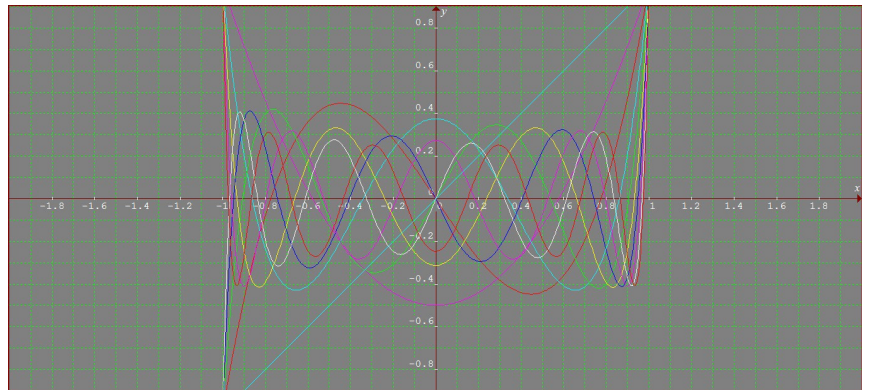


# Fonctions réelles d'une variable réelle

2.0

Mr LATELI Ahcene



## Légende



Entrée du glossaire



Abréviation

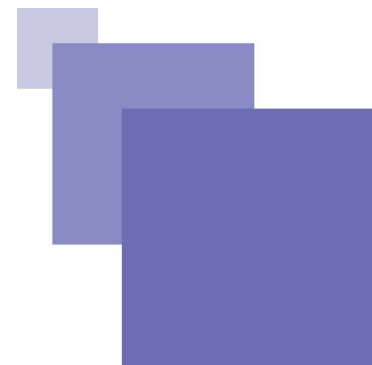


Référence Bibliographique



Référence générale

# Table des matières



<b>I - Chapitre II : Limites et Continuité</b>	<b>5</b>
A. Limite d'une fonction en un point.....	<b>5</b>
1. Théorème d'Encadrement.....	<b>7</b>
2. Formes indéterminées.....	<b>7</b>
3. Cas d'une fonction bornée.....	<b>7</b>
4. Limite d'une fonction composée.....	<b>8</b>
B. Exercice.....	<b>13</b>
C. Exercice : Choisissez la bonne réponse :.....	<b>13</b>
D. Exercice.....	<b>13</b>
E. Continuité d'une fonction.....	<b>14</b>
1. La continuité à droite et à gauche.....	<b>17</b>
2. Opérations sur les fonctions continues.....	<b>19</b>
3. Continuité d'une fonction composée.....	<b>20</b>
4. Prolongement par continuité.....	<b>20</b>
5. Théorèmes sur les fonctions continues.....	<b>21</b>
6. Fonctions réciproques (ou inverses).....	<b>28</b>
F. Évaluation formative.....	<b>30</b>
1. Calcule des limites.....	<b>30</b>
2. La continuité.....	<b>30</b>
3. Applications de continuité.....	<b>31</b>
<b>Questions de synthèse</b>	<b>33</b>
<b>Glossaire</b>	<b>35</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>39</b>
<b>Webographie</b>	<b>41</b>

# Chapitre II : Limites et Continuité



Limite d'une fonction en un point	5
Exercice	13
Exercice : Choisissez la bonne réponse :	13
Exercice	13
Continuité d'une fonction	14
Évaluation formative	30

## A. Limite d'une fonction en un point



### Conseil

Étudier la limite d'une fonction  $f$  en un point  $x_0$  de  $\mathbb{R}$ , c'est étudier le comportement de  $f(x)$  quand  $x$  est " **très voisin** " de  $x_0$ , c'est-à-dire appartient à un intervalle  $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$  où  $\varepsilon$  est " **très petit** " mais non nul. Il sera commode d'adopter la terminologie suivante :



### Définition

On appelle **voisinage** d'un point  $x_0$  de  $\mathbb{R}$  tout **intervalle ouvert**, de la forme  $V_{x_0}(\varepsilon) = ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ , avec  $\varepsilon > 0$

qui peut aussi s'écrire  $V_{x_0}(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < \varepsilon\}$ .

