

Auto-5 Asservissement et régulation

Chapitre 6 : Performances Des Systèmes Asservis

6.1. Définition

Dans ce chapitre on va étudier les performances d'un système asservi en basant sur les critères suivants :

- La stabilité ;
- La précision ;
- La rapidité ;
- L'amortissement.

À partir de ces critères on peut évaluer la réponse d'un système asservi, on prend par exemple la réponse en vitesse du moteur électrique dans laquelle nous appliquons les critères mentionnés précédemment.

6.2. Stabilité

L'étude de la stabilité est en régime permanent. Elle définit comme suit :

✚ Définition 1

Un système est dit stable par rapport à une consigne de sortie, si lorsqu'il subit une faible perturbation, il tend à revenir vers la consigne de sortie.

✚ Définition 2

Un système est dit stable si et seulement si à une entrée bornée $u(t)$ correspond une sortie bornée $y(t)$. Cette définition permet de qualifier la stabilité des systèmes forcés.

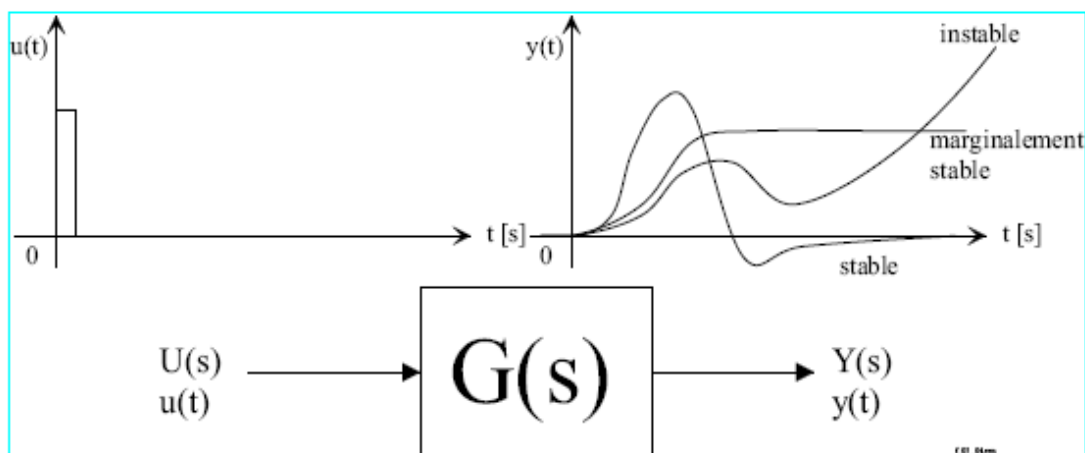


Figure 6.1. Illustration de la définition de la stabilité

6.2.1. Théorème de la stabilité

Un système linéaire continu à temps invariant est asymptotiquement stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont à parties réelles strictement négatives

6.2.2. Éléments de démonstration

Soit le système asservi dont la fonction de transfert est la suivante :

$$H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \dots \dots \dots (6.1)$$

Avec :

$H(s)$ a des pôles réels $\lambda_i = a_i$ ou complexes $\lambda_k = b_k + jc_k$ et $\lambda_k^* = b_k - jc_k$, donc $H(s)$ devient comme suit :

$$H(s) = \frac{K \prod_i (s - z_i)}{\prod_i (s - a_i) \prod_k ((s - b_k)^2 + c_k^2)} \dots \dots \dots (6.2)$$

Décomposition de la fonction $H(s)$ en éléments simples, on aura :

$$H(s) = \sum_i \frac{A_i}{s - a_i} + \sum_k \frac{B_k s + C_k}{(s - b_k)^2 + c_k^2} \dots \dots \dots (6.3)$$

Reponse impulsionnelle $h(t)$

$$h(t) = \sum_i A_i e^{a_i t} + \sum_k D_k e^{b_k t} \sin(c_k t + \phi) \dots \dots \dots (6.4)$$

La reponse impulsionnelle converge si les termes $e^{a_i t}$ et $e^{b_k t}$ sont convergents c'est-à-dire si a_i et b_k sont négatifs.

