

Exercice-1

Soit le polynôme suivant :

$$D(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + 4s + 4 = 0$$

Étudier la stabilité en utilisant le critère de Routh.

Solution-1

On réalise la table de Routh

s^4	1	5	4	
s^3	1	4	0	
s^2	1	4	0	$s^2 + 4$
s^1	0	0	0	$2s$
s^0	2	0	0	0
	4	0	0	0

Pas de pôles instables mais le système est en limite de stabilité. Parce que on a un zéro dans la ligne 4 correspondant au s^1 .

Remarque:

Si tous les termes d'une ligne sont nuls, l'équation possède des racines imaginaires pures (conjuguées) et se trouve déjà en limite de stabilité. Pour poursuivre l'étude (le tableau) on écrit à la place de la ligne concernée les coefficients obtenus en dérivant le polynôme auxiliaire dont les coefficients sont les termes de la dernière ligne non nulle.

Exercice-2

Soit le polynôme suivant :

$$D(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = 0$$

Étudier la stabilité en utilisant le critère de Routh.

Solution-2

s^4	1	2	1	
s^3	1	2	0	
s^2	0	1		

$$b_2 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad b_0 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Le système est en limite de la stabilité

On note ici que le pivot devient nul, ce qui ne permet pas de poursuivre. La méthode consiste alors à remplacer le polynôme de départ par un polynôme « à même stabilité », par exemple en le multipliant par un polynôme dont on connaît les racines, choisies bien évidemment réelles et négatives. La solution la plus simple est donc ici de prendre comme nouveau polynôme $Da(s) = (s + a).D(s)$, avec a réel positif, p.ex. 1.

$$D(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 3s + 1 = 0$$

s^5	1	3	3
s^4	2	4	1
s^3	1	2.5	0
s^2	-1	1	0
s^1	3.5	0	
s^0	1		

$$b_3 = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad b_0 = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.5; \quad c_2 = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2.5 \end{vmatrix} = -1; \quad c_0 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$d_1 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 2.5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.5; \quad d_{-1} = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad e_0 = \frac{-1}{3.5} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3.5 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Le système est instable. Parce que les coefficients de la colonne du pivot ne sont pas de mêmes signes.

Exercice-3

Soit le polynôme suivant :

$$D(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + 4s + 4 = 0$$

Discuter la stabilité en utilisant le critère de Routh.

Solution-3

On réalise la table de Routh

s^4	1	5	4
s^3	1	4	0
s^2	1	4	
s^1	0	0	

$$b_2 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad b_0 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4; \quad c_1 = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad c_{-1} = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Le système est en limite de la stabilité

Le polynôme reconstitué à partir de la ligne 3 est $s^2 + 4$, qui admet $\pm 2j$ pour racines et pour polynôme dérivé $2 \cdot s$. D'où la reconstitution du tableau pour poursuivre l'étude :

s^2	1	4
s^1	2	0
s^0	4	

$$d_0 = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

Le système est stable mais oscillant

Exercice-4 (explication détaillée de lieu de Nyquist et diagramme de Bode)

On prend le système du premier ordre dont la fonction de transfert est la suivante :

$$F(s) = \frac{1}{1+\tau s} \text{ avec l'opérateur de Laplace } s = j\omega$$

$$\Rightarrow F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\tau\omega} = \frac{1 - j\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} = \frac{1}{1 + \tau^2\omega^2} - j \frac{\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}$$

Avec :

$$\frac{1}{1 + \tau^2\omega^2} : \text{Partie réel ;}$$

$$- \frac{\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} : \text{Partie imaginaire}$$

✚ Module de $F(s)$

$$|F(j\omega)| = \sqrt{R_e^2 + I_m^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} = (1 + \tau^2\omega^2)^{-\frac{1}{2}}$$

✚ Phase ou argument

$$\text{tg}\varphi = \frac{R_e}{I_m} = -\tau\omega \Rightarrow \varphi = -\text{arctg}\tau\omega$$

φ : Phase ou argument.

À partir des lieux de transfert qui représentent les variations du module et de la phase de la fonction de transfert d'un système en fonction de la fréquence (ω), on peut prévoir la stabilité des systèmes en boucle fermée à partir de leurs fonctions de transfert en boucle ouverte.

