L'automatique : conduite sans intervention humaine des systèmes.

Plusieurs branches de l'automatique :

a) Automatique de système linéaire : ⤇ Déterministe.
   - ⤇ Stochastique (aléatoire).
   - ⤇ Monovariable.
   - ⤇ Multivariable
   - ⤇ Continus
   - ⤇ Echantillonnés.

b) Automatique de système non linéaire.

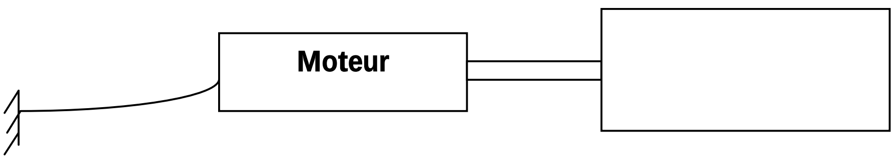
❖ Continus : automatisation en analogique ; avec des composants électroniques, résistances, capacités, amplificateurs.

Automatisation par calculateur : microprocesseur, micro ordinateurs

Système non linéaire (la même diversité que dans le système linéaire)

Notre intérêt dans ce module est l'étude des systèmes linéaires monovariables déterministe continus.

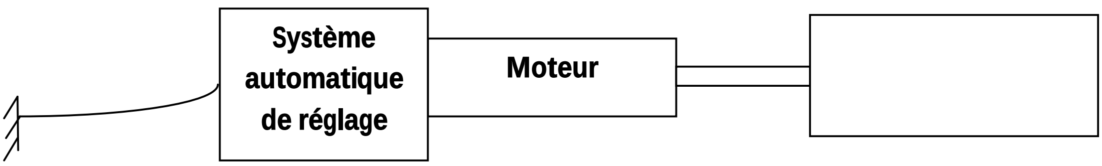
Problème de l'automatique :



- **à vide 3000 tr/min**
- **charge 50Kg : 1500 tr/min**
- **charge 100Kg : 1000 tr/min**

On remarque que la vitesse varie avec la charge.

Souvent on veut garder la vitesse constante quelle que soit la charge : il faut alors construire un système automatique.



Chapitre I : Position du problème

I. Introduction

Ce cours est une introduction à l'automatique des systèmes linéaires. Ainsi le premier chapitre nous permettra de définir l'automatique (position du problème).

Dans le deuxième chapitre nous définirons les systèmes linéaires et leurs modèles.

Ce premier chapitre nous permettra :

- De définir un système automatique.
- De définir les structures possibles d'un système automatique.
- De donner les moyens techniques de mise en œuvre.
- De préciser les étapes de la conception d'un système automatique.

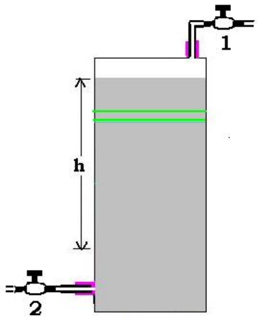
II. Les systèmes automatiques

Aujourd'hui on a très souvent besoin que des grandeurs : physiques, chimiques, économiques, subissent des variations précises (par exemple : on veut que la grandeur reste constante)

Exemples:

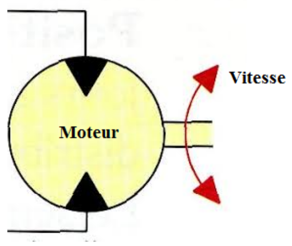
1) Niveau de liquide dans un réservoir.

Objectif : niveau de liquide constant en toute situation.



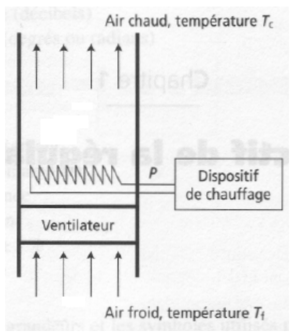
2) Vitesse d'un moteur.

Objectif : vitesse constante quelle que soit la charge.



3) Température d'un four.

Objectif : Température constante.



Automatiser ces systèmes revient à réaliser les différents objectifs sans intervention humaine.

Comment ?

Quelles sont les solutions ?

Elles reposent essentiellement sur deux structures :

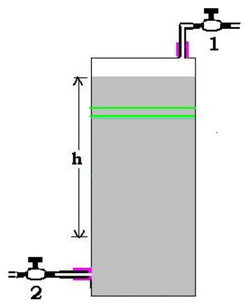
- Boucle ouverte.
- Boucle fermée.

III. Les structures de commande

Les deux structures (ou schéma) possibles peuvent être appliquées l'une ou l'autre suivant les conditions de fonctionnement du système.

1) Structure en boucle ouverte

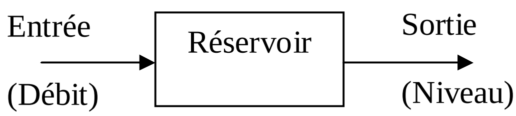
Pour maintenir le niveau constant, il faut que à tout moment le liquide qui entre par **1** soit égale à celui qui sort par **2** ; **1=2**.



a) Définitions importantes

Dans le vocabulaire de l'automatique, le niveau de liquide est appelé **grandeur à commander** ou bien **SORTIE**.