Notons par  $V(x_0)$  l'ensemble des voisinages du point  $x_0$ .



### Définition

On dit qu'une fonction  $f$  définie au voisinage du point  $x_0 \in \mathbb{R}$ , sauf peut-être au point  $x_0$ , **admet une limite** (finie)  $\ell$  en  $x_0$ , si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in D : |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ .

On écrit dans ce cas,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .



### Remarque

1.  $|x - x_0| \leq \eta \Leftrightarrow x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$ , c'est-à-dire  $x \in V(x_0)$ .

2.  $|f(x) - \ell| \leq \epsilon \Leftrightarrow \ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$ , c'est-à-dire  $f(x) \in V(\ell)$ .
3. Si  $f$  est définie en  $x_0$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .



### Exemple

Considérons la fonction  $f : x \mapsto 2x - 1$  qui est définie sur  $\mathbb{R}$ .

Au point  $x_0 = 1$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ .

En effet, pour tout  $\epsilon > 0$ , on a  $|f(x) - 1| = 2|x - 1| < \epsilon$  si l'on a, à fortiori,  $|x - 1| < \frac{\epsilon}{2}$ . Le bon choix sera alors de prendre  $\eta = \frac{\epsilon}{2}$ .



### Complément : Unicité de la limite

Si  $f$  admet une limite au point  $x_0$ , cette limite est **unique**.



### Définition : Limite à gauche et limite à droite

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $D$ .

- On dit que  $f$  **admet une limite à gauche**  $\ell$  en  $x_0$  si, et seulement si :  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in D : x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon$ .

On note  $\lim_{x \rightarrow x_0}^< f(x) = \ell$  ou  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ .

- On dit que  $f$  **admet une limite à droite**  $\ell$  en  $x_0$  si, et seulement si :  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in D : x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \epsilon$ .

On note  $\lim_{x \rightarrow x_0}^> f(x) = \ell$  ou  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ .



### Remarque

1. Si  $\lim_{x \rightarrow x_0}^> f(x) = \ell_1$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0}^< f(x) = \ell_2$  avec  $\ell_1 \neq \ell_2$ , alors  $f$  n'admet pas de limite en  $x_0$ .
2. Si  $\lim_{x \rightarrow x_0}^> f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0}^< f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .



### Exemple

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

On remarque que  $\lim_{x \rightarrow 0}^> f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0}^< f(x) = -\infty$ , alors la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers 0 n'existe pas.



### Définition : Opérations sur les limites

Soient  $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ , et  $x_0$  un point d'accumulation  $\ominus$  de  $D$ .

Supposons que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ , alors on a :

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$ .
3. Si de plus,  $\ell_2 \neq 0$  et  $g(x) \neq 0$  au  $V(x_0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot \ell_1, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\ell_1|$ .

### 1. Théorème d'Encadrement

Soient  $f, g, h \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ , et  $x_0$  un point d'accumulation de  $D$ .

Supposons que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ , alors on a :

1. Si  $f(x) < h(x) < g(x), \forall x \in D$  alors  $\ell_1 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \leq \ell_2$ .
2. Si  $f(x) < g(x)$  sur  $D$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ .
3. Si  $h(x) < g(x)$  sur  $D$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = -\infty$ .

### 2. Formes indéterminées

Dans le calcul des limites, on appelle **Forme Indéterminée** (notée *F.I*), toute situation qui conduit à un cas où les théorèmes portant sur les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure. Les formes indéterminées les plus courantes sont :

$$\pm\infty \mp \infty, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \times \pm\infty, \frac{0}{0}, 1^\infty, 0^\infty, 0^0, \infty^0, \text{ etc...}$$

### 3. Cas d'une fonction bornée

#### Théorème

Si on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

et s'il existe un réel  $M$  et un voisinage de  $a$  tels que  $|g(x)| \leq M$

pour tout  $x$  appartenant à ce voisinage (autrement dit si  $g$  est **bornée** sur un voisinage de  $a$ ),

alors  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = 0$ .



