

Cours de Mathématiques

module : **MATHS 1**

Les fonctions réelles à une variable réelle

Notions de fonction

Définitions

Définition 1.1 Une *fonction* d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, où U est une partie de \mathbb{R} .

En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le *domaine de définition* de la fonction f .

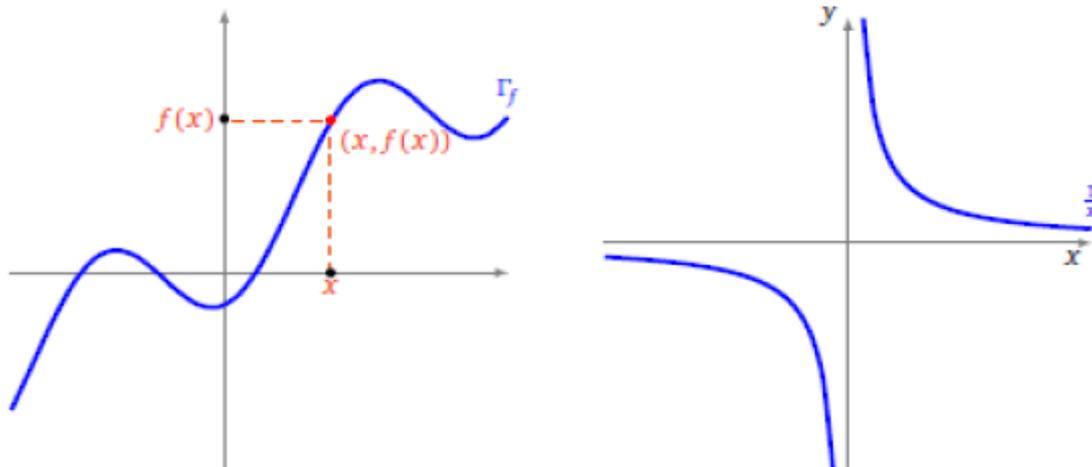
Exemple 1.1 *La fonction inverse :*

$$\begin{array}{rcl} f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

Le **graphe** d'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de \mathbb{R}^2 définie par

$$\Gamma_f = \left\{ (x, f(x)) \mid x \in U \right\}.$$

Le graphe d'une fonction (à gauche), l'exemple du graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ (à droite).



Opérations sur les fonctions

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de \mathbb{R} . On peut alors définir les fonctions suivantes :

- la **somme** de f et g est la fonction $f + g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in U$;
- le **produit** de f et g est la fonction $f \times g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$;
- la **multiplication par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda \cdot f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tout $x \in U$.

Fonctions majorées, minorées, bornées

