TD 1 MECA 4

Exercice 1 :

Centre d'inertie d'un système constitué de 2 masses m_1 en M_1 et $m_2 = 2\ m_1$ en M_2 tel que $M_1M_2 = d = 6$ cm.

- Donner le schéma de définition.
- Déterminer le centre d'inertie.

Solution :

1- Le schéma de définition.

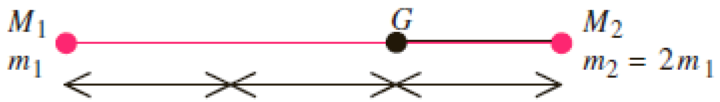


Figure : Centre d'inertie G pour un système constitué d'une masse m_1 et $m_2 = 2\ m_1$.

2- En utilisant la relation

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\overrightarrow{GM_i} = 0$$

on a :

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \gg \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{GM_2} = -2\overrightarrow{GM_2}$$

En passant par les normes, on obtient :

$$\|\overrightarrow{GM_1}\| = 2\ \|\overrightarrow{GM_2}\| \gg GM_1 = \ 2\ GM_2$$

Cette équation fait apparaître deux inconnues GM_1 et GM_2. Pour résoudre il nous faut une deuxième équation donnée par :

$$GM_1 + \ GM_2 = d$$

En reportant la relation 2 dans 1 on obtient :

$$2\ GM_2 + \ GM_2 = d\ ;\ 3\ GM_2 = d \gg GM_2 = \frac{d}{3} = 2\ cm$$

$$GM_1 = 2\ GM_2 \gg GM_1 = \frac{2d}{3} = 4\ cm$$

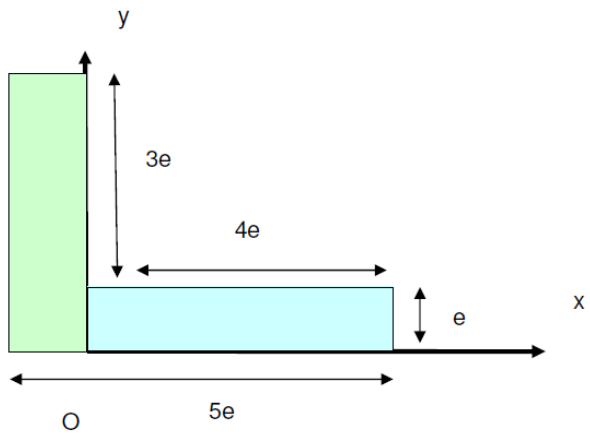
Le centre d'inertie se situe entre les deux masses, du côté de la masse la plus grande, le rapport des distances étant égal au rapport inverse des masses.

Exercice 2 :

On considère un solide, découpé dans une feuille de carton homogène et d'épaisseur constante, et ayant la forme d'une lettre L. Déterminer la position du centre d'inertie de la plaque :

1- A l'aide d'une construction graphique.

2- Par le calcul



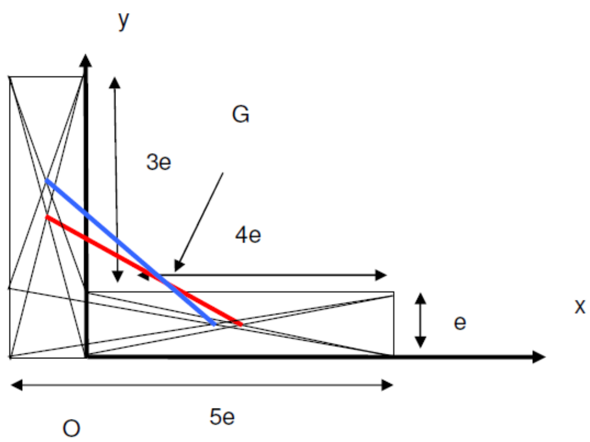
Solution

Résolution graphique :

Le solide est formé de deux rectangles de centres d'inertie G_1 et G_2. G est situé sur G_1G_2.

On peut aussi considérer que le solide est formé de deux rectangles de centres d'inertie G'_1 et G'_2. G est situé sur $G'_1G'_2$.

G est donc situé à l'intersection de G_1G_2 et de $G'_1G'_2$.