6.2.3. Application du théorème de stabilité aux systèmes en boucle fermé

La fonction de transfert en boucle fermé est déjà présentée aux chapitres 2 et 3, donc, elle décrit comme suit :

$$H_{BF}(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + H_{BO}(s)} \dots \dots \dots (6.5)$$

Avec :

$$H_{BO}(s) = C(s)H(s)G(s) \dots \dots \dots (6.6)$$

Le système asservi est stable asymptotiquement si et seulement si les pôles de $H_{BF}(s)$ sont à parties réelles strictement négatives.

Équation caractéristique du système asservi : $1 + H_{BO}(s) = 0$

Le système asservi est stable si les racines de l'équation caractéristique sont à parties réelles strictement négatives. Peut-on analyser la stabilité en BF à partir de $H_{BO}(s)$ sans calculer explicitement la fonction de transfert en BF? **Oui!**

6.3. Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une brusque variation du signal d'entrée. Cependant, la valeur finale étant le plus souvent atteinte de manière asymptotique (système stable), on retient alors comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système, le temps de réponse à $n\%$. En pratique, on utilise le **temps de réponse à 5%** ($Tr_{5\%}$) appelé aussi **temps d'établissement**, c'est le temps mis par le système pour atteindre sa valeur de régime permanent à $\pm 5\%$ près et y rester. Le **temps de réponse à 5%** caractérise la durée de la **phase transitoire**. C'est une des caractéristiques importantes des systèmes bouclés. On cherchera souvent à diminuer ce temps de réponse, sans que cela soit au détriment d'autres performances.

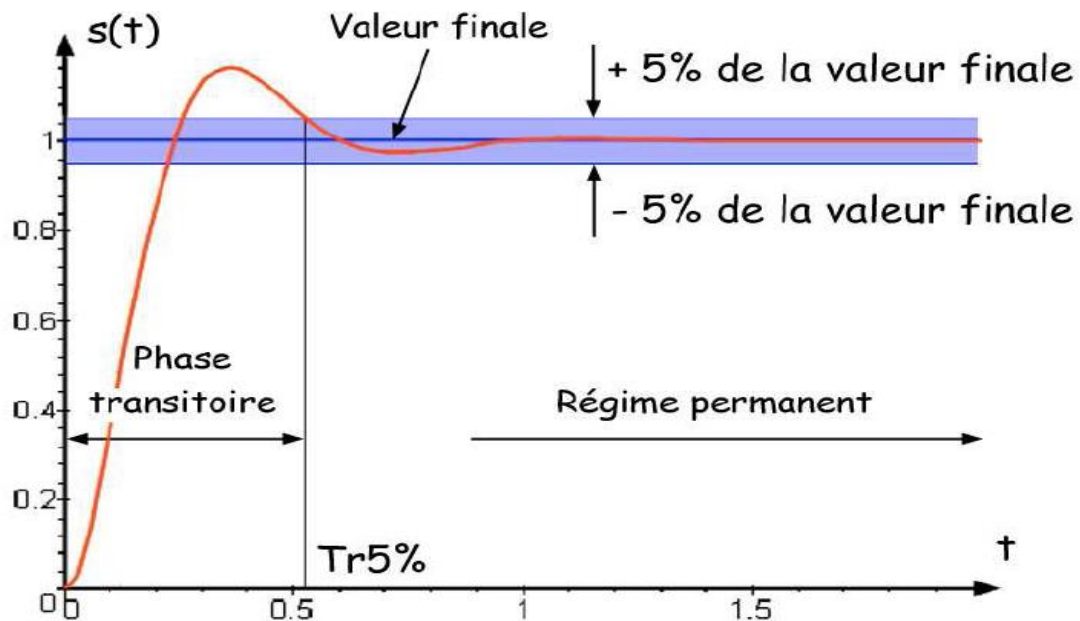


Figure 6.2. Illustration de la définition de la rapidité.