#### Exemple

La fonction  $x \mapsto x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  tend vers 0 lorsque  $x \rightarrow 0$

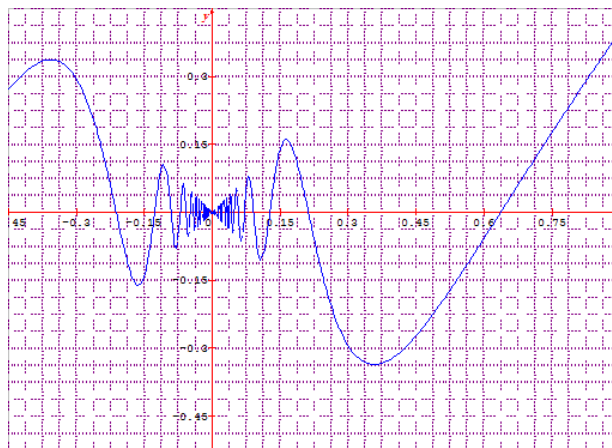


Figure 2.1 : Limite d'une fonction

### 4. Limite d'une fonction composée

#### Notations

1. On désigne par  $\bar{\mathbb{R}}$  l'intervalle  $[-\infty, +\infty]$ .

2. On considère une fonction  $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$  admettant  $b \in \bar{\mathbb{R}}$  pour limite en  $a \in \bar{\mathbb{R}}$ .
3. On considère d'autre part une partie non vide  $E$  de  $\mathbb{R}$  et une fonction  $g \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$  admettant  $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$  pour limite en  $b$  (cela suppose que tout voisinage de  $b$  rencontre  $E$ ).
4. On suppose de plus que  $f(D) \subseteq E$  : la fonction composée  $g \circ f$  est alors bien définie sur  $D$ . On a alors



**Définition : Composition des limites**

Avec les notations introduites ci-dessus ;

Supposons que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et que  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell$ .

**B. Exercice**

Trouver la limite suivante ou dire si elle n'existe pas.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{x^2}$$

0

n'existe pas

-1

1

**C. Exercice : Choisissez la bonne réponse :**

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|}$

est égale à 0.

est égale à  $+\infty$ .

est égale à  $-\infty$ .

n'existe pas.

### D. Exercice

La limite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

- est une forme indéterminée du type  $0^0$ .
- est égale à 0.
- n'existe pas.
- est égale à 1

### E. Continuité d'une fonction



#### Définition

Soit  $x_0 \in D$ . On dit que la fonction  $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$  est **continue au point**  $x_0$  si  $f(x)$  tend vers  $f(x_0)$ , quand  $x$  tend vers  $x_0$  pour tout  $x \in D$ , ce qui s'écrit  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Si  $f$  est **continue en tout point**  $x_0$  de  $D$ , nous dirons que  $f$  est **continue sur**  $D$ .



#### Remarque

- Intuitivement, une fonction  $f$ , définie sur un intervalle  $[a, b]$  où  $a$  et  $b$  sont des réels tels que  $a < b$ , est continue sur  $[a, b]$  si l'on peut tracer son graphe (sa courbe représentative) **sans lever le crayon**.