L'ouverture de la vanne 1 ou bien le débit en 1 s'appelle grandeur de commande ou **ENTRÉE**.



b) Problème de la boucle ouverte

Cette structure peut très bien fonctionner lorsque rien ne dérange le système. Mais lorsque une perturbation se présente (pluie, fuite), cette structure échoue.

2) Structure en boucle fermée

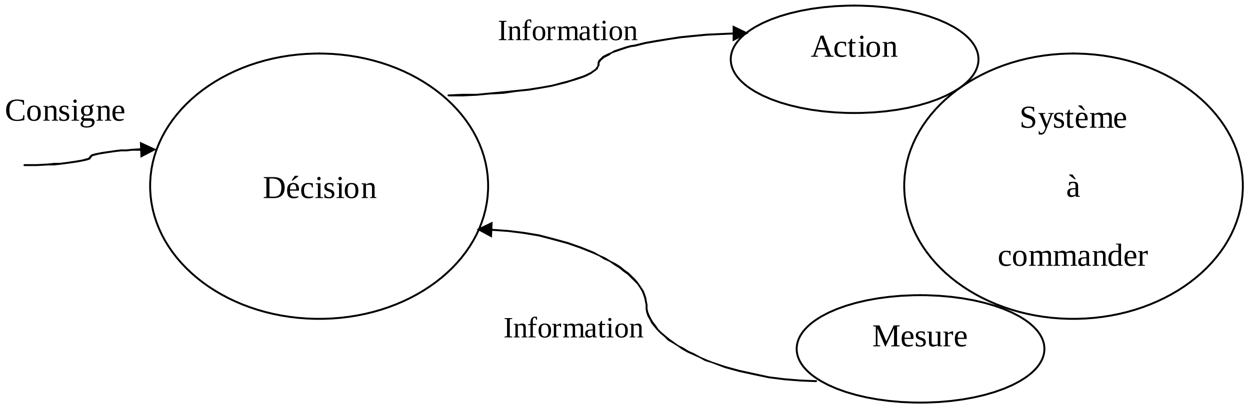
La structure en boucle fermée est envisagée pour régler en particulier le problème des **perturbations**.

Son principe est basé sur le fonctionnement dirigé par un opérateur humain. Pour réaliser son objectif par exemple de maintenir constant le niveau de liquide dans un réservoir, l'opérateur suit les étapes suivantes :

- Mesurer le niveau (la sortie).
- Décider après comparaison (entre consigne et mesure).
- Agir sur (entrée).

Alors, il faut concevoir un système automatique qui réalise ces trois actions (étapes) à la place de l'opérateur.

Donc, pour réaliser un système automatique, il faut trouver un moyen technique pour remplacer ces trois opérations humaines.



Ainsi, on doit construire trois organes principaux ;

- Un organe de mesure qu'on appelle **CAPTEUR**.
- Un organe de décision qu'on appelle **CONTROLEUR**.
- Un organe d'action qu'on appelle **ACTIONNEUR**.

Il faut ensuite les réaliser. Ces organes et la liaison entre eux sont les moyens techniques de réalisation.

IV. Les moyens techniques de réalisation

La première décision à prendre concerne le support d'information qui relie les différents organes.

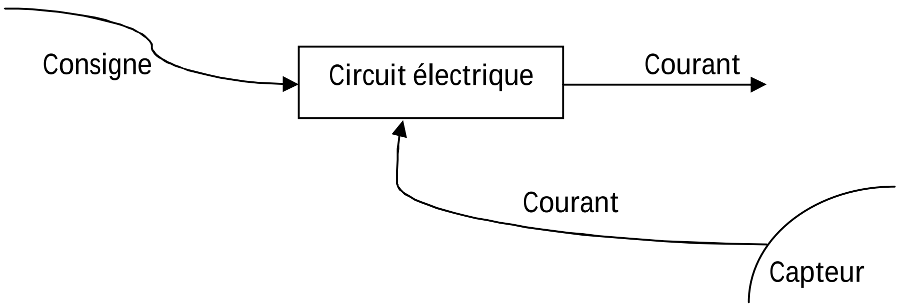
On a trois supports :

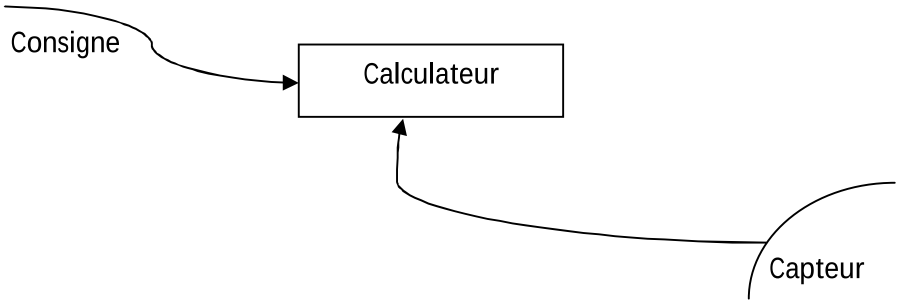
a) Courant électrique faible : Dans ce cas les organes du système automatique sont des fils électrique qui transportent un courant électrique faible, en générale compris entre 4mA et 20mA. Alors dans ce cas le capteur doit délivrer un courant électrique.