6.4. Précision

Elle est définie principalement par deux grandeurs qui sont soit calculées soit mesurées expérimentalement. Il s'agit de l'écart statique et de l'écart dynamique.

6.4.1. Écart statique

On soumet le système à une entrée en échelon d'amplitude constante :

$e(t) = E_0 u(t)$. L'écart statique est la différence entre la consigne et la réponse en régime permanent.

6.4.2. Écart dynamique

Pour caractériser l'écart dynamique ev (ou écart de traînage), on soumet le système à une entrée rampe de pente a : $e(t) = a t u(t)$. L'écart dynamique ev est la différence entre la consigne et la réponse en régime permanent.

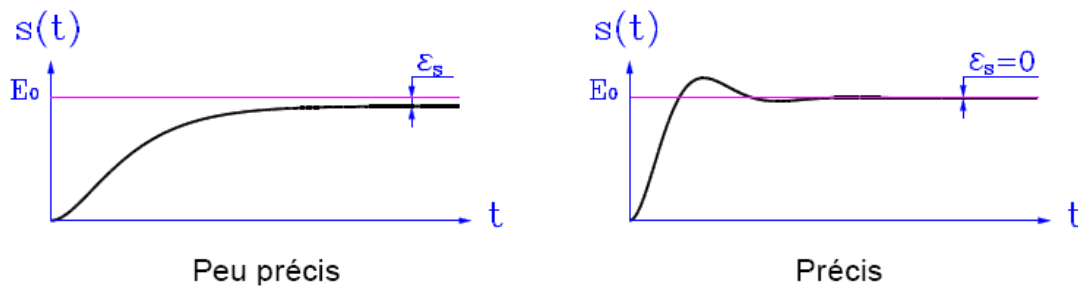


Figure 6.3. Illustration de la définition de précision.

6.5. Amortissement

Un bon amortissement est la capacité d'un système oscillant à ne pas présenter de dépassement de la consigne important. On demande généralement au dépassement de rester inférieur à un certain pourcentage de la consigne. D'un autre côté, on ne veut pas qu'un système soit trop amorti car l'augmentation de l'amortissement provoque une chute du rendement du système.

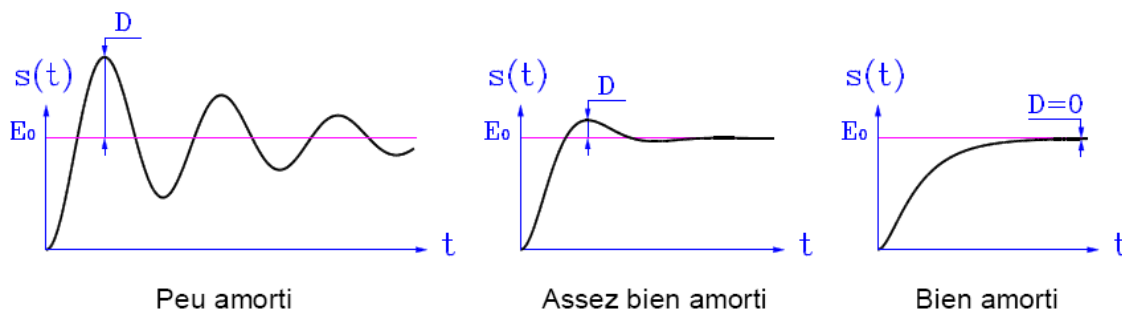


Figure 6.4. Illustration de la définition de l'amortissement.

6.6. Outils d'analyse de la stabilité en boucle fermée à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte

Pour étudier la stabilité d'un système asservi on utilise deux méthodes :

- ✚ **Méthode algébrique** : cette méthode basée sur le critère analytique ou critère de **Routh ou Routh-Hurwitz**.
- ✚ **Méthode graphique** : cette méthode basée sur les critères graphiques (ou critère du revers) dans laquelle on applique le plan de **Black**, de **Nyquist** et diagramme de **Bode**.

