Var}(T)) = 0.6868 ; \text{ d'où } : A = e^{0.6868} = 1.9875.$$

$$\text{Ln}B = \text{Ln}V - \text{Ln}A.T = 1.6466; \text{ d'où } B = e^{1.6466} = 5.1893.$$

La fonction d'ajustement est : $V = (5.19).2^T$

4°) L'estimateur des ventes lors du 10 i^{ème} mois est :

$$V = (5.19).2^{10} = 5315.$$