À partir du module et de l'argument de la fonction de transfert en boucle ouverte on peut déterminer la stabilité du système en boucle fermée.

La réponse en fréquence (Hz) consiste à tracer séparément en fonction de la pulsation $\omega(rad/s)$ le module et la phase de cette réponse. La courbe d'amplitude où courbe gain est obtenue à partir du module. La courbe de phase est obtenue à partir l'argument.

Ces courbes permettent d'effectuer des mesures de stabilité et de définir les marges de gains et de phase qui représentent les marges de sécurité d'un système asservi.

$|F(j\omega)| = f(\omega)$, $\varphi(j\omega) = f(\omega)$, représentent respectivement les courbes de Gain et de phase, avec $F(j\omega)$ est la courbe asymptotique.

On utilise l'échelle semi-logarithmique pour tracer les courbes de gain et de phase.

Diagramme de Bode :

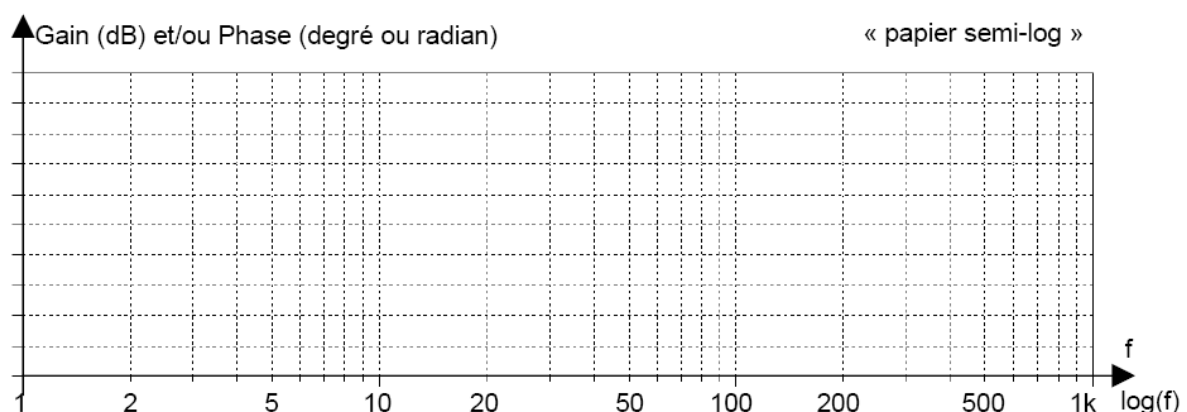
Le diagramme de Bode permet de représenter sous forme graphique le gain en **db** $G_{db} = 20 \cdot \log(|F(j\omega)|)$ et la phase $\varphi = \text{Arg}(F(j\omega))$ d'une fonction de transfert, en fonction de ω . Il permet de voir le comportement d'un filtre ou d'un système asservi linéaire.

L'échelle des abscisses est logarithmique. Cela permet de représenter le gain et la phase sur une grande plage de fréquence. Ainsi, on représente : $G(\omega) = f(\log \omega)$ et $\varphi = f(\log \omega)$.

Le tracé d'un diagramme de Bode commence par le tracé des courbes asymptotiques. (On étudie le comportement de G et φ lorsque ω tend vers 0 et lorsque ω tend $+\infty$.)

On complète ensuite par le tracé réel en marquant quelques points aux environs des jonctions entre les courbes asymptotiques.

Échelle semi-logarithmique



Exemple :

Fonction de transfert sous forme d'un produit de fonction de transfert élémentaire.

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s)$$

Le calcul du gain nous donne :

$$|F(j\omega)| = |F_1(j\omega)| \cdot |F_2(j\omega)| \cdot |F_3(j\omega)|$$

Donc :

$$G_{db} = 20 \cdot \log(|F(j\omega)|) = 20 \cdot \log(|F_1(j\omega)|) + 20 \cdot \log(|F_2(j\omega)|) + 20 \cdot \log(|F_3(j\omega)|)$$

$$G_{db} = G_{1db} + G_{2db} + G_{3db}$$

$$\text{Arg}(F(s)) = \text{Arg}(F_1(s)) + \text{Arg}(F_2(s)) + \text{Arg}(F_3(s))$$

Exercice-5

Soit la fonction de transfert suivante

$$F(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

- On demande d'étudier la stabilité sur le lieu de nyquist.