6.6.1 Critère de Routh-Hurwitz

Soit la fonction de transfert en boucle fermée suivante :

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \dots \dots \dots (6.7)$$

Avec :

Le numérateur de $T(s)$ est caractérisé par les zéros ;

Le dénominateur de $T(s)$ est caractérisé par les pôles.

On appelle critère de Routh le critère algébrique permettant **d'évaluer la stabilité d'un système à partir des coefficients du dénominateur $D(s)$** de sa fonction de transfert (en boucle fermée pour les systèmes asservis)

✚ Principe

- Ce critère est issu d'une méthode qui permet de décompter le nombre de racines à partie réelle positive ou nulle du polynôme $D(s)$.

$$D(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n \dots \dots \dots (6.8)$$

- Il s'applique en **deux temps et ne nécessite pas le calcul des pôles**.

✚ Première partie du critère

- Tous les coefficients a_i de $D(s)$ doivent être de même signe et non nuls.

$$D(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n \dots \dots \dots (6.9)$$

- **Dans le cas contraire** le système est **instable**.

✚ Deuxième partie du critère

On construit le tableau suivant

Soit $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$, avec $a_n > 0$(6.10)

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...	a_2	a_0	...	a_3	a_1
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	a_1		...	a_2	a_0
s^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	...	<i>si n pair</i>		...	<i>si n impair</i>	
s^{n-3}	c_{n-3}						
...							
s^1							
s^0	...								
Première colonne, dite des pivots									

- **La première ligne** contient les coefficients des termes en s^{n-2k} , dans l'ordre des puissances décroissantes.
- **La deuxième ligne** contient les coefficients des termes en s^{n-1-2k} , et se termine suivant la parité de n.
- **Les 2 premières lignes sont donc renseignées d'après le polynôme $D(s)$. Pas de calculs !**

✚ Méthodes de calcul des coefficients des lignes du polynôme $D(s)$

Les coefficients des lignes suivantes se calculent sous forme de déterminant:

$$b_{n-2} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad c_{n-3} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-2} & b_{n-4} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-i} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-i} \\ a_{n-1} & a_{n-i-1} \end{vmatrix}, \quad c_{n-j} = \frac{-1}{b_{n-2}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-j} \\ b_{n-2} & b_{n-j-1} \end{vmatrix}$$

Rappel :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - c.b$$

- Si nécessaire, une case vide est prise égale à zéro.

✚ Condition de stabilité :

Le système est stable si et seulement si tous les termes de la première colonne (colonne du pivot) sont strictement positifs.

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...	a_2	a_0	...	a_3	a_1
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	a_1		...	a_2	a_0
s^{n-2}	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	...	<i>si n pair</i>		...	<i>si n impair</i>	
s^{n-3}	c_{n-3}						
...						
s^1						
s^0						

Première colonne, dite des pivots

✚ Exemple

Soit le polynôme suivant :

$$D(s) = s^4 + s^3 + 3.s^2 + s + 1$$

- Discuter la stabilité selon le critère de **Routh**.

s^4	1	3	1
s^3	1	1	0
s^2	2	1	0
s^1	0.5	0	
s^0	1		

$$b_2 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad b_0 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_1 = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.5; \quad c_{-1} = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$d_0 = \frac{-1}{0.5} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

✚ **En conclusion le système est stable.** Parce que tous les coefficients de la colonne du pivot sont positifs

6.7. Critère du revers

Le critère du revers est basé sur les méthodes graphiques de Nyquist, lieu de Bode et dans le plan de Black.