Exemple :

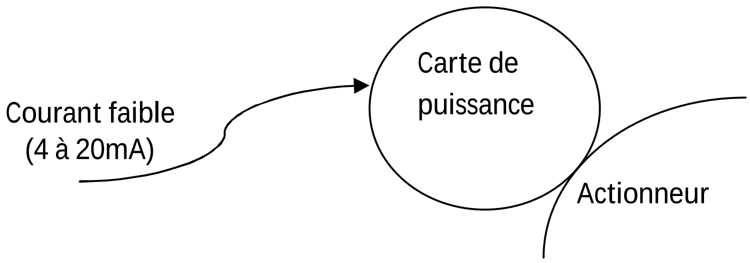
Thermocouple, Mesure de niveau.

b) L'organe de décision : le contrôleur est formé de composants électroniques qui peuvent être de type ***continu*** (R, L, C, Amplificateur) ou ***numérique*** (calculateur).

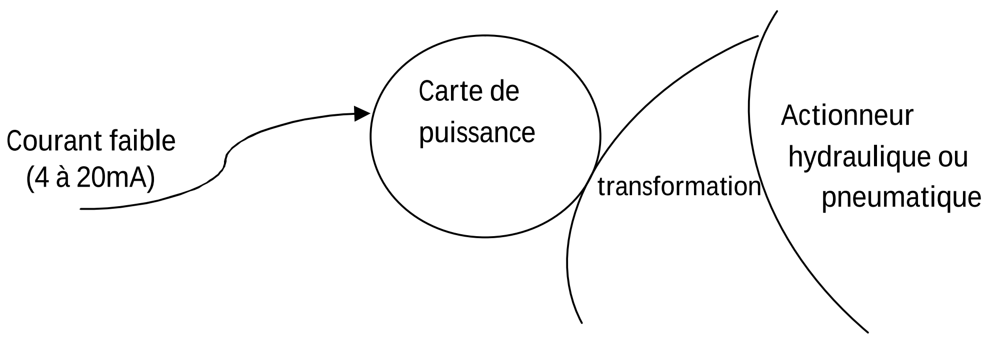




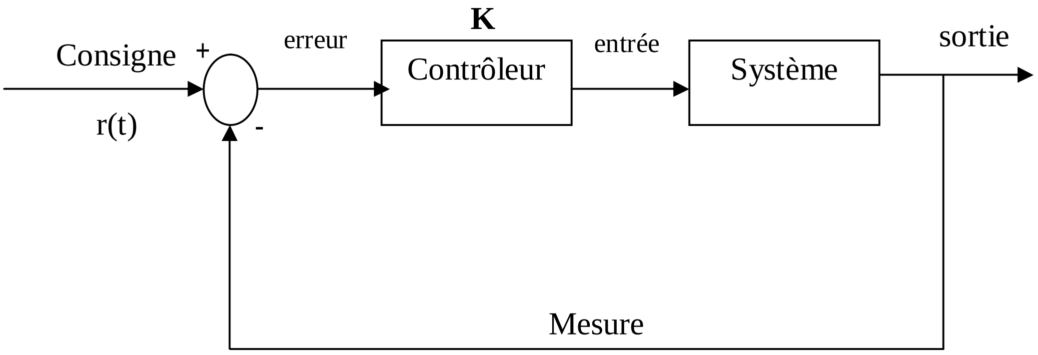
c) La transmission de la décision à l'actionneur se fait par courant électrique (4mA à 20mA), ce courant est alors amplifie pour pouvoir actionner les différents éléments (domaine de l'électronique de puissance).



Autre possibilité :



Boucle fermée :



V. Méthodologie de conception des systèmes de commande automatique

Quelles sont les méthodes, quelles sont les étapes qui permettent de concevoir (développer) un système de commande automatique.

1) Les étapes de la conception

On a la grandeur à commander.

Exemples :

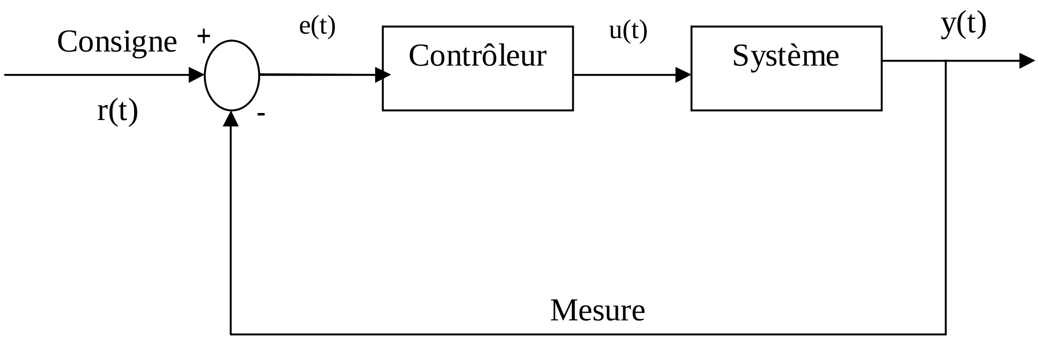
Vitesse d'un moteur, Température d'un four, Equilibrage des ailes d'un avion, Attitude d'un satellite, Concentration d'un produit chimique.

