Cours de Mathématiques

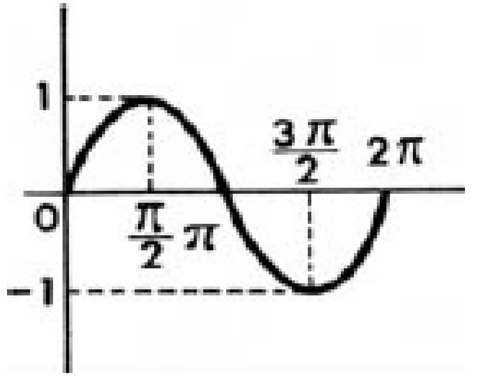
module : **MATHS 1**

Fonctions usuelles simples

Fonctions circulaires

- $y = \sin x$. Période 2π, impaire, $\sin(x+\pi) = -\sin x$

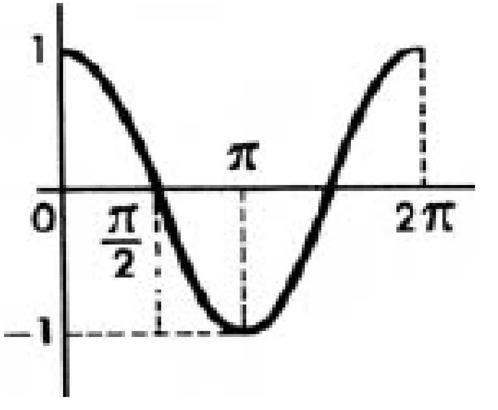
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	$0 \nearrow$	$\frac{1}{2} \nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow$	$1 \searrow$	0



- $y = \cos x$. Période 2π, paire, $\cos(x+\pi) = -\cos x$.

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

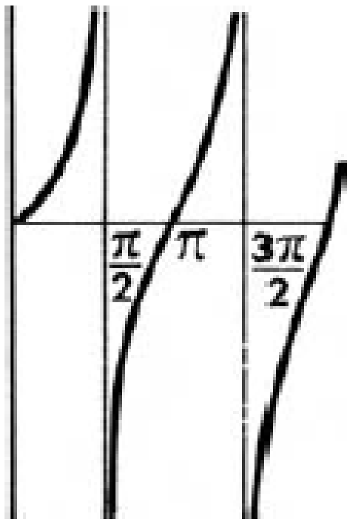
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	$1 \searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \searrow$	$\frac{1}{2} \searrow$	$0 \searrow$	-1



Fonctions circulaires

• $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Période π, impaire.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$0 \nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \nearrow$	$1 \nearrow$	$\sqrt{3} \nearrow$	$+\infty$



• $y = \operatorname{cotan} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$. Période π, impaire.

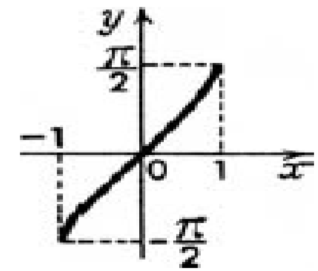
$$\operatorname{cotan} x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{cotan} x$	$+\infty \searrow$	$\sqrt{3} \searrow$	$1 \searrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \searrow$	0

Fonctions circulaires inverses

• $y = \text{Arc}\sin x \Leftrightarrow x = \sin y$, avec $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq +\frac{\pi}{2}$ et $-1 \leq x \leq 1$.

x	-1	0	$+1$
Arc sin x	$-\frac{\pi}{2} \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$



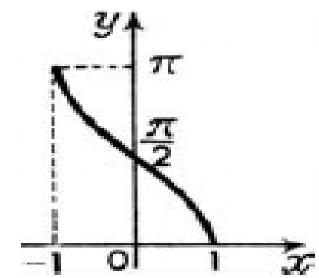
$y = \text{arc}\sin x$.

$$= \begin{cases} \text{Arc}\sin x + 2n\pi \\ \pi - \text{Arc}\sin x + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \sin y.$$

(n entier)