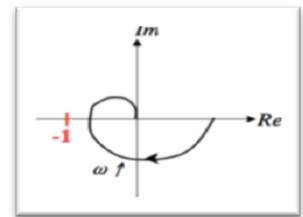
6.7.1. Lieu de Nyquist

À partir du lieu de Nyquist de $F_{BO}(j\omega)$, la stabilité de $F_{BF}(s)$: dépend de la position de ses pôles.

$$F_{BF}(s) = \frac{F_{BO}(s)}{1 + F_{BO}(s)}$$

- Les pôles de $F_{BF}(s)$ sont aussi les racines de $1 + F_{BO}(s)$
- Analyser la stabilité du système bouclé équivaut donc à étudier la position du lieu de Nyquist de $1 + F_{BO}(j\omega)$ par rapport à 0

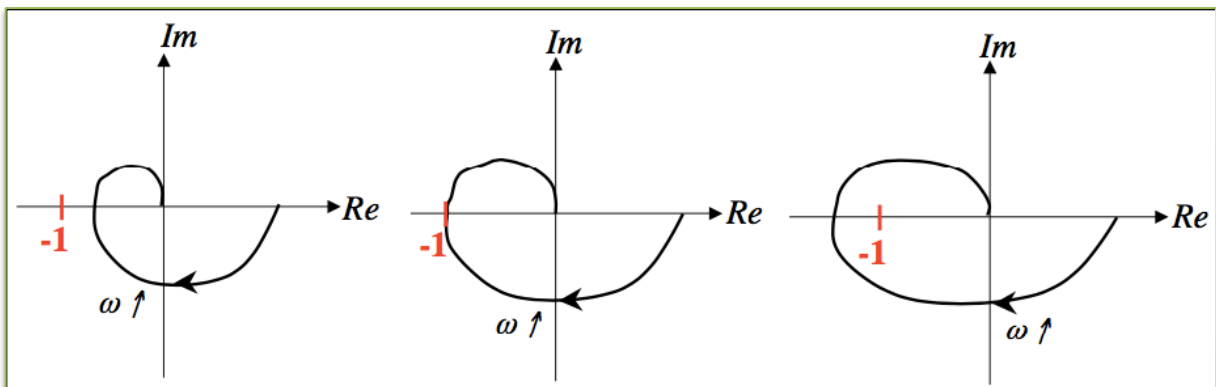
$$1 + F_{BO}(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + F_{BO}(s) = -1$$



- Cela revient à étudier la position du lieu de Nyquist de $F_{BO}(j\omega)$ par rapport au point -1 , appelé point critique.

✚ Critère du revers (version simplifiée)

Soit un système stable en boucle ouverte, le système en boucle fermée est stable si, en parcourant le lieu de Nyquist de $F_{BO}(j\omega)$ dans le sens des pulsations ω croissantes, on laisse le point critique -1 à gauche.



Système bouclé stable

Système bouclé stable

Système bouclé instable

Figure 6.5. Stabilité par le lieu de Nyquist.

- ✚ Intérêt du critère du revers : analyse de la stabilité du système bouclé à partir du lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte

6.7.2. Diagramme de Bode

- Pour les diagrammes de bode de la $F_{BO}(j\omega)$ les tracés sont tels que :
 - Pour ω_1 , pulsation pour laquelle $Adb(\omega_1) = 0db$, $\varphi(\omega_1) > -180^\circ$, et pour ω_2 , pulsation pour laquelle $\varphi(\omega_2) = -180^\circ$, $Adb(\omega_2) < 0db$