Résolution par le calcul :

Détermination des coordonnées de G

$$(M_1 + M_2)\overrightarrow{OG} = M_1\overrightarrow{OG_1} + M_2\overrightarrow{OG_2}$$

Les masses sont, dans le cas d'une plaque d'épaisseur constante et homogène, proportionnelles aux aires.

$$(S_1 + S_2)\overrightarrow{OG} = S_1\overrightarrow{OG_1} + S_2\overrightarrow{OG_2}$$

$$X_G = \frac{S_1 X_{G1} + S_2 X_{G2}}{S_1 + S_2} = \frac{(4e^2)(-0.5e) + (4e^2)(2e)}{8e^2} = \frac{3}{4}e$$

$$Y_G = \frac{S_1 Y_{G1} + S_2 Y_{G2}}{S_1 + S_2} = \frac{(4e^2)(2e) + (4e^2)(0.5e)}{8e^2} = \frac{5}{4}e$$

Détermination de G sur G1G2

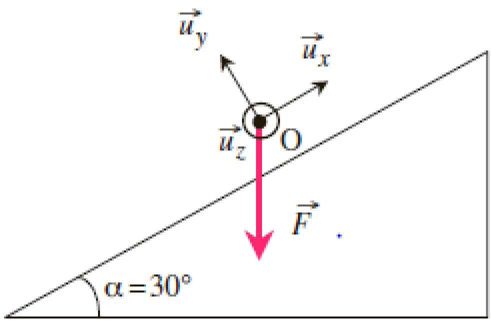
On peut aussi écrire : $S_1\overrightarrow{GG_1} + S_2\overrightarrow{GG_2} = \vec{0} \rightarrow S_1\overrightarrow{GG_1} + S_2\left(\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1G_2}\right) = \vec{0}$

Soit :

$$\overrightarrow{GG_1} = -\frac{S_2}{S_1 + S_2}\overrightarrow{G_1G_2};\, d'ou\ GG_1 = \frac{S_2}{S_1 + S_2} G_1G_2$$

Exercice 3 :

Utilisation des vecteurs en mécanique



Soit la base orthonormée (μ_x, μ_y, μ_z) associé au repère (O, x, y, z). On considère une force $\vec{F}$ représentée par le vecteur de norme $\|\vec{F}\| = F = 3N$.

1- Donner en utilisant le produit scalaire, les coordonnées du vecteur $\vec{F}$ dans la base(μ_x, μ_y, μ_z).

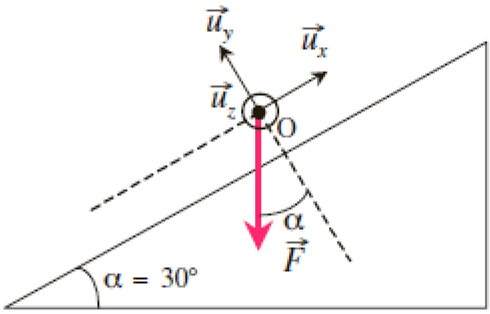
2- On veut calculer le moment $\overrightarrow{M_0}(\vec{F})$, par rapport au point O, de la force appliquée en un point M, dont les coordonnées dans le repère (O, x, y, z) sont (–1; 2; 1) (unité m). Sachant que $\overrightarrow{M_0}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ calculer les coordonnées de $\overrightarrow{M_0}(\vec{F})$ dans la base(μ_x, μ_y, μ_z).

3- En déduire l'angle entre $\overrightarrow{OM}\ et\ \vec{F}$.

4- Comment peut-on vérifier que $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ est perpendiculaire à $\vec{F}$

Solution

1- On utilise la relation vue dans l'exercice 1.1 comporte 3 vecteurs unitaires on a donc $(\vec{\mu}_x, \vec{\mu}_y, \vec{\mu}_z)$:



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{F}.\overrightarrow{\mu_x} \\ \vec{F}.\overrightarrow{\mu_y} \\ \vec{F}.\overrightarrow{\mu_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{F}.\sin\alpha \\ -\vec{F}.\cos\alpha \\ \vec{F}.\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sin 30 \\ -3\cos 30 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.\frac{1}{2} \\ -3.\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -2.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2- La première chose à faire ici est de déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère (O, x, y, z). connaissons les coordonnées des points O (0, 0, 0), M (-1, 2, 1). On obtient pour les composantes de $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x_m - x_o \\ y_m - y_o \\ z_m - z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-0 \\ 2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\overrightarrow{M_o(\vec{F})}$:

$$\overrightarrow{M_o(\vec{F})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1.5 \\ 2.6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0 - 1.2.6 \\ 1.(-1.5) - (-1.0) \\ -1.2.6 - 2.-1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.6 \\ -1.5 \\ 5.6 \end{pmatrix}$$

3- Connaissons le produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ en peut calculer sa norme

$$\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\| = \sqrt{(-2.6)^2 + (-1.5)^2 + 5.1^2} = 3.02\ N.m$$

Par définition $\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\| = \|\overrightarrow{OM}\|.\|\vec{F}\|\sin(\overrightarrow{OM}, \vec{F})$

avec $\|\vec{F}\| = F = 3N$, $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6} = 2.4$ m on obtient

$$\sin(\overrightarrow{OM}, \vec{F}) = \frac{3.02}{3.2.4} = 0.41\ c\acute{e}st\ \grave{a}\ dir\ \overrightarrow{OM}, \vec{F} = 59.5^0$$

4- Il suffit de montrer que le produit scalaire $(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\vec{F} = 0$.

$$(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}).\vec{F} = \begin{pmatrix} -2.6 \\ -1.5 \\ 5.6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1.5 \\ 2.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 :

Un système matériel est un ensemble de points matériels. On distingue :

➤ *Le système matériel indéformable* : Tous les points matériels constituant le système restent fixes les uns par rapport aux autres. Ceci correspond à la définition d'un solide en mécanique.

➤ *Le système matériel déformable* : Tout système ne correspondant pas à un solide. Exemple : l'ensemble de deux mobiles autoporteurs indépendants forment un système déformable. Le système matériel peut subir des actions ou pas de la part de l'extérieur. En particulier, on distingue :

➤ *Le système matériel isolé (ou fermé)* : Il n'existe aucune action venant de l'extérieur et s'exerçant sur le système.

➤ *Le système matériel pseudo-isolé* : Les actions extérieures agissant sur le système se compensent (tout se passe comme si il était isolé).

Exercice 4 : Hockey sur glace

Quelle est la manière la plus efficace pour envoyer le plus loin possible un palet de hockey sur glace :

1- En le jetant en l'air (en supposant qu'une fois arrivé au sol, il ne glisse pas sur la glace) ?
2- En le faisant glisser sur la glace ?

La vitesse initiale du palet (v_0) sera identique dans les deux cas.

Pour le cas 1 :

On négligera les frottements du palet dans l'air. Pour répondre à cette question, on déterminera la distance maximale atteinte par le palet lorsqu'on lance le palet avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle α avec l'horizontale. Il faudra donc déterminer l'angle α permettant d'atteindre la distance maximale.

Pour le cas 2 : On prendra un coefficient de frottement entre la glace et le palet μ_C = 0,02. Puis on déterminera la distance maximale atteinte par le palet lorsqu'il glisse sur la surface de la glace.

Solution

1- Distance maximale atteinte par le palet lorsqu'on lance le palet dans l'air avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle α avec l'horizontale.

Système = palet

Référentiel = référentiel terrestre galiléen

Forces appliquées au système : uniquement le poids $\vec{P}$ (on néglige les forces de frottement de l'air)

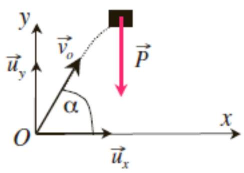
Principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Projection sur *Ox (axe horizontal)* et *Oy (axe vertical vers le haut)* : Conditions initiales : $x(0) = y(0) = 0$ et $\overrightarrow{v_0} = (\cos\alpha)\vec{\mu}_x + (\sin\alpha)\vec{\mu}_y$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = \ddot{x} = 0 \\ a_y = \ddot{y} = -g \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = \dot{x} = v_0\cos\alpha \\ v_y = \dot{y} = -gt + v_0\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow OM = \begin{pmatrix} (v_0\cos\alpha)t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t \end{pmatrix}$$



Pour calculer la distance parcourue par le palet lorsqu'il touche le sol on impose $y = 0$ et on calcule le temps t de vol du palet.