Il faut alors :

Analyse

- Décider quelle est la grandeur de commande.
- Boucle ouverte ou boucle fermée.
  - Si boucle ouverte stop (rare)
  - Si boucle fermée alors :

  Le schéma de commande est par exemple :



- Déterminer le modèle mathématique qui donne la relation entre l'entrée (grandeur de commande) et la sortie (grandeur à commander).
- Les lois ou l'expérience.

Synthèse

- Calculer le contrôleur.
- Trouver la relation entre l'erreur et la grandeur de commande.
- Réaliser le contrôleur.
- Faire les essais en simulation ou modèle réduit.
- Implantation sur site.

2) Les méthodes

a) Modélisation

Les méthodes de modélisation soient classées en deux classes :

- Celles qui utilisent les lois connues de la physique, de la chimie, de l'économie, elles donnent des modèles avec des équations différentielles par rapport au temps.
- Celles basées sur les essais directs sur le système. On obtient des tableaux ou des courbes qui donnent le modèle.

b) Calcul des contrôleurs

Il existe plusieurs méthodes de calcul des contrôleurs qu'on peut les grouper en trois catégories :

- **Méthodes classiques :** travail en générale dans le domaine fréquentiel et temporel basées sur la transformée de Laplace.
- **Méthodes modernes :** travail dans le domaine temporel.
- **Méthodes post-modernes :** combine les deux méthodes.

Chapitre II : Système et Modèle

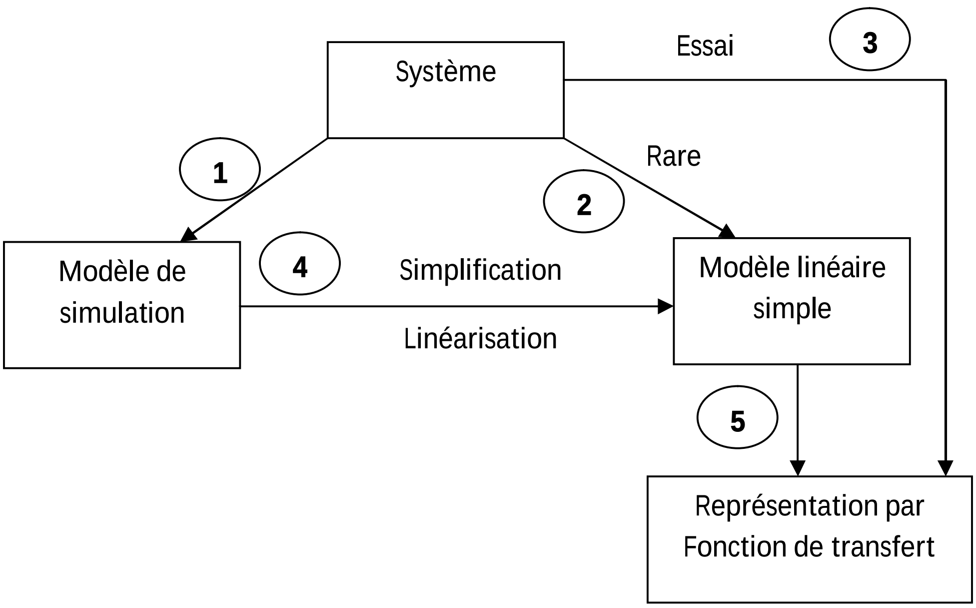
I. Introduction

Un modèle mathématique ***dynamique*** décrit le comportement dans le temps d'un système. En automatique un modèle dynamique est utilisé pour :

- La simulation.
- Le calcul des contrôleurs.

Cependant, on n'utilise pas le même modèle pour la simulation et le calcul du contrôleur. Pour la simulation, on utilise un modèle non linéaire aussi précis que possible. Pour le calcul du contrôleur, dans le domaine de l'automatique linéaire, on utilise un modèle linéaire généralement peu précis, simple obtenu par simplification ou linéarisation du modèle non linéaire.

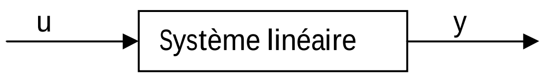
Le modèle linéaire simple nous permet d'utiliser des représentations spéciales. Ainsi au lieu d'utiliser les équations différentielles, on utilise « la fonction de transfert » basée sur la transformée de Laplace.



II. La représentation par fonction de transfert

Nous avons vu que les modèles mathématiques dynamiques sont représentés par des équations différentielles ordinaires ou partielles. En particulier pour les modèles linéaires à coefficients constants, la relation entrée-sortie peut s'écrire :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b u(t)$$



Ces modèles linéaires sont utilisés pour le calcul des contrôleurs. Cependant, les équations différentielles ne sont pas faciles, pour cela on les transforme en équations algébriques à l'aide de la transformée de Laplace.

Le modèle algébrique obtenu s'appelle **Fonction de transfert.**

1) **La transformée de Laplace : Définition et propriétés**
a) **Définition**

Soit une fonction f(t), continue de R →R et soit une variable complexe p=σ+jω, la transformée de Laplace (T.L) de f(t) est une fonction de P définie par :

$$F_b(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

$F_b(t)$ s'appelle T.L bilatérale.

Dans l'étude des signaux et systèmes, la variable "t" est le temps et on peut écrire f(t)=0, t<0.