• $y = \text{Arc}\cos x \Leftrightarrow x = \cos y$, avec $0 \leq y \leq \pi$.

x	-1	0	$+1$
Arc cos x	$\pi \searrow$	$\frac{\pi}{2} \searrow$	0



$y = \text{Arc}\cos x$

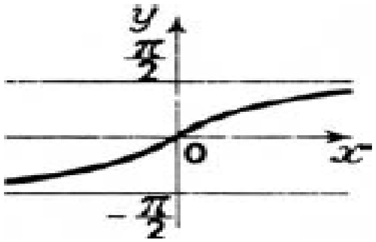
$$= \begin{cases} \text{Arc}\cos x + 2n\pi \\ -\text{Arc}\cos x + 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \cos y.$$

(n entier)

Fonctions circulaires inverses

- $y = \text{Arc tan}\, x \Leftrightarrow x = \tan y$, avec $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$ et $x \in \mathbb{R}$.

x	$+\infty$	0	$+\infty$
Arc tan x	$-\frac{\pi}{2} \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$



$y = \text{Arc tan}\, x$
$= \text{Arc tan}\, x + n\pi \Leftrightarrow x = \tan y$
(n entier).

Relations : $\text{Arc cos}\, x + \text{Arc sin}\, x = \frac{\pi}{2}$, avec $x \in [-1, 1]$

$$\text{Arc tan}\, u + \text{Arc tan}\, v = \text{Arc tan}\, \frac{u+v}{1-uv} + n\pi,$$

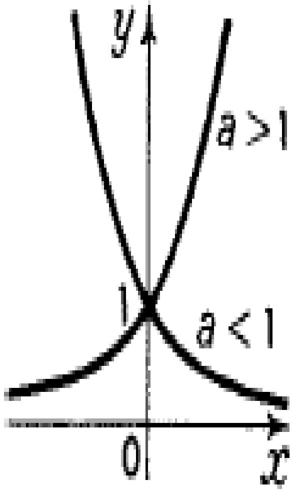
($n = 0$ si $uv < 1$,
$n = +1$ si $uv > 1$, avec u et v positifs,
$n = -1$ si $uv > 1$, avec u et v négatifs).

$$\text{Arc tan}\, x + \text{Arc cotan}\, x = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{Arc cotan}\, x = \begin{cases} \text{Arc tan}\, \frac{1}{x} & \text{si } x > 0, \\ \pi + \text{Arc tan}\, \frac{1}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Arc tan}\, x + \text{Arc tan}\, \frac{1}{x} = \varepsilon \frac{\pi}{2} \quad (\varepsilon = \pm 1, \quad \text{avec} \quad \varepsilon x > 0).$$

Fonction exponentielle $y = a^x$



$a > 1$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	a^x	$0 \nearrow$	$1 \nearrow$	$+\infty$

$0 < a < 1$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	a^x	$+\infty \searrow$	$1 \searrow$	0

si $a' = \frac{1}{a}$, $a'^x = a^{-x}$, les graphes de $y = a^x$ et $y = a'^x$ sont symétriques par rapport à Oy.

Fonction logarithmique $y = log_a x$

Notation : $\log_a x$ est le logarithme de base a de x ;
$\ln x$ — — — e de x, dit logarithme népérien.

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y.$$

RELATIONS FONDAMENTALES :

$\log_a a = 1$, $\ln e = 1$ (e, base des logarithmes népériens $\simeq$ 2,718 28 ...).

$\log_a u^m = m \log_a u$, $\log_a uv = \log_a u + \log_a v$.

$\log_a x = \log_a b \times \log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

$\log_a b \times \log_b a = 1$,

$\log_{10} x = M . \ln x$, $M \simeq 0{,}434\ 29$ ... ;

$e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$.

$\ln(e^x) = x$ pour tout réel x.