- La fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si, et seulement si :  $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$

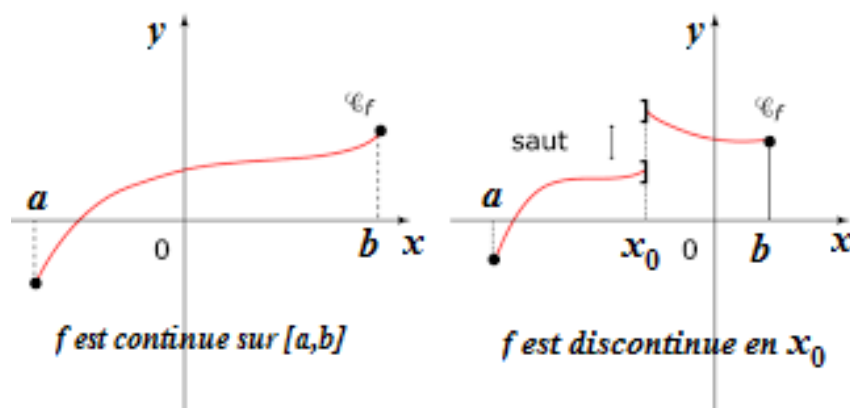


Figure 2.2: La continuité

#### 1. La continuité à droite et à gauche





### Définition

1. On dit que  $f$  est **continue à droite** en  $x_0$  si et seulement si :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .
  2. On dit que  $f$  est **continue à gauche** en  $x_0$  si et seulement si :  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ .
- 
1. On dit que  $f$  est **continue à droite** en  $x_0$  si et seulement si :  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .
  2. On dit que  $f$  est **continue à gauche** en  $x_0$  si et seulement si :  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ .



### Remarque

1. On remarque que  $f$  est **continue** en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est **continue à droite et à gauche** en  $x_0$ .
2. On dit que  $f$  est **continue sur un intervalle**  $I \subseteq D$  si et seulement si  $f$  est **continue en tout point de  $I$** .

## 2. Opérations sur les fonctions continues

### Proposition

soient  $x_0 \in D$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ .

1. Si  $f$  est continue en  $x_0$  ( resp. sur  $D$  ), alors  $|f|$  est continue en  $x_0$  ( resp. sur  $D$  ).
2. Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $x_0$  ( resp. sur  $D$  ), alors  $f + g$  est continue en  $x_0$  ( resp. sur  $D$  ).
3. Si  $f$  est continue en  $x_0$  ( resp. sur  $D$  ), alors  $\lambda f$  est continue en  $x_0$  ( resp. sur  $D$  ).
4. Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $x_0$  ( resp. sur  $D$  ), alors  $f \cdot g$  est continue en  $x_0$  ( resp. sur  $D$  ).
5. Si  $g$  est continue en  $x_0$  ( resp. sur  $D$  ) et  $g(x_0) \neq 0$  ( resp.  $g(x) \neq 0$  ), alors  $\frac{1}{g}$  est définie dans un voisinage de  $x_0$  et est continue en  $x_0$  ( resp. sur  $D$  ).
6. Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $x_0$  ( resp. sur  $D$  ) et  $g(x_0) \neq 0$  ( resp.  $g(x) \neq 0$  ),  
 $\frac{f}{g}$   
 alors  $\frac{f}{g}$  est définie dans un voisinage de  $x_0$  et est continue en  $x_0$  ( resp. sur  $D$  ).



### Exemple

1. La fonction  $x \mapsto x^n$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Les **fonctions polynômes** sont continues sur tout  $\mathbb{R}$ .
3. Les fonctions trigonométriques **sinus** et **cosinus** sont continues sur  $\mathbb{R}$ .

## 3. Continuité d'une fonction composée

Soient  $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{F}(F, \mathbb{R})$ . On suppose que  $f(E) \subset F$  (de sorte que  $g \circ f$  est définie sur  $E$ ). Soit  $x_0 \in E$ .

Si  $f$  est continue en  $x_0$  ( resp. sur  $E$  ) et  $g$  est continue en  $f(x_0)$  ( resp. sur  $F$  ). Alors,  $g \circ f$  est continue en  $x_0$  ( resp. sur  $E$  ).

### 4. Prolongement par continuité

Soient  $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0$  un réel. Nous supposons que la fonction  $f$  n'est pas définie en  $x_0$  mais admet une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  en  $x_0$ . Nous posons alors  $\tilde{f}$  la fonction définie sur  $D \cup \{x_0\}$  par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

La fonction  $\tilde{f}$  est continue en  $x_0$  et s'appelle le **prolongement par continuité** de  $f$  en  $x_0$ .