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

T.L unilatérale.

F(p) est fonction rationnelle.

$$F(p) = \frac{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_1 p^1 + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p^1 + a_0}$$

b) **Propriétés**
i) **Superposition**

Si $F_1(p)$ es la T.L de $f_1(t)$; $L(f_1(t))= F_1(p)$. et si $F_2(p)$ es la T.L de $f_2(t)$; $L(f_2(t))= F_2(p)$.

Alors $L(\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2\, f_2(t))= \alpha_1 F_1(p)+\alpha_2\, F_2(p)$.

ii) **Décalage dans le temps**

Soit f(t) et son décalage f(t-λ)

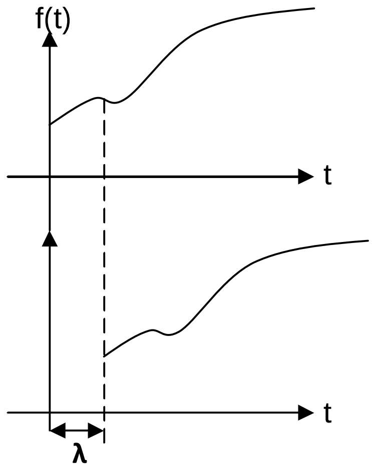
Calculons f(t-λ), t'=t-λ

$$L(f(t-\lambda) = \int_{0}^{+\infty} f(t')e^{-(t'+\lambda)p}dt'$$

$$L(f(t-\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t')e^{-(\lambda)p}e^{-(t')p}dt'$$

$$L(f(t-\lambda) = e^{-(\lambda)p}\int_0^{+\infty} f(t')e^{-(t')p}dt'$$

$$L(f(t-\lambda) = e^{-\lambda p}F(p)$$



iii) Multiplication par une exponentielle

Soit ***f(t)*** et soit $e^{-at}f(t)$

$$L(e^{-at}f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-at}f(t)e^{-pt}dt$$

$$L(e^{-at}f(t) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(a+p)t}dt$$

$$L(e^{-at}f(t) = F(p+a)$$

iv) Dérivation

Soit f(t) et df/dt, L(f(t))=F(p)

$$L\left(\frac{df}{dt}\right) = pF(p) - f(0) \quad si\ f(0) = 0$$

$$L\left(\frac{df}{dt}\right) = pF(p)$$

C'est pour cela que ***p*** est appelé **Opérateur dérivation**

$$L\left(\frac{d^nf}{dt^n}\right) = p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}\left.\frac{df}{dt}\right|_0 - p^{n-3}\left.\frac{d^2f}{dt^2}\right|_0 - \cdots - \left.\frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}\right|_0$$

Si

$$f(0) = \left.\frac{df}{dt}\right|_0 = \left.\frac{d^if}{dt^i}\right|_0 = 0\ \forall i$$

Alors :

$$L\left(\frac{d^nf}{dt^n}\right) = p^nF(p)$$

v) Intégration

$$L\left(\int_0^{+\infty} f(t)dt\right) = \frac{F(p)}{p} + g(0)$$

$$g(\tau) = \int_0^{\tau} f(t)dt \quad si\ g(0) = 0$$

Alors :

$$L\left(\int_0^{\tau} f(t)dt\right) = \frac{F(p)}{p}$$

1/p : intégration.

vi) Convolution

On définit le produit de convolution par :

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{t} f_1(t-\tau)f_2(\tau)dt$$

$$f_1(t) * f_2(t) = F_1(p)F_2(p)$$

vii) Terme de la valeur finale

On a :

$$L(f(t)) = F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

N(p), D(p) : **polynômes**.

Si les racines de D(p) ($D_+(p)=0$) ont la partie réelle négatives

Alors

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to 0} pF(p)$$

viii) Terme de la valeur initiale

De la même façon :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to\infty} pF(p)$$

2) La transformée inverse de Laplace

La transformée de Laplace transforme une fonction f(t) de variable réelle "t" en une fonction de la variable complexe "p" notée F(p).

F(p) est rationnelle pour f(t) continue.

$$L(f(t)) = F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

La transformée inverse nous donne f(t) lorsque on a F(p).

F(p)=L(f(t)) ; L : transformée de Laplace.

f(t) =L^{-1}(F(p)) ; L : transformée inverse de Laplace.

La transformée inverse est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(p)e^{pt}\, dp$$

En générale, on n'utilise pas cette formule, on détermine les transformées inverses à partir des tableaux, lorsque F(p) n'est pas donnée directement sur les tables, on transforme F(p) en une combinaison d'éléments des tables, pour cela, soit :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

$$N(p) = b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_1 p^1 + b_0$$

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p^1 + a_0$$

i) Racine simples

Si D(p)=0 a des racines simples c.à.d.

$$D(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)$$
$$p \neq p_1 \neq p_2 \neq \cdots \neq p_n$$

Alors :

$$F(p) = \frac{A_1}{(p - p_1)} + \frac{A_2}{(p - p_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(p - p_n)}$$
$$A_i = [(p - p_i)F(p)]|_{p=p_i}$$

Exemple :

$$F(p) = \frac{p + 3}{p(p + 2)(p + 5)}$$

Calculer f(t) ?