Fonction logarithmique $y = log_a x$

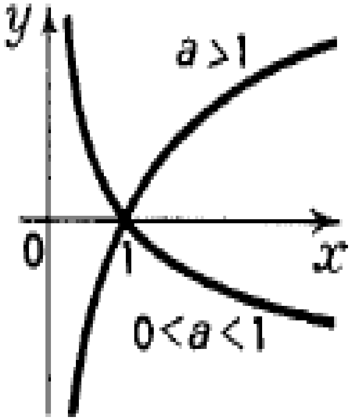
Variation :

$a > 1$

x	0		1		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$0 < a < 1$

x	0		1		$+\infty$
$\log_a x$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



Fonction puissance $y = x^m$

$$y = x^m = e^{m \ln x} \text{ défini pour } x > 0$$

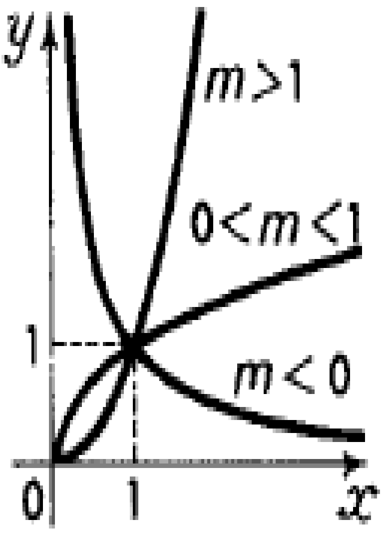
$$\left(x^m \text{ défini aussi pour } x < 0 \text{ si } m \text{ est rationnel de la forme } m = \frac{p}{2q+1} \right)$$

1) $m < 0$

x	0		1		$+\infty$
x^m	$+\infty$	↘	1	↘	0

2) $m > 0$

x	0		1		$+\infty$
x^m	0	↗	1	↗	$+\infty$



Fonctions hyperboliques

$$\text{ch } x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \qquad \text{ch } x + \text{Sh } x = e^{x},$$

$$\text{sh } x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \qquad \text{ch } x - \text{Sh } x = e^{-x},$$

$$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

$y = \text{ch}\, x$ (paire)

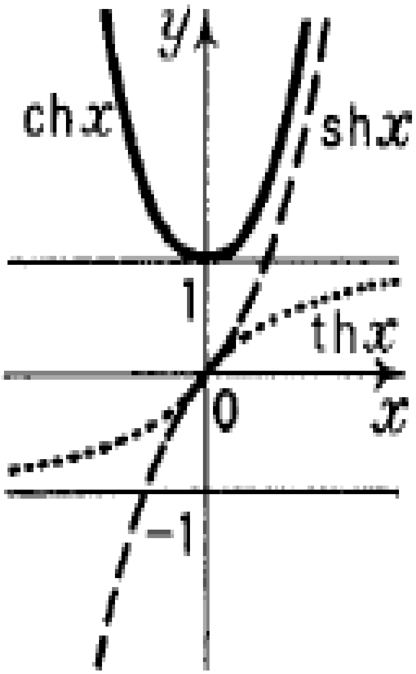
x	0	$+\infty$
$\text{ch}\, x$	$1 \nearrow$	$+\infty$

$y = \text{sh}\, x$ (impaire)

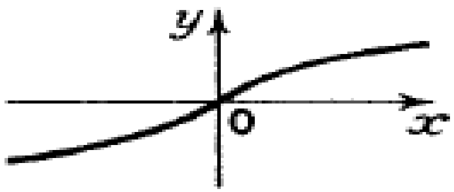
x	0	$+\infty$
$\text{sh}\, x$	$0 \nearrow$	$+\infty$

$y = \text{th}\, x$ (impaire)

x	0	$+\infty$
$\text{th}\, x$	$0 \nearrow$	1

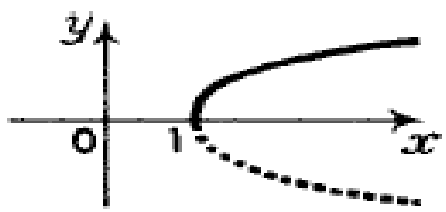


Fonctions hyperboliques inverses



$y = \text{Arg sh } x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \Leftrightarrow x = \text{sh } y.$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Arg sh x	$-\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$



