2.1 Définition

Les torseurs sont des outils mathématiques très utilisés en mécanique. L'utilisation des torseurs dans l'étude des systèmes mécaniques complexes est très commode car elle facilite l'écriture des équations vectorielles.

Un torseur que nous noterons $[\mathrm{T}]$ est défini comme étant un ensemble de deux champs de vecteurs définis dans l'espace géométrique et ayant les propriétés suivantes :

a) Le premier champ de vecteurs fait correspondre à tout point *A* de l'espace un vecteur $\vec{R}$ indépendant du point *A* et appelé résultante du torseur $[\mathrm{T}\ ]$;

b) Le second champ de vecteur fait correspondre à tout point *A* de l'espace un vecteur $\overrightarrow{M_A}$ qui dépend du point *A*. Le vecteur $\overrightarrow{M_A}$ est appelé moment au point *A* du torseur $[\mathrm{T}\ ]$.

- La résultante $\vec{R}$ et le moment résultant au point A , constituent les éléments de réduction du torseur au point A.

Soit $\vec{R}$ la résultante des n vecteurs: $\vec{V}$ appliqués respectivement aux points : points : . Nous pouvons définir à partir de ce système de vecteurs deux grandeurs :$B_{1},B_{2},B_{3},$......,......... Nous pouvons définir à partir de ce système de vecteurs deux grandeurs :

- La résultante des n vecteurs :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i} \ ;$$

- Le moment résultant en un point A de l'espace est donné par

$$\overrightarrow{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AB_i} \wedge \vec{V_i}$$

Les deux grandeurs constituent le torseur développé au point A associé au système de vecteurs donnés. On adopte la notation suivante :

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \overrightarrow{M}_A \end{cases}$$

2.2 Opérations vectorielles sur les torseurs

2.2.1 Egalité de deux torseurs

Deux torseurs sont égaux (équivalents), si et seulement si, il existe un point de l'espace en lequel les éléments de réduction sont respectivement égaux entre eux. Soient deux torseurs tel que : $[T_1]$ et $[T2]$ tel que : : $[T_1]_p = [T2]_p$ égaux au point *P*, cette égalité se traduit par deux égalités vectorielles

$$[T_1]_P = [T_2]_P \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{R_1} = \vec{R_2} \\ \overrightarrow{M_{1P}} = \overrightarrow{M_{2P}} \end{cases}$$

2.2.2 Somme de deux torseurs

La somme de deux torseurs et $[T_1]$ et $[T2]$ est un torseur $[T]$ dont les éléments de réduction sont respectivement la somme des éléments de réduction des deux torseurs. $\vec{R}$ et $\overrightarrow{M_A}$ sont respectivement la somme des éléments de réduction des deux torseurs.

$$[T]_P = [T_1]_P + [T_2]_P \quad \Leftrightarrow \quad [T]_P = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R_1} + \vec{R_2} \\ \overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{M_{1P}} + \overrightarrow{M_{2P}} \end{cases}$$

2.2.3 Torseur nul

Le torseur nul, noté [0] est l'élément neutre pour l'addition de deux torseurs. Ses éléments de réduction sont nuls en tout point de l'espace

$$[0] = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_P} = \vec{0} \end{cases} \qquad \forall P \in IR^3$$

2.2.4 Invariant vectorielle d'un torseur

La résultante $\vec{R}$ est un vecteur libre, indépendant du centre de réduction du torseur, elle constitue l'invariant vectorielle du torseur [T]p

2.2.5 Invariant scalaire d'un torseur ou automoment

L'invariant scalaire d'un torseur donné, est par définition le produit scalaire des éléments de réductions en un point quelconque de ce torseur.

Le produit scalaire $\vec{R}\,.\,\overrightarrow{M_A}$ est indépendant du point A. Nous avons vu précédemment la formule de transport :

$$\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{R}$$

en faisant le produit scalaire de cette relation par la résultante $\vec{R}$

$$\overrightarrow{M_C} \bullet \vec{R} = \left(\overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{R}\right) \bullet \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{M_C} \bullet \vec{R} = \overrightarrow{M_A} \bullet \vec{R} + \left(\overrightarrow{CA} \wedge \vec{R}\right) \bullet \vec{R}$$

$$\overrightarrow{M_C} \bullet \vec{R} = \overrightarrow{M_A} \bullet \vec{R}$$

2.2.6 Pas du torseur

Nous savons que pour tout point *P* de l'axe central nous avons :

$$\overrightarrow{M_P} = \lambda \; \vec{R}$$

Le produit scalaire de cette expression par l'invariable vectorielle $\vec{R}$ donne :

$$\overrightarrow{M_P} \bullet \vec{R} = \lambda \; \vec{R} \bullet \vec{R} \qquad \text{d'où :} \quad \lambda = \frac{\overrightarrow{M_P} \bullet \vec{R}}{\vec{R}^2}$$

Comme le produit $\overrightarrow{M_p}\;.\,\vec{R}$

est l'invariant scalaire du torseur, la valeur λ est indépendante du point P. λ est appelée ‘‘ Pas du torseur’’ elle n'est définie que si : $\vec{R} \neq \vec{0}$

2.3 Torseurs particuliers

2.3.1 Glisseur

2.3.1.1 Définition

Un torseur de résultante non nulle n'est un glisseur, si et seulement si, son invariant scalaire est nul. Cette définition peut se traduire par :[T] est un glisseur

$$\begin{cases} I[T] = \overrightarrow{M_P} \bullet \vec{R} = 0 & \forall P, \\ avec \quad \vec{R} \neq \vec{0} \end{cases}$$

2.3.2 Torseur couple

2.3.2.1 Définition

Un torseur non nul est un torseur couple, si et seulement si, sa résultante est nulle. Cette définition se traduire par : est un torseur couple [T]

$$\Leftrightarrow \left| \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \exists \ P \ \text{tel que :} \ \overrightarrow{M_P} \neq \vec{0} \end{cases} \right.$$