$$F(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{(p + 2)} + \frac{A_3}{(p + 5)}$$

$$A_1 = [(p - p_1)F(p)]|_{p=p_1}$$

$$A_1 = \left[(p)\frac{p+3}{p(p+2)(p+5)}\right]\Big|_{p=0} = \frac{3}{10}$$

$$A_2 = [(p - p_2)F(p)]|_{p=p_2}$$

$$A_2 = \left[(p+2)\frac{p+3}{p(p+2)(p+5)}\right]\Big|_{p=-2} = \frac{-1}{6}$$

$$A_3 = [(p - p_3)F(p)]|_{p=p_3}$$

$$A_3 = \left[(p+5)\frac{p+3}{p(p+2)(p+5)}\right]\Big|_{p=-5} = \frac{-2}{15}$$

Alors :

$$F(p) = \frac{3}{10}\frac{1}{p} - \frac{1}{6}\frac{1}{(p+2)} - \frac{2}{15}\frac{1}{(p+5)}$$

D'où :

$$f(t) = \frac{3}{10} - \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{2}{15}e^{-5t}$$

ii) Racines multiples

Si D(p)=0 a des racines multiples.

$$D(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)^l \dots$$

$$F(p) = \frac{A_1}{(p - p_1)} + \frac{A_2}{(p - p_2)} + \cdots + \frac{C_1}{(p - p_i)} + \frac{C_2}{(p - p_i)^2} + \cdots + \frac{C_l}{(p - p_i)^l}$$

$$C_{l-j} = \frac{1}{j!}\left[\frac{d^j}{dp^j}((p - p_i)^l F(p))\right]\Big|_{p=p_i}$$

$$j = 0,1,2, \dots, l-1$$

$$j = 0,\ C_l = \frac{1}{0!}[(p - p_i)^l F(p)]$$

Exemple :

$$F(p) = \frac{p+3}{p^2(p+1)(p+2)}$$

Calculer $f(t)=L^{-1}(F(p))$

$$F(p) = \frac{A_1}{(p+1)} + \frac{A_2}{(p+2)} + \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p^2}$$

$$A_1 = [(p+1)F(p)]|_{p=-1}$$

$$A_1 = \left[(p+1)\frac{p+3}{p^2(p+1)(p+2)}\right]\Bigg|_{p=-1} = \frac{p+3}{p^2(p+2)}\Bigg|_{p=-1} \Rightarrow A_1 = -2$$

$$A_2 = [(p+2)F(p)]|_{p=-2}$$

$$A_2 = \left[(p+2)\frac{p+3}{p^2(p+1)(p+2)}\right]\Bigg|_{p=-1} = \frac{p+3}{p^2(p+1)}\Bigg|_{p=-1} \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{4}$$

$$C_2 = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{dp^0}((p)^2F(p))\right]\Bigg|_{p=0} = p^2\frac{p+3}{p^2(p+1)(p+2)}\Bigg|_{p=0} = \frac{3}{2}$$

$$C_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d^1}{dp^1}((p)^2F(p))\right]\Bigg|_{p=0} = \frac{d}{dp}\left[p^2\frac{p+3}{p^2(p+1)(p+2)}\right]\Bigg|_{p=0} = \frac{3}{2}$$

$$C_1 = \left[\frac{-(p^2+6p+7)}{\left((p+1)(p+2)\right)^2}\right]\Bigg|_{p=0} \Rightarrow C_1 = -\frac{7}{4}$$

$$F(p) = \frac{A_1}{(p+1)} + \frac{A_2}{(p+2)} + \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p^2}$$

$$F(p) = \frac{-2}{(p+1)} - \frac{1}{4}\frac{1}{(p+2)} - \frac{7}{4}\frac{1}{p} + \frac{3}{2}\frac{1}{p^2}$$

$$F(p) = \frac{1}{4}\left[\frac{-8}{(p+1)} - \frac{1}{(p+2)} - \frac{7}{p} + \frac{6}{p^2}\right]$$

D’où :

$$f(t) = \frac{1}{4}[-8e^{-t} - e^{-2t} - 7 + 6t]$$

ANNEXE :

- **Solution des équations différentielles ordinaires linéaires :**

Nous allons considérer la solution de l'équation suivante :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = bu(t)$$

Les coefficients $\boldsymbol{a_i}$ sont constants

La solution y(t) est la somme de deux termes :
$y(t)=y_l(t)+y_f(t)$

i) $y_l(t)$ est la solution générale de :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = 0$$

Equation sans second membre. Elle caractérise le ***comportement interne*** du système.
Elle dépende de la structure du système. Elle ne change que si on change la structure du système.

$$y_l = \sum A_i e^{\tau_i t}$$

$\boldsymbol{\tau_i}$: sont les solution de l'équation caractéristique :

$$a_n \tau^n + a_{n-1} \tau^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

$$\tau_i = a + jb$$

- **Analyse de la solution :**

$$y_l(t) = \sum A_i e^{\tau_i t} = A_1 e^{\tau_1 t} + A_2 e^{\tau_2 t} + \ldots + A_n e^{\tau_n t}$$