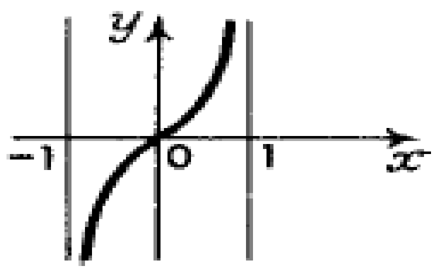
$y = \text{Arg ch } x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \Leftrightarrow x = \text{ch } y,$
avec $y > 0$ (définie pour $x > 1$) .

x	1	$+\infty$
Arg ch x	$0 \nearrow$	$+\infty$

$y = -\text{Arg ch } x = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \Leftrightarrow x = \text{ch } y,$
avec $y < 0$ (définie pour $x > 1$).

$$y = \text{Arg th } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \Leftrightarrow x = \text{sh } y$$

(définie pour $-1 < x < 1$).



x	-1	0	$+1$
Arg th x	$-\infty \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$

Trigonométrie

Trigonométrie plane

RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}. \quad \sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{cotan}^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}.$$

ADDITION DES ARCS.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b},$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b},$$

$$\text{cotan}(a+b) = \frac{\text{cotan}\, a . \text{cotan}\, b - 1}{\text{cotan}\, b + \text{cotan}\, a},$$

$$\text{cotan}(a-b) = \frac{\text{cotan}\, a . \text{cotan}\, b + 1}{\text{cotan}\, b - \text{cotan}\, a},$$

$$\cos(a+b+\cdots+l) = \cos a . \cos b \ldots \cos l\,(1 - S_2 + S_4 - \cdots)$$

$$\sin(a+b+\cdots+l) = \cos a . \cos b \ldots \cos l\,(S_1 - S_3 + S_5 + \cdots)$$

$$\tan(a+b+\cdots+l) = \frac{S_1 - S_3 + S_5 + \cdots}{1 - S_2 + S_4 - \cdots},$$

S_p désignant la somme des produits p à p de tan a, tan b, ..., tan l.

$$\arccos a + \arccos b = \arccos\left[ab - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right]$$

$$\arcsin a + \arcsin b = \arcsin\left[a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right]$$

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$$

$$\text{arc cotan } a + \text{arc cotan } b = \text{arc cotan } \frac{ab-1}{a+b} \cdot$$

MULTIPLICATION DES ARCS ET FORMULE DE MOIVRE.

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a},$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a},$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}.$$

$$(\cos a + \mathrm{i}\sin a)^n = \cos na + i\sin na,$$

$$\cos na = \cos^n a - C_n^2 \cos^{n-2} a \sin^2 a + C_n^4 \cos^{n-4} a \sin^4 \mathrm{a} - \cdots,$$

$$\sin na = C_n^1 \cos^{n-1} a \sin a - C_n^3 \cos^{n-3} a \sin^3 \mathrm{a} + \cdots,$$

$$\tan na = \frac{C_n^1 \tan a - C_n^3 \tan^3 a + \cdots}{1 - C_n^2 \tan^2 a + C_n^4 \tan^4 a - \cdots},$$

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3\cos a \sin^2 a = 4\cos^3 a - 3\cos a,$$

$$\sin 3a = 3\cos^2 a \sin a - \sin^3 a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}.$$

DIVISION DES ARCS :

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}, \qquad \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}},$$

$$\tan\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2 a}}{\tan a}$$

$$= \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{1-\cos a}{\sin a},$$

$$\sin a = C_m^1 \cos^{m-1}\frac{a}{m}\sin\frac{a}{m} - C_m^3 \cos^{m-3}\frac{a}{m}\sin^3\frac{a}{m} + \cdots,$$

$$\cos a = \cos^m\frac{a}{m} - C_m^2 \cos^{m-2}\frac{a}{m}\sin^2\frac{a}{m} + C_n^4 \cos^{m-4}\frac{a}{m}\sin^4\frac{a}{m} - \cdots,$$

$$\tan a = \frac{C_m^1 \tan\frac{a}{m} - C_m^3 \tan^3\frac{a}{m} + \cdots}{1 - C_m^2 \tan^2\frac{a}{m} + C_m^4 \tan^4\frac{a}{m} + \cdots}.$$