Alors,

Le système est stable en boucle fermée. Voir la figure 6.6

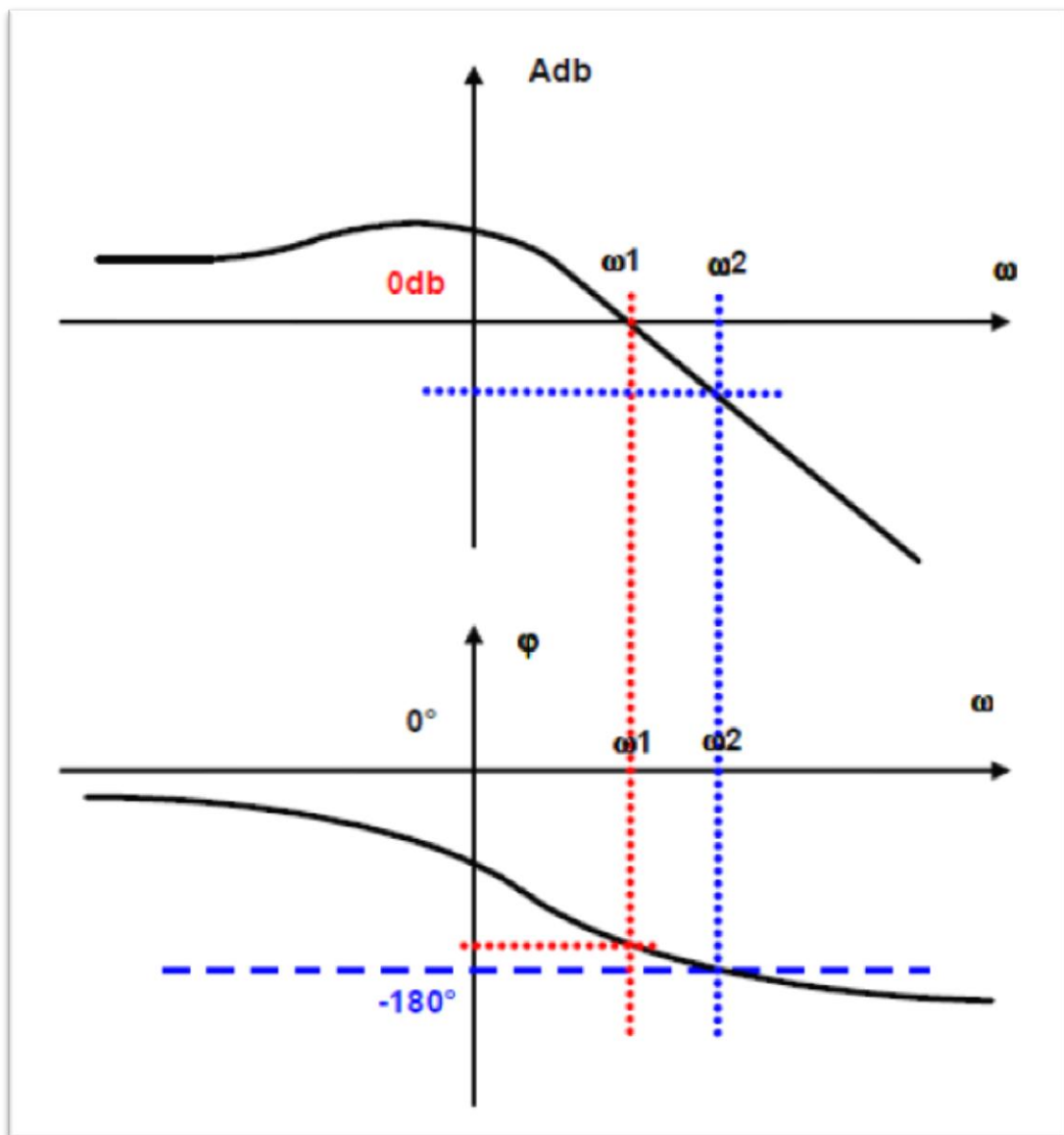


Figure 6.6. Stabilité par diagramme de Bode.

- Si pour les diagrammes de bode de la $F_{BO}(j\omega)$ les tracés sont tels que :
 - Pour ω_1 , pulsation pour laquelle $Adb(\omega_1) = 0db$, $\varphi(\omega_1) < -180^\circ$, ou pour ω_2 , pulsation pour laquelle $\varphi(\omega_2) = -180^\circ$, $Adb(\omega_2) > 0db$

Alors,

Le système est instable en boucle fermée. Voir la figure 6.7.