$y_l(t)$ dépend des τ_i

$$y_{l_i}(t) = A_i e^{\tau_i t} = A_i e^{(a+jb)t} = A_i e^{at} e^{jbt}$$

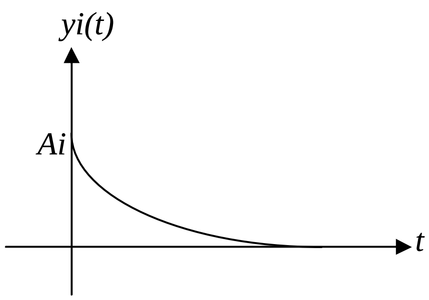
Nous avons plusieurs cas :

1- Si b=0

$$y_{l_i}(t) = A_i e^{at}$$

Si $a_i < 0$: $y_{l_i}(t) = A_i e^{at}$

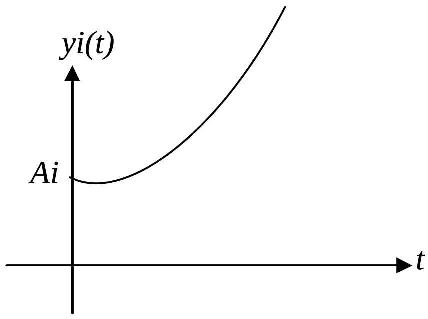
$$t = 0 \quad y_i(0) = A_i$$
$$t \to \infty \quad y_i(t) \to 0$$



Si $a_i>0$: $y_{l_i}(t) = A_i e^{at}$

$t = 0 \quad y_i(0) = A_i$

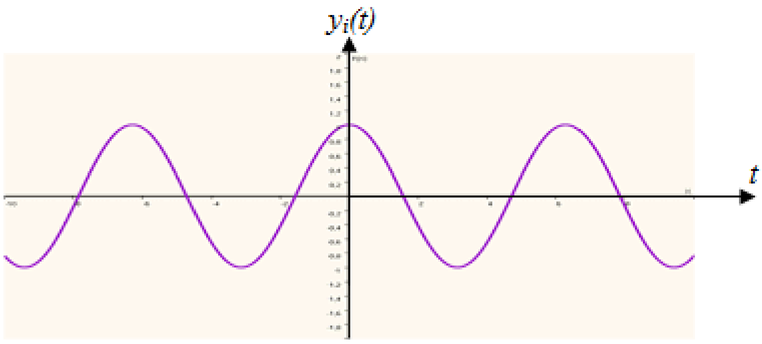
$t \to \infty \quad y_i(t) \to \infty$



2- Si b≠0

$y_{l_i}(t) = A_i e^{(a_i + jb_i)t} = A_i e^{a_i t} e^{jb_i t}$

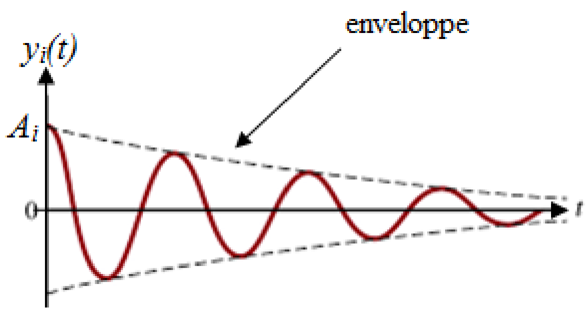
$e^{jb_i t}$: c'est un cosinus de $b_i t$



Si $a_i<0$: $y_{l_i}(t) = A_i e^{(a_i + jb_i)t} = A_i e^{a_i t} e^{jb_i t}$

$t = 0 \quad y_i(0) = A_i$

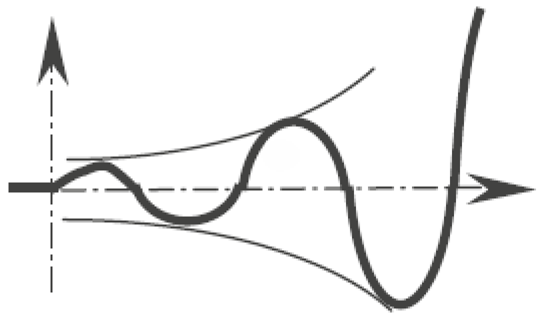
$t \to \infty \quad y_i(t) \to 0$



Si $a_i>0$: $y_{l_i}(t) = A_i e^{(a_i + jb_i)t} = A_i e^{a_i t} e^{jb_i t}$

$t = 0 \quad y_i(0) = A_i$

$t \to \infty \quad y_i(t) \to \infty$



La solution de $y_{li}(t)$ dépend surtout de a_i.

Si $a_i<0$ alors $y_{li}(t)$ converge vers 0.

Si $a_i>0$ alors $y_{li}(t)$ diverge vers ∞.

Si $a_i=0$ alors $y_{l_i}(t) = A_i e^{jb_i t}$.

La réponse libre totale est la somme des $y_{li}(t)$. il suffit qu'un seul $a_i>0$ pour que $y_l(t)$ diverge.

ii) $y_f(t)$ est la réponse forcée :

$y_f(t)$ dépend de $u(t)$.

$y_f(t)$ est une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = u(t)$$

$y(t)=y_l(t)+y_f(t)$

$y_l(t)$: dépend du système

$y_f(t)$: dépend de l'entrée

Exemple :

u(t)=1,

Solution particulière : $y_f(t)=K$.