EXPRESSION DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES EN FONCTION DE LA TANGENTE DE L'ARC MOITIÉ :

$$\cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}, \quad \sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}, \quad \tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}.$$

TRANSFORMATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2},$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2},$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2},$$

TRANSFORMATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p . \cos q},$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p . \cos q},$$

$$\text{cotan } p + \text{cotan } q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p . \sin q},$$

$$\text{cotan } p - \text{cotan } q = \frac{-\sin(p-q)}{\sin p . \sin q},$$

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2}, \quad \sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2},$$

$$\tan \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{1-\cos a}{\sin a}, \quad \tan^2 \frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{1+\cos a}.$$

$$1+\sin a = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right), \quad 1-\sin a = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right),$$

TRANSFORMATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

$$\frac{1-\sin a}{1+\sin a} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right), \quad \frac{1-\tan a}{1+\tan a} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-a\right),$$

$$\sin a + \cos b = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right),$$

$$\sin a - \cos b = -2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\cos a - \sin b = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right),$$

$$\cos a - \sin b = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a-b}{2}\right),$$

TRANSFORMATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

$$\tan a + \text{cotan } b = \frac{\cos(a-b)}{\cos a . \sin b},$$

$$\tan a - \text{cotan } b = \frac{-\cos(a+b)}{\cos a . \sin b},$$

$$\sin a . \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \; ; \; \cos a . \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$$

$$\sin a . \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2} \; ; \; \sin b . \cos a = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}$$

$$\tan a . \tan b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\cos(a-b) + \cos(a+b)} ; \quad \frac{\tan a}{\tan b} = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{\sin(a+b) + \sin(a-b)} .$$

$$\cos(a+b) . \cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$$

$$\sin(a+b) . \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$$

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES DE QUELQUES ARCS.

Arc en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Angles en degrés	0	30	45	60	90	180	270
sin........................	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos........................	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tan........................	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞
cotan....................	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0

SOMMES DE SINUS ET DE COSINUS D'ARCS EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE

$$\sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \cdots + \sin[a + (n-1)b] =$$

$$= \frac{\sin\left[a + \frac{(n-1)b}{2}\right]\sin\frac{nb}{2}}{\sin\frac{b}{2}},$$

$$\cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \cdots + \cos[a + (n-1)b] =$$

$$= \frac{\cos\left[a + \frac{(n-1)b}{2}\right]\sin\frac{nb}{2}}{\sin\frac{b}{2}},$$

Trigonométrie hyperbolique

DÉFINITIONS :

$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$$

D'où : $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \mathrm{es}$, $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$.

RELATIONS FONDAMENTALES

$$\text{sh}\,(-x) = -\,\text{sh}\,x, \quad \text{ch}\,(-x) = \text{ch}\,x, \quad \text{th}\,(-x) = -\text{th}\,x$$

$$\text{ch}^2\,x - \text{sh}^2\,x = 1, \quad \text{ch}^2\,x = \frac{1}{1-\text{th}^2 x}, \quad \text{sh}^2\,x = \frac{\text{th}^2 x}{1-\text{th}^2 x}$$

$$\text{ch}\,(a+b) = \text{ch}\,a\,\text{ch}\,b + \text{sh}\,a\,\text{sh}\,b,$$

$$\text{ch}\,(a-b) = \text{ch}\,a\,\text{ch}\,b - \text{sh}\,a\,\text{sh}\,b,$$

$$\text{sh}\,(a+b) = \text{sh}\,a\,\text{ch}\,b + \text{sh}\,b\,\text{ch}\,a,$$

$$\operatorname{sh}(a-b)=\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b-\operatorname{sh} b \operatorname{ch} a,$$