#### Exemple

La fonction  $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ , comme  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  alors  $f$  admet un prolongement par continuité  $\tilde{f}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Et dont la courbe représentative est :

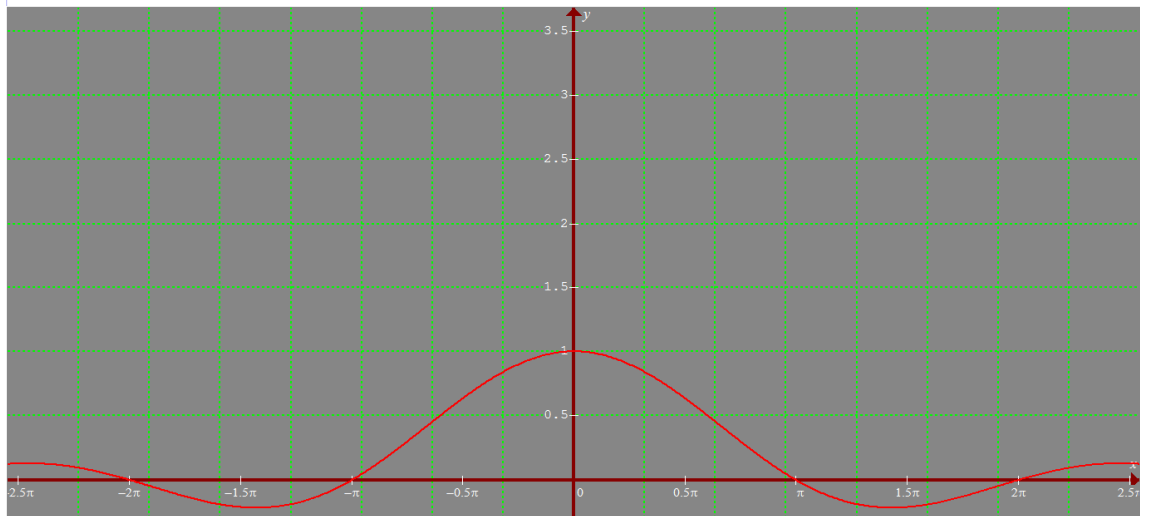


Figure 2.3: Courbe représentative du prolongement par continuité de  $f$

### 5. Théorèmes sur les fonctions continues

#### a) Théorème des valeurs intermédiaires



#### Définition : Théorème 1

Soit  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ , et  $f$  une fonction **continue** de  $[a; b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Alors, la fonction  $f$  **prend toutes les valeurs comprises entre**  $f(a)$  et  $f(b)$ , c'est-à-dire que pour tout  $\lambda$  appartenant à l'intervalle dont les bornes sont  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $c \in [a; b]$  tel que  $f(c) = \lambda$ .

( Autrement dit : l'équation  $f(x) = \lambda$  **admet au moins une solution dans**  $[a, b]$  )  
**(Voir Figure 2.4).**

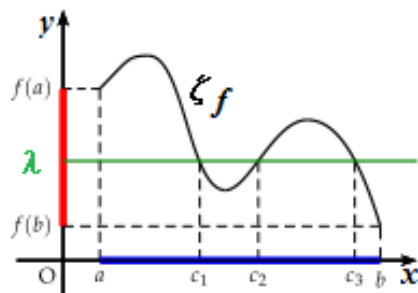


Figure 2.4 : Théorèmes des valeurs intermédiaires



**Définition : Théorème 2 ( Cas des fonctions strictement monotones )**

Soit  $f$  une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle  $I$  et  $a, b \in I$  avec  $a < b$ .

Pour tout réel  $\lambda$  **compris** entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe **un unique réel**  $x_0$  de  $[a; b]$  tel que  $f(x_0) = \lambda$ .