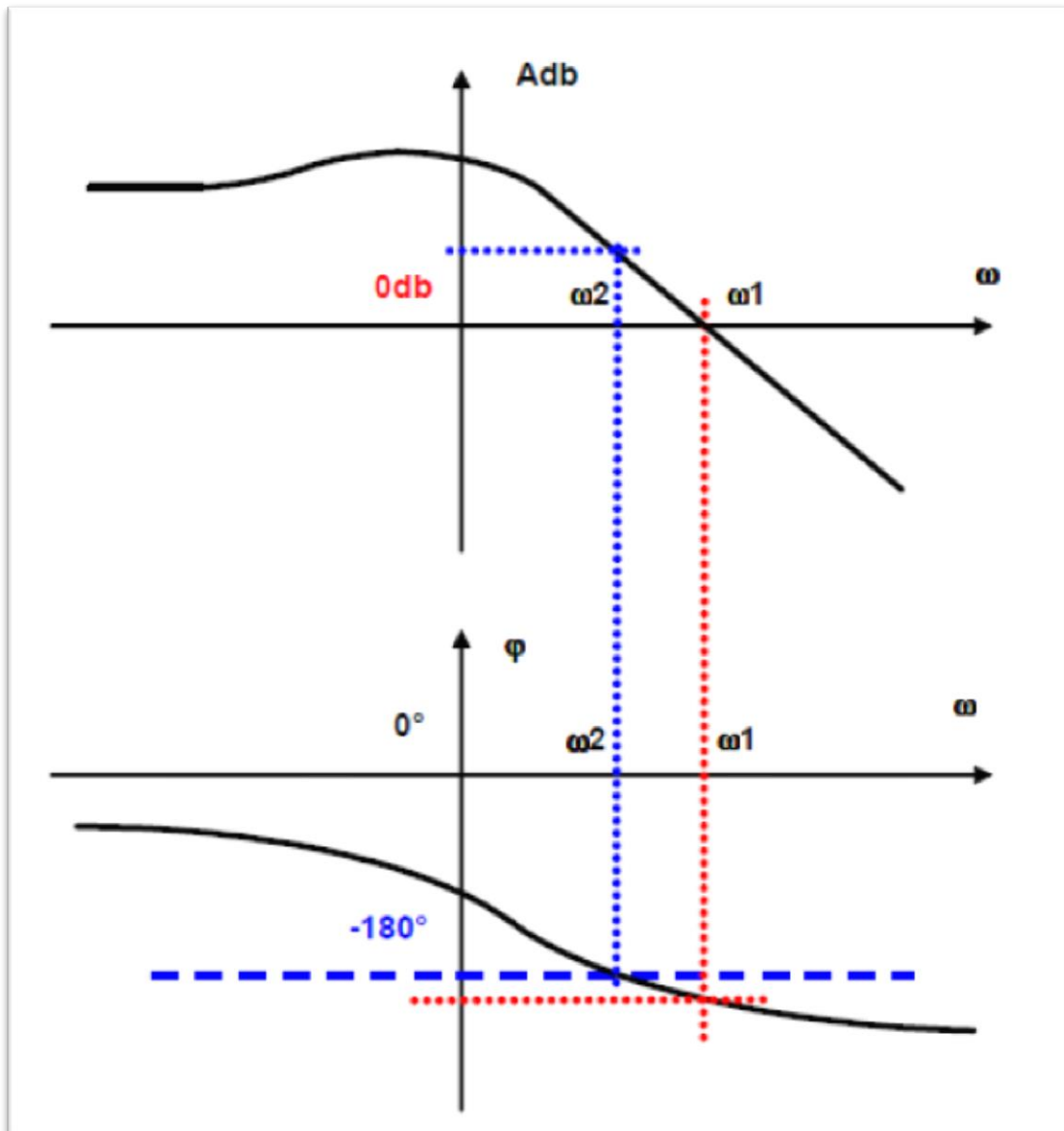


Figure 6.7. Étude de la stabilité par diagramme de Bode.

6.7.3. Critère de Black

Dans le lieu de Black, le point critique **-1** correspond au point $(-\pi, 0 \text{ db})$ Soit $\omega_{0\text{db}}$ la pulsation telle que $|F_{\text{BO}}(j\omega_{0\text{db}})| = 1$. La condition de stabilité asymptotique du critère du revers impose $\phi(\omega_{0\text{db}}) > -\pi$. En parcourant le lieu de Black dans le sens des ω croissants, on laisse le point critique **-1** à droite.