$$\operatorname{th}(a+b)=\frac{\operatorname{th} a+\operatorname{th} b}{1+\operatorname{th} a \operatorname{th} b} \;;\quad \operatorname{th}(a-b)=\frac{\operatorname{th} a-\operatorname{th} b}{1-\operatorname{th} a \operatorname{th} b},$$

$$\operatorname{ch} p+\operatorname{ch} q=2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2},$$

$$\operatorname{ch} p-\operatorname{ch} q=2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2},$$

$$\operatorname{sh} p+\operatorname{sh} q=2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2},$$

$$\operatorname{sh} p-\operatorname{sh} q=2 \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2},$$

$$\operatorname{th} p+\operatorname{th} q=\frac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q},$$

$$\operatorname{th} p-\operatorname{th} q=\frac{\operatorname{sh}(p-q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q},$$

$$\operatorname{ch}(a+b+\cdots+l)=\operatorname{ch} a . \operatorname{ch} b \ldots \operatorname{ch} l\,(1+S_2+S_4+S_6+\cdots),$$

$$\operatorname{sh}(a+b+\cdots+l)=\operatorname{ch} a . \operatorname{ch} b \ldots \operatorname{ch} l\,(S_1+S_3+S_5+\cdots),$$

$$\operatorname{th}(a+b+\cdots+l)=\frac{S_1+S_3+S_5+\cdots}{1+S_2+S_4+\cdots},$$

en désignant par S_p la somme des produits p à p des quantités th a, th b, ..., th l.

MULTIPLICATION DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES.

$$\text{ch}\,2a = \text{ch}^2 a + \text{sh}^2 a = 2\,\text{ch}^2 a - 1 = 2\,\text{sh}^2 a + 1 = \frac{1 + \text{th}^2 a}{1 - \text{th}^2 a},$$

$$\text{sh}\,2a = 2\,\text{sh}\,a\,\text{ch}\,a = \frac{2\,\text{th}\,a}{1 - \text{th}^2 a},$$

$$\text{th}\,2a = \frac{2\,\text{th}\,a}{1 + \text{th}^2 a}\ ;$$

$$\text{ch}^2 \frac{a}{2} = \frac{\text{ch}\,a + 1}{2},$$

$$\text{sh}^2 \frac{a}{2} = \frac{\text{ch}\,a - 1}{2},$$

$$\operatorname{th}\frac{a}{2} = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a + 1} = \frac{\operatorname{ch} a - 1}{\operatorname{sh} a} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch} a - 1}{\operatorname{ch} a + 1}},$$

$$(\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)^n = \operatorname{ch} na + \operatorname{sh} na = e^{na},$$

$$\operatorname{ch} na = \operatorname{ch}^n a + C_n^2 \operatorname{ch}^{n-2} a \operatorname{sh}^2 a + C_n^4 \operatorname{ch}^{n-4} a \operatorname{sh}^4 a + \cdots,$$

$$\operatorname{sh} na = C_n^1 \operatorname{ch}^{n-1} a \operatorname{sh} a + C_n^3 \operatorname{ch}^{n-3} a \operatorname{sh}^3 a + \cdots,$$

$$\operatorname{th} na = \frac{C_n^1 \operatorname{th} a + C_n^3 \operatorname{th}^3 a + C_n^5 \operatorname{th}^5 a + \cdots}{1 + C_n^2 \operatorname{th}^2 a + C_n^4 \operatorname{th}^4 a + \cdots},$$

$$\operatorname{ch} 3a = \operatorname{ch}^3 a + 3 \operatorname{ch} a \operatorname{sh}^2 a = 4 \operatorname{ch}^3 a - 3 \operatorname{ch} a,$$

$$\operatorname{sh} 3a = 3 \operatorname{ch}^2 a \operatorname{sh} a + \operatorname{sh}^3 a = 4 \operatorname{sh}^3 a + 3 \operatorname{sh} a,$$

$$\operatorname{th} 3a = \frac{3 \operatorname{th} a + \operatorname{th}^3 a}{1 + 3 \operatorname{th}^2 a}.$$