Alors : $y(t)=y_l(t)+K$.

III. La fonction de transfert :

Nous avons vu qu'un modèle mathématique est décrit par des équations différentielles, pour faciliter le travail il est préférable d'avoir des équations algébriques.

La transformée de Laplace permet de transformer le modèle différentiel en modèle algébrique.

Ce modèle est particulièrement intéressant lorsque les conditions initiales sont nulles, on l'appelle alors la FONCTION de TRANSFERT. Il s'obtient en utilisant la propriété de dérivation de la transformée de Laplace.

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0)$$

Si f(0)=0

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$$

Dans ce cas P peut être considéré comme l'opérateur (symbolique) dérivé.

Exemple :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = bu(t)$$

Conditions initiales nulles.

La fonction de transfert est le rapport de $\frac{Y(p)}{U(p)}$ soit $L(u(t)) = U(p)$, $L(y(t)) = Y(p)$

$$a_n p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + \ldots + a_1 pY(p) + a_0 Y(p) = bU(p)$$

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0} = G(p)$$

Définition :

La fonction de transfert donnée par $\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p)$ est définie pour les systèmes linéaires.

Pour les systèmes non linéaires :

$$\frac{dy(t)}{dt} + y^2(t) = u(t)$$

$$L\left(\frac{dy(t)}{dt} + y^2(t)\right) = L(u(t))$$

$$L\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) + L\left(y^2(t)\right) = L(u(t))$$

Impossible de trouver la fonction de transfert, il faut simplifier le modèle non linéaire pour pouvoir trouver la fonction de transfert.

Définition :

La fonction de transfert G(p) est généralement rationnelle $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$

D(p)=0 : équation caractéristique.

Les racines de D(p) s'appellent les pôles de la fonction de transfert.

Les racines de N(p) s'appellent les zéros de la fonction de transfert.

Les pôles de G(p) correspondent aux racines $\tau_i(i = 1, \dots, n)$ de l'équation caractéristique.

Alors si un système a une fonction de transfert $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$

Stable si (convergent) $p_i=a_i+jb_i$, $a_i<0$, réel(p_i)<0 $\forall i$

Instable si (divergent) $p_i=a_i+jb_i$, $a_i>0$, réel(p_i)>0

Calculer si possible les fonctions de transfert des systèmes :

1) $4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (y_0' = 0, y_0'' = 0, y_0 = 0)$

2) $\frac{dy(t)}{dt} + 14y(t) = u(t) + 3\frac{du(t)}{dt} \quad (y_0' = 0, y_0 = 0,\ u_0 = 0, u_0' = 0)$

3) $\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = u(t-4) \quad (y_0' = 0, y_0 = 0, u_0 = 0)$

4) $\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right)^2 + y(t) = u(t) \quad (y_0' = 0, y_0 = 0)$

5) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2y(t) = u(t) \quad (y_0' = 0,\ y_0 = 1)$

6) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{y(t)} = u(t) \quad (y_0' = 0,\ y_0 = 0)$

7) $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = u(t) - 2\frac{du(t)}{dt} \quad (y_0' = 0,\ y_0 = 0,\ u_0 = 0)$

Définition :

Une fonction de transfert G(p) est propre si deg(Num(G(p))< deg(Dén(G(p))

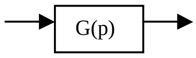
Exemple : $G(p)=\dfrac{p^2+2p+1}{p^3+1}$ (propre)

Une fonction de transfert G(p) est strictement propre si deg(Num(G(p))<= deg(Dén(G(p))

Les systèmes réels sont propres ou strictement propres.

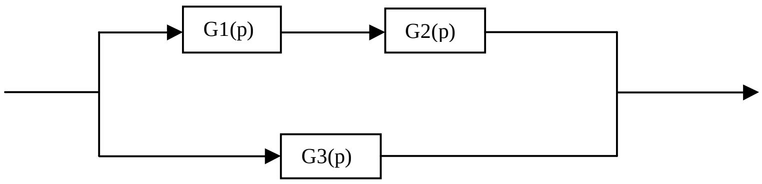
Les Schémas Blocs :

Généralement un système est composé de plusieurs « sous-systèmes » (ou petits systèmes) reliés chaque sous systèmes à sa fonction de transfert (entrée → sortie).

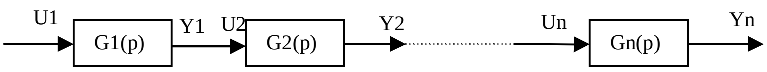
Un schéma bloc est une représentation du système qui décrit chaque sous-systèmes par sa fonction de transfert sous forme d'un rectangle 

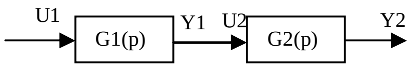
et décrit les connections entre les sous-systèmes.

Exemple :



Définition cascade





$$G(p)=\frac{Y_2(p)}{U_1(p)}=\frac{Y_2(p)}{U_2(p)}.\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{Y_2(p)}{U_2(p)}.\frac{Y_1(p)}{U_1(p)}=G_1(p).G_2(p)$$

Généralement :

$$G(p)=G_1(p).G_2(p)...G_n(p)$$

où $G_1(p)$ $G_2(p)$ … $G_n(p)$ sont en cascade.