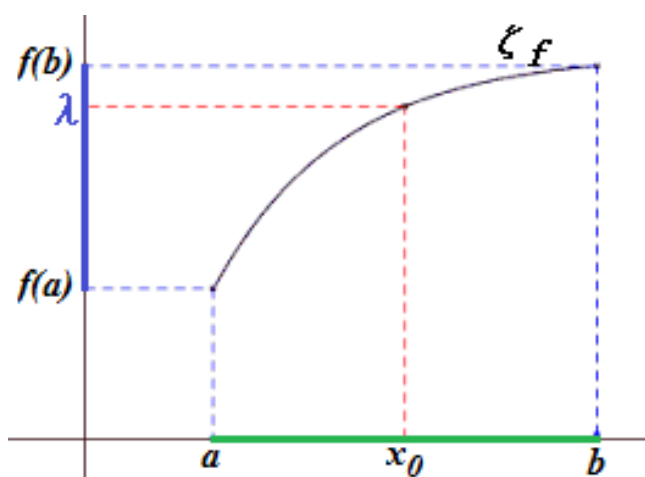


Figure 2.5: Cas d'une fonction strictement monotone

### b) Théorème 3 ( Théorème de Bolzano )

Si la fonction  $f$  est **continue sur l'intervalle**  $[a, b]$  et si  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , **il existe** alors **au moins** un point  $x_0 \in ]a, b[$  tel que  $f(x_0) = 0$ .

Ce théorème permet donc d'obtenir l'existence de solutions d'équation de type  $f(x) = 0$ .



Image 1 Bernhard Bolzano



#### Remarque

1. Si  $f$  est **strictement monotone** sur  $[a, b]$ , le point  $x_0$  est **unique**.
2. Si  $f$  est **continue** sur un **intervalle**  $I$ , alors  $f(I)$  est un **intervalle**.
3. Si  $f$  est **continue** sur un **segment**  $I$ , alors  $f(I)$  **est un segment**.



#### Exemple

Montrez que l'équation  $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$  admet au moins une solution entre 1 et 2.

Posons  $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ ,  $f$  est une fonction de polynôme, donc elle est définie et continue sur  $]1; 2[$ . De plus on a  $f(1) \cdot f(2) = (-1) \cdot (12) < 0$ . Dans ces conditions, le **théorème de la valeur intermédiaire** affirme l'existence d'un nombre  $c$  entre 1 et 2 tel que  $f(c) = 0$ . Autrement dit, l'équation  $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$  a au moins une solution dans l'intervalle  $]1; 2[$ .

### c) Théorème 4 ( Théorème du point fixe )

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I = [a, b]$ . Si  $f(I) \subset I$ , alors  $f$  admet (au moins) un **point fixe** sur  $I$ . (C'est-à-dire : il existe (au moins) un réel  $x$  de  $I$  tel que  $f(x) = x$ ).

## 6. Fonctions réciproques (ou inverses)

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une **fonction continue** et **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**), alors  $f$  est une **bijection** de  $[a, b]$  vers l'ensemble d'arrivée  $[f(a), f(b)]$  (resp.  $[f(b), f(a)]$ ). La bijection réciproque  $f^{-1}$  est continue et **strictement croissante** (resp. **décroissante**).



#### Texte légal : Consequence

Si  $f$  est une **fonction continue** et **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) de  $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$ , alors,  $f$  admet une **bijection réciproque** notée  $f^{-1}$  avec  $f^{-1} : [m, M] \rightarrow [a, b]$ .



**Définition : Théorème**

Si  $f$  est une **fonction continue** et **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**)

sur un intervalle  $[a, b]$ , alors  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  continue et strictement

croissante (resp. strictement décroissante) sur  $[f(a), f(b)]$  (resp.  $[f(b), f(a)]$ ) vers  $[a, b]$ .

**Proposition**

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est **continue** et **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**), alors  $f^{-1}$  est continue et **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) sur  $[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$  (resp.  $[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$ ) vers  $[a, b]$ .

## F. Évaluation formative

**Objectifs**

**Tester la compréhension**

### 1. Calcule des limites

Compréhension

**Question**

Trouver les limites suivantes ou dire si elles n'existent pas.

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 - 1}$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cos \frac{1}{x^3}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 3} - \sqrt{x}$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ .

### 2. La continuité

Compréhension

**Question 1**

Étudier la continuité de fonction suivante en  $x_0 = 0$ :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Question 2

Étudier la continuité sur le domaine de définition de la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{\sin x}{2 + \sin x}$$

**3. Applications de continuité****Prolongement par continuité**

Montrer que les fonctions suivantes définies sur  $\mathbb{R}^*$  sont continues sur  $\mathbb{R}^*$  et dire si on peut les prolonger par continuité sur  $\mathbb{R}$ .

Question 1

$$g(x) = \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Question 2

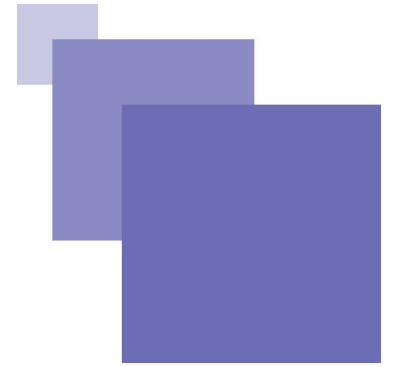
$$h(x) = \frac{\cos^2 x - 1}{x}$$

Théorème des valeurs intermédiaires

Question 3

Montrer que l'équation :  $x^{17} = x^{11} + 1$  admet au moins une solution sur l'intervalle  $[0, 2]$ .

# Questions de synthèse



Montrer que toute fonction polynôme de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , de degré impair, s'annule en au moins un point.

Montrer que l'équation  $x^3 + x^2 = 5x - 4$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ .



# Glossaire

## Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $1$  sur le quel on définit un sens de parcours : sens trigonométrique direct ou indirect.

## Continuité en un point

On dit que  $f$  est **continue** en  $x_0$  si et seulement si **la limite de  $f(x)$  est égale  $f(x_0)$**  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ .

## Continuité sur un intervalle

$f$  est **continue sur  $I$**  si et seulement si  $f$  est **continue en tout point de  $I$** .

## Cosinus

Soit  $M$  un point du cercle trigonométrique.

On appelle cosinus de l'angle  $(OI, OM)$ , l'abscisse du point  $M$ .

## Domaine de définition

ou **ensemble de départ** d'une fonction réelle d'une variable réelle Ensemble des éléments pour lesquels la fonction  $f$  est définie.

## Ensemble d'arrivée

ou **image d'une fonction réelle d'une variable réelle** est

$$f(D) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x), x \in D\}.$$

## Extremum d'une fonction

Un extremum est un minimum ou un maximum.

## Fonction bijective

Fonction **injective** et **surjective à la fois**.

## Fonction bornée

$f$  est **bornée**, si  $f$  est **à la fois majorée** et **minorée c'est-à-dire:**

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \forall x \in D, m \leq f(x) \leq M.$$

## Fonction croissante

$$\forall x_1, x_2 \in I, \text{ tel que } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

## Fonction décroissante

$$\forall x_1, x_2 \in I, \text{ tel que } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$



**Fonction dérivable au point  $x_0$** 

$f$  est **dérivable au point  $x_0$**  si et seulement si la quantité  $f(x)-f(x_0) / x-x_0$  **admet une limite finie** lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ .

**Fonction dérivable sur un intervalle**

$f$  est **dérivable sur  $I$**  si elle est **dérivable en tout point de  $I$** .

**Fonction dérivée**

La **fonction dérivée** ou **dérivée** de  $f$  sur  $I$  est la fonction  $f'$  qui a tout  $x$  de  $I$  associe  $f'(x)$ .

**fonction monotone**

Une fonction qui est **croissante** ou **décroissante**.

**Fonction polynôme de degré 1**

Une fonction polynôme de degré un  $f$  est une fonction dépendant de deux paramètres réels  $a$  et  $\beta$  et définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :  $f(x)=ax+\beta$  où  $a \neq 0$ .

**Fonction polynôme de degré  $n$** 

Un polynôme de degré  $n$  est une fonction  $f$  dépendant de  $n+1$  paramètres réels  $a^0, a^1, \dots, a^n$  et définie par  $f(x)=a^n x^n + a^{n-1} x^{n-1} + \dots + a^1 x + a^0$  où  $a^n \neq 0$ .

**Fonction strictement croissante**

$\forall x_1, x_2 \in I$ , tel que  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

**Fonction strictement décroissante**

$\forall x_1, x_2 \in I$ , tel que  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

**fonction strictement monotone**

Une fonction qui est **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

**Fraction rationnelle**

Une **fraction rationnelle** se présente sous la forme  $P(x)/Q(x)$ , où  $P(x), Q(x)$  sont des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ).

**Graphe ou courbe représentative d'une fonction réelle d'une variable réelle**

Ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  avec  $x \in D$  et  $y = f(x)$ .

**Parité d'une fonction numérique**

En **mathématiques**, la **parité d'une fonction d'une variable réelle**, complexe ou vectorielle est une propriété qui requiert d'abord la symétrie du domaine de définition par rapport à l'origine, puis s'exprime par l'une ou l'autre des relations suivantes :

1. fonction paire : pour tout  $x$  du domaine de définition,  $f(-x) = f(x)$  ;
2. fonction impaire : pour tout  $x$  du domaine de définition,  $f(-x) = -f(x)$ .

**Point d'accumulation**

Un point  $a$  de  $D$  est un point d'accumulation de  $D$  s'il existe des points aussi proches que l'on veut de  $a$ , distincts de  $a$  et appartenant à  $D$ .

C'est-à-dire s'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  t.q.  $a < a < b$  et  $D \ni ]a, a[ \cup ]a, b[$

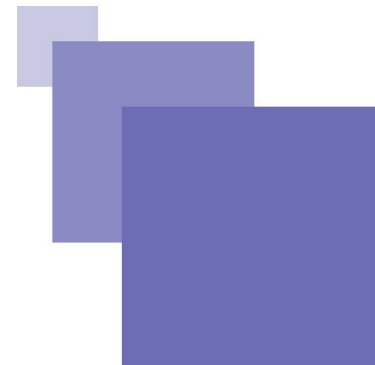
### Sinus

Soit  $M$  un point du cercle trigonométrique. On appelle sinus de l'angle  $(OI, OM)$ , l'ordonnée du point  $M$ .

### Voisinage de point $x_0$

**Tout intervalle ouvert** de  $\mathbb{R}$  **contenant  $x_0$**  :  $\forall a > 0, ]x_0 - a, x_0 + a[$  est un voisinage de  $x_0$ .

# Bibliographie



[**BELAIDI Benharrat**] Analyse mathématique Exercices Corrigés. Office Des Publications Universitaires ( Alger ), 05-2013 ; 1.01.5364.

[**HITTA Amara**] Cours Algèbre et Analyse I. Université 8 Mai 1945 - Guelma

[**MEHBALI Mohamed**] Mathématiques 1 Fonction d'une variable réelle. Office Des Publications Universitaires ( Alger ), 01-2013 ; 1.01.5048.

[**Wieslawa J. Kaczor, Maria T. Nowak, Traduction : Eric Kouris**] PROBLÈMES D'ANALYSE II Continuité et dérivabilité. EDP Sciences (France), 2008 (03)



# Webographie



[mp.cpgedupuydelome] [<http://mp.cpgedupuydelome.fr>] édité le 9 janvier 2014

[wikipedia] <http://fr.wikipedia.org/w/index.php?oldid=89849582>

[wikipedia] Source: <http://fr.wikipedia.org/w/index.php?oldid=100567156>