EXPRESSION DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES EN FONCTION DE *thα/2*

$$\operatorname{ch} a = \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{a}{2}}, \quad \operatorname{sh} a = \frac{2 \operatorname{th} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{a}{2}}, \quad \operatorname{th} a = \frac{2 \operatorname{th} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{a}{2}},$$

SOMME DE sh ET ch EN PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

$$\operatorname{ch} a + \operatorname{ch}(a+b) + \cdots + \operatorname{ch}[a + (n-1)b] = \frac{\operatorname{ch}\left(a + \frac{n-1}{2} b\right) \operatorname{sh} \frac{nb}{2}}{\operatorname{sh} \frac{b}{2}}$$

$$\operatorname{sh} a + \operatorname{sh}(a+b) + \cdots + \operatorname{sh}[a + (n-1)b] = \frac{\operatorname{sh}\left(a + \frac{n-1}{2} b\right) \operatorname{sh} \frac{nb}{2}}{\operatorname{sh} \frac{b}{2}}$$

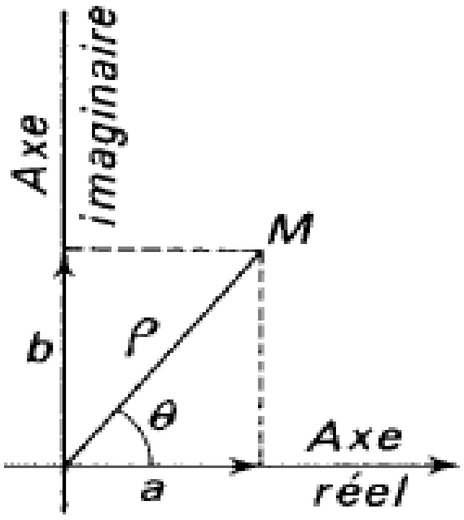
Nombres complexes ou imaginaires

Nombres complexes ou imaginaires

Définition:

Définition. — Nombres z de la forme $z = a + b\,\mathrm{i}$, a et b étant des nombres réels et i le nombre imaginaire tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Formes trigonométrique et exponentielle. — En posant :



$$a = \rho \cos \theta, \qquad b = \rho \sin \theta, \text{ avec } \rho \geq 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[,$$

on a

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta},$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \tan \theta = \frac{b}{a};$$

$$\theta = \text{argument},$$

$$\rho = |a + b\,i| = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{module}.$$

Addition des imaginaires : $z = a + b\,i$, $z' = a' + b'i$

$$z + z' = (a + a') + i(b + b').$$

Différence des imaginaires : $z - z' = (a - a') + i\,(b - b')$.

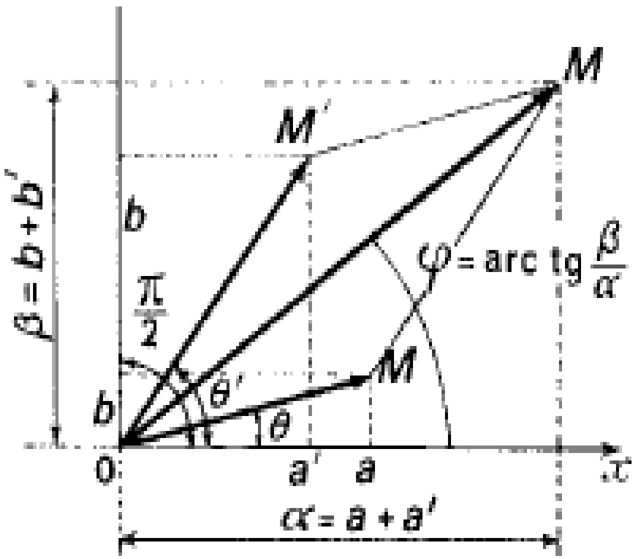
Produit d'imaginaires de la forme :

$$z_n = \rho_n (\cos\theta_n + i\sin\theta_n) = \rho_n e^{i\theta_n}$$

$$Z = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)$$

$$+ i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

$$= \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}.$$



Géométriquement : homothétie + rotation (= similitude).
Argument de Z = somme des arguments des z_i.
Module de Z = produit des modules des z_i.