Solution-5

On remplace l'opérateur de Laplace s par $j\omega$ la fonction de transfert $F(s)$ devient comme suit :

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + \tau j\omega}$$

✚ Coordonnées polaires

- **Module de $F(s)$**

$$|F(j\omega)| = (1^2 + (\tau\omega)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

- **Phase ou argument**

$$\varphi = -\text{arctg} \frac{\tau\omega}{1} = -\text{arctg} \tau\omega$$

$\omega(\text{rad/s})$	0	1	10	∞
$ F(j\omega) $	1	0.7	0.1	0
φ	0	$\pi/4$	-84	$-\pi/2$

✚ Coordonnées rectangulaires

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + \tau j\omega} = \frac{1 - j\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2} = \frac{1}{1 + \tau^2\omega^2} - j \frac{\tau\omega}{1 + \tau^2\omega^2}$$

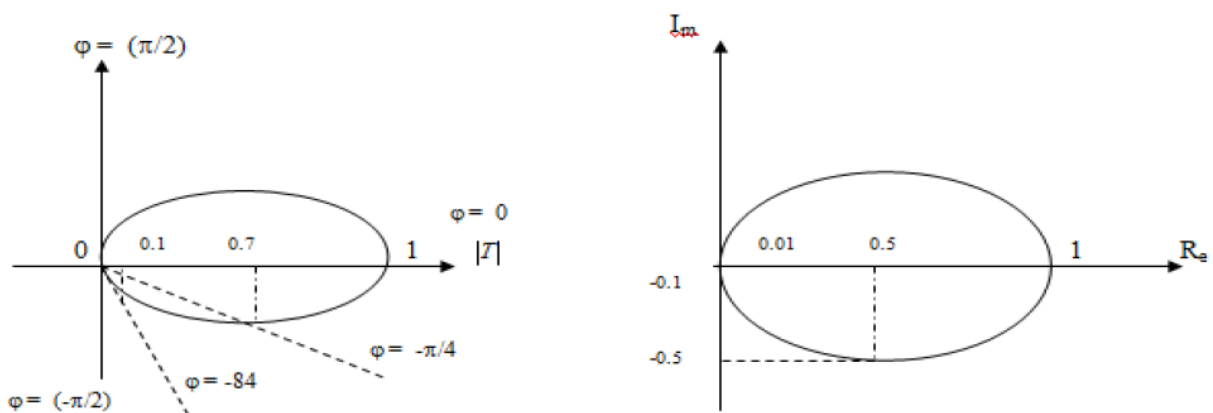
Avec :

$\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}$: Partie réel ;

$-\frac{\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2}$: Partie imaginaire

On pose $\tau = 1$

$\omega(\text{rad/s})$	0	1	10	∞
R_e	1	0.5	10^{-2}	0
I_m	0	-0.5	-10^{-1}	0



Le système est stable

Exercice-6

Soit la fonction de transfert suivante :

$$F(j\omega) = \frac{k}{1 + j\tau\omega}$$

- Tracer le diagramme de bode (diagramme de Gain) ;
- Tracer diagramme de phase

Solution-6

$$G_{db} = 20. \log_{10} |F(j\omega)|$$

$$G_{db} = 20. \log_{10} \left| \frac{k}{1 + j\tau\omega} \right|$$

$$G_{db} = 20. \log k - 20 \log |(1 + j\tau\omega)|$$

$$G_{db} = 20. \log k - 20 \log \sqrt{1 + \tau^2\omega^2}$$

$$G_{db} = 20. \log \left(\frac{k}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \right)$$

Lorsque ω tend vers 0 ;

$$\tau^2\omega^2 \ll 1, G_{db} = 20. \log k = C^{te}.$$

Lorsque ω tend vers l'infini;

$$\begin{aligned}\tau^2 \omega^2 &\gg 1, \\ G_{db} &= 20 \log k - 20 \log \tau \omega \\ G_{db} &= 20 \log k - 20 \log \tau - 20 \log \omega \\ G_{db} &= 20 \log \frac{k}{\tau} - 20 \log \omega\end{aligned}$$

Avec :

$20 \log \frac{k}{\tau}$: Constante ;

$20 \log \omega$: Droite.

G_{db} tend asymptotiquement vers une droite de pente négative (la représentation d'une fonction log en coordonnées semi-logarithmiques est une droite de pente exprimée par décade, une unité de l'axe des pulsations correspondant à une puissance de dix de ces mêmes pulsations : **-20db/décade**).

L'intersection des deux droites s'effectue en un point de fréquence ω_0 tel que :

$$\begin{aligned}20 \log k &= 20 \log k - 20 \log \tau - 20 \log \omega_0 \\ \Rightarrow 20 \log \tau &= 20 \log \omega_0\end{aligned}$$

La pulsation correspondante est ω_0 avec :

$$\omega_0 \frac{1}{\tau}$$

Elle est appelée pulsation de cassure.

La représentation de ces droites s'appelle diagramme asymptotique de gain.

$$\text{Pour } \omega = \omega_0 = \frac{1}{\tau}, F(j\omega_0) = \frac{1}{1+j\frac{1}{\tau}} = \frac{k}{1+j}$$

$$\Rightarrow |F(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow G_{db} &= 20 \log \left(\frac{k}{\sqrt{2}} \right) = 20 \log k - 20 \log \sqrt{2} \\ &= 20 \log k - 10 \log 2 = 20 \log k - 3 \text{db}\end{aligned}$$

La courbe réelle est située 3db sous la droite asymptotique en ce point.

De la même manière, on trouve :

$$\begin{aligned}\omega = \omega_0 = \frac{2}{\tau} &\Rightarrow G_{db} = 20 \log k - 7 \text{db} \\ \omega = \frac{\omega_0}{2} = \frac{1}{2\tau} &\Rightarrow G_{db} = 20 \log k - 1 \text{db}\end{aligned}$$

Ce diagramme donne une bonne idée de la courbe de réponse en fréquence

- Pour les fréquences faibles : droite $20\log K$
- Pour les fréquences autour de $1/\tau$: points indiqués à -1 , -3 et -7 db.
- Pour les fréquences plus élevées : droite de pente -20db/décade .

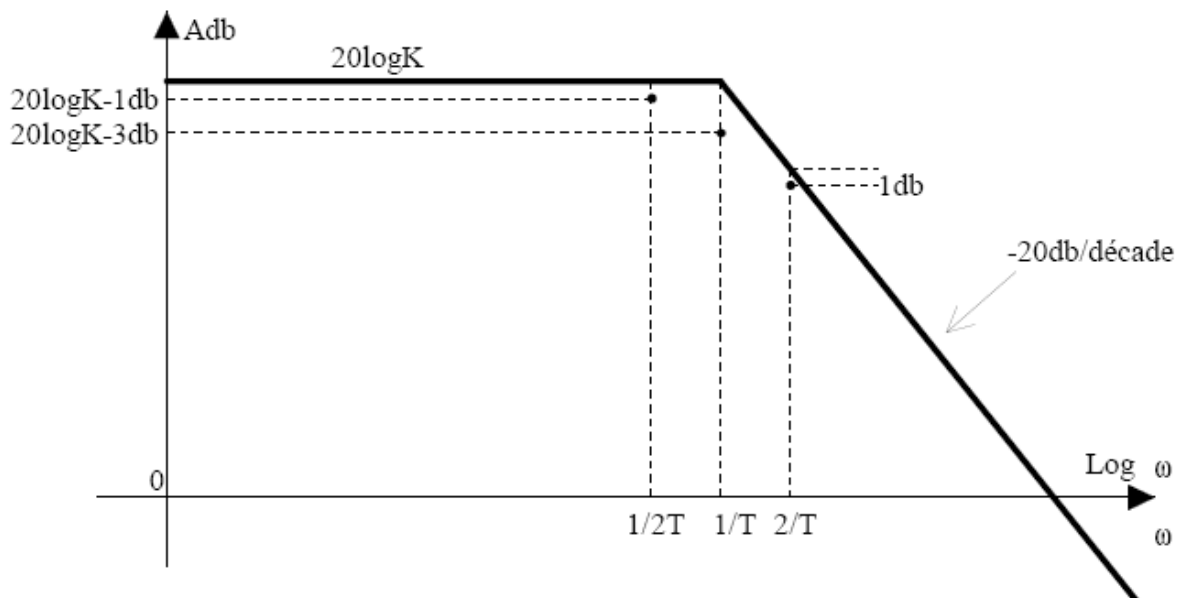


Diagramme de Gain

Diagramme de phase : La phase est donnée par l'argument de $F(j\omega)$.

$$\varphi = \text{arctg}(-\tau\omega)$$

Pour $\omega = 0$, $\varphi(\omega) = \text{arctg}(0) = 0$;

Pour ω tendant vers l'infini, $\varphi(\omega) = \text{arctg}(-\infty) = \frac{-\pi}{2} = -90^\circ$

Pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\tau}$, $\varphi(\omega_0) = \text{arctg}\left(\frac{-\tau}{\tau}\right) = \text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$

Pour $\omega = \frac{\omega_0}{2} = \frac{1}{2\tau}$, $\varphi\left(\frac{\omega_0}{2}\right) = \text{arctg}\left(\frac{-\tau}{2\tau}\right) = \text{arctg}\left(\frac{-1}{2}\right) = -26.56^\circ$

Pour $\omega = 2\omega_0 = \frac{2}{\tau}$, $\varphi(2\omega_0) = \text{arctg}\left(\frac{-2\tau}{\tau}\right) = \text{arctg}(-2) = -63.43^\circ$.

Le diagramme asymptotique à la forme d'une marche d'escalier avec un saut de déphasage à la pulsation de cassure :

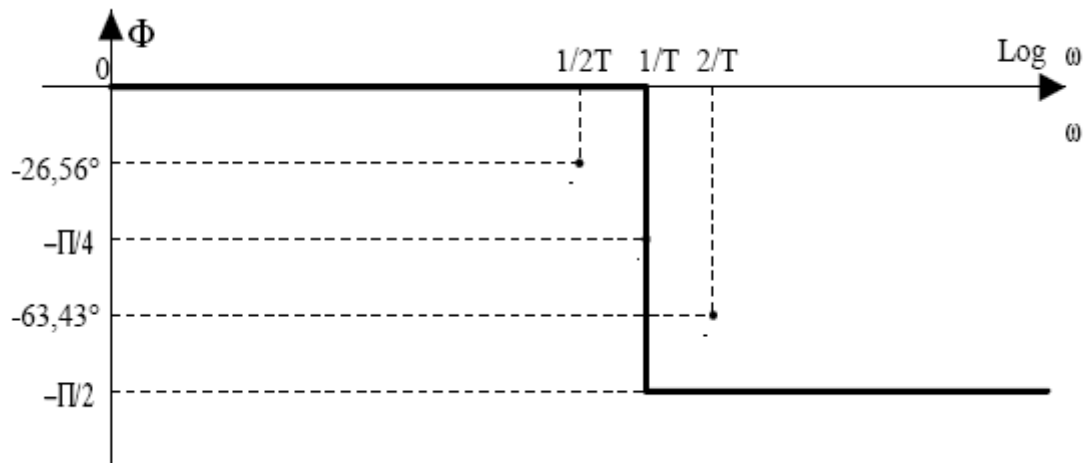


Diagramme de phase

Références :

[1] Prof. Otman FILALI Automatique linéaire 1ère année, Chapitre 6, Stabilité des systèmes asservis CI 2009/2010.

[2] http://www.jdotec.net/s3i/TD_Info/Routh/Routh.pdf

[3] Edouard Laroche Asservissement des systèmes linéaires à temps continu

[4] [11] Djaaffar RACHED, Maître de Conférences B, USTO-MB, COURS ET EXERCICES DE REGULATION, 2014/2015.

[5] http://poujouly.net/wp-content/uploads/2016/08/fiche_bode.pdf

[6] http://www4.ac-nancy-metz.fr/cpge-pmf-epinal/Cours_TD_SII/Elec/cours_bode.pdf

[7] http://sitelyceejdarc.org/autodoc/cours/003%20T%20STI2D/Technologie%20transversale/Asservissement/020%20Ressources%20documentaires/COURS_ASSERVISSEMENTS.pdf