$$y = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$$

On réintroduit ce terme dans l'équation donnant la distance $x(t)$ parcourue par le palet

$$x = v_0\cos\alpha\, t = \frac{2{v_0}^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = \frac{{v_0}^2\sin 2\alpha}{g}$$

Cette expression montre que la distance parcourue par le palet est fonction de l'angle α. La distance parcourue par le palet sera maximale pour sin2α maximal c'est-à-dire égal à 1. On a donc :

$$x = x_{ma}maximal \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin 2\alpha_m = 1 \Rightarrow 2\alpha_m = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_m = 45^\circ$$

$$x_{ma} = \frac{{v_0}^2\sin(2\alpha_m)}{g} = \frac{{v_0}^2}{g}$$

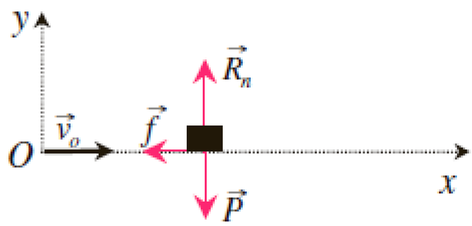
(Cette distance est atteinte uniquement si on jette le palet avec un angle de 45° par rapport à la surface du sol).

2- Distance maximale atteinte par le palet lorsqu'on fait glisser le palet sur la glace en lui donnant une vitesse initiale *vo*.

Système = palet

Référentiel = référentiel terrestre galiléen

Forces appliquées au système : le poids $\vec{P}$, la réaction du sol $\overrightarrow{R_n}$ et la force de frottement solide $\vec{f}$.



Principe fondamentale de la dynamique : $\vec{P} + \vec{f} + \overrightarrow{R_n} = m\,\vec{a}$

Projection sur Ox , Oy :

$$\begin{cases} -\vec{f} = ma_x = m\ddot{x} \\ \overrightarrow{R_n} - mg = ma_y = m\ddot{y} \end{cases}$$

Équations auxquelles il convient d'ajouter la relation entre *f* et *Rn* :

$$f = \mu_c R_n$$

Sachant qu'il n'y a pas de mouvement suivant *y* on a $a_y = 0$, c'est-à-dire :

$$R_n = mg \Rightarrow f = \mu R_n = \mu_c mg_n$$

La relation fondamentale de la dynamique projetée sur l'axe *Ox* devient :

$$-f = \mu_c mg = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = -\mu_c g$$

On en déduit alors la vitesse du palet suivant l'axe *Ox* :

Avec à $t = 0, v_x = v_0$ $on\ a$ $v_x = \dot{x} = -\mu_c gt + v_0$

Et le déplacement suivant *Ox* (avec à $t = 0$, $x = 0$) :

$$x = -\frac{1}{2}\mu_c gt^2 + v_0 t$$

Pour déterminer la distance maximale atteinte par le palet il faut calculer la date $t = t_m$ pour laquelle

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v_x = 0\ (le\ palet\ s'arrete)$$

$$v_x = 0 = -\mu_c gt_m + v_0 \Rightarrow t_m = \frac{v_0}{\mu_c g}$$

En réintroduisant t_m dans l'équation du déplacement selon l'axe *Ox* on obtient la distance maximale x_{mb} parcourue par le palet :

$$x_{mb} = -\frac{1}{2}\mu_c g{t_m}^2 + v_0 t_m \Rightarrow x_{mb} = -\frac{1}{2}\mu_c g\frac{{v_0}^2}{(\mu_c g)^2} + v_0\frac{v_0}{\mu_c g} = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{\mu_c g}$$

Conclusion :

$$\frac{x_{mb}}{x_{ma}} = \frac{\frac{{v_0}^2}{2\,\mu_c g}}{\frac{{v_0}^2}{g}} = \frac{1}{2\mu_c} = \frac{1}{2\,.\,0{,}02} = 25$$

On peut en conclure que faire glisser le palet sur la glace permet d'atteindre une distance 25 fois supérieure à celle atteinte si on le lançait dans l'air.

Remarque : ce résultat reste valable tant que le coefficient de frottement (qui ne dépend que des interactions surface du palet et surface de la glace) reste inférieur à 0,5.