FORMULE DE MOIVRE :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta = e^{im\theta}.$$

VALEURS PARTICULIÈRES DE L'IMAGINAIRE :

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2.i = -i, \quad i^4 = i^2.i^2 = 1, \quad \text{etc. ;}$$

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i \text{ ;}$$

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1,$$

$$e^{i\pi/2} = i \quad e^{-i\pi/2} = e^{3i\pi/2} = -i \text{ ;}$$

$$e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad -i = \frac{1}{i} = i^{-1} \text{ ;}$$

$$i^{\alpha} = e^{i\pi\alpha/2}, \quad i^{-\alpha} = e^{-i\pi\alpha/2}, \quad (-i)^{\alpha} = i^{-\alpha}, \quad i^{\alpha+1} = -i^{\alpha-1}.$$

La multiplication de $z = \rho\, e^{i\theta}$ par i soit $iz = \rho\, e^{i\theta}.e^{i\pi/2} = \rho\, e^{i(\theta + \pi/2)}$ équivaut à une rotation de $+\pi/2$.
La multiplication par $-$ i, soit $-iz = \rho\, e^{i\theta}.e^{-i\pi/2} = \rho\, e^{(\theta - \pi/2)}$ équivaut à une rotation de $-\pi/2$.

Relations entre imaginaires et fonctions circulaires, hyperboliques et logarithmiques

Formule de Moivre : $(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^m = \cos mx + \mathrm{i} \sin mx = e^{\mathrm{i}mx}$.

$$\cos x = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}},$$

$$\cos \mathrm{i}x = \mathrm{ch}\, x, \quad \sin \mathrm{i}x = \mathrm{i}\, \mathrm{sh}\, x, \quad \tan x = \mathrm{i}\, \mathrm{th}\, x,$$

$$\cos x = \mathrm{ch}\, \mathrm{i}x, \quad \sin x = \frac{1}{\mathrm{i}}\, \mathrm{sh}\, \mathrm{i}x, \quad \tan x = \frac{1}{\mathrm{i}}\, \mathrm{th}\, \mathrm{i}x,$$

$$\mathrm{arc} \sin x = -\,\mathrm{i}\, \mathrm{arg}\, \mathrm{sh}\, \mathrm{i}x = -\,\mathrm{i} \ln (\mathrm{i}x + \sqrt{1 - x^2}),$$

$$\mathrm{arc} \cos x = -\,\mathrm{i}\, \mathrm{arg}\, \mathrm{ch}\, x = \pm\, \mathrm{i} \ln (x + \mathrm{i}\sqrt{1 - x^2}),$$

$$\mathrm{arc} \tan x = -\,\mathrm{i}\, \mathrm{arg}\, \mathrm{th}\, \mathrm{i}x = \frac{1}{2\,\mathrm{i}} \ln \frac{1 + \mathrm{i}x}{1 - \mathrm{i}x},$$

$$\mathrm{arc\, cotan}\, x = \mathrm{i}\, \mathrm{arg}\, \mathrm{coth}\, \mathrm{i}x = \frac{1}{2\,\mathrm{i}} \ln \frac{\mathrm{i}x - 1}{\mathrm{i}x + 1},$$

$$\mathrm{arc} \sin \mathrm{i}x = \mathrm{i}\, \mathrm{arg}\, \mathrm{sh}\, x = \mathrm{i} \ln (x + \sqrt{1 + x^2}),$$

$$\mathrm{arc} \cos \mathrm{i}x = -\,\mathrm{i}\, \mathrm{arg}\, \mathrm{ch}\, \mathrm{i}x = \frac{\pi}{2} \pm \mathrm{i} \ln (x + \sqrt{1 + x^2}),$$

$$\mathrm{arc} \tan \mathrm{i}x = \mathrm{i}\, \mathrm{arg}\, \mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{i}}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Références

Maurice Chossat, Yannick Privat – Aide mémoire- Mathématiques de l'ingénieur- Dunod (2010).