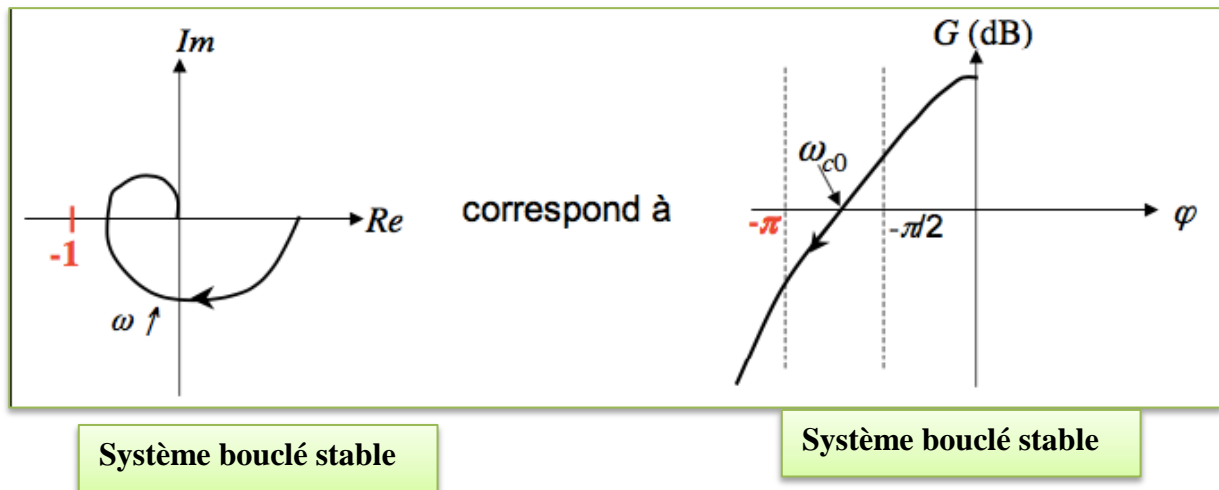


Figure 6.8. Étude de la stabilité par le lieu de Black.

Références

- [1] http://php.iai.heig-vd.ch/~mee/cours/cours_ra/chap_05/latex/chap_05.pdf
- [2] <http://lyc58-fr.ac-dijon.fr/ljr/cours/supsi/si/cde-syst/Performancesystemeasservi.pdf>
- [3] https://www.emse.fr/~dutertre/documents/cours_automatique_1A_jmd_2016.pdf
- [4] <http://hpallam.pagesperso-orange.fr/bs2secours/C202asservissements2.pdf>
- [5] http://sitelyceeidarc.org/autodoc/cours/003%20T%20STI2D/Technologie%20transversale/Asservissement/020%20Ressources%20documentaires/COURS_ASSERVISSEMENTS.pdf
- [6] <https://docplayer.fr/928557-Systemes-asservis-correction.html>
- [7] http://iai.eivd.ch/profs/mee/cours/cours_ra/chap_05/Figures/f_05_04.eps
- [8] <http://asi.insa-rouen.fr/enseignement/siteUV/auto/cours/cours4.pdf>
- [9] <http://www.pdfcomplete.com/cms/hppl/tabid/108/Default.aspx?r=q8b3uige22>
- [10] <http://ahistace.chez-alice.fr/documents/5%20Stabilite%20des%20systemes.pdf>
- [11] Djaaffar RACHED, Maître de Conférences B, USTO-MB, COURS ET EXERCICES DE REGULATION, 2014/2015.
- [12] Hugues GARNIER, UNIVERSITÉ DE LORRAINE, *Automatique continue, Systèmes bouclés : commande, stabilité & performances, Version du 24 septembre 2019*

[13] Soraya ZEHANI , Stabilité des Systèmes Asservis, Université Kasdi Merbah Ouargla Faculté des Sciences Appliquées, 2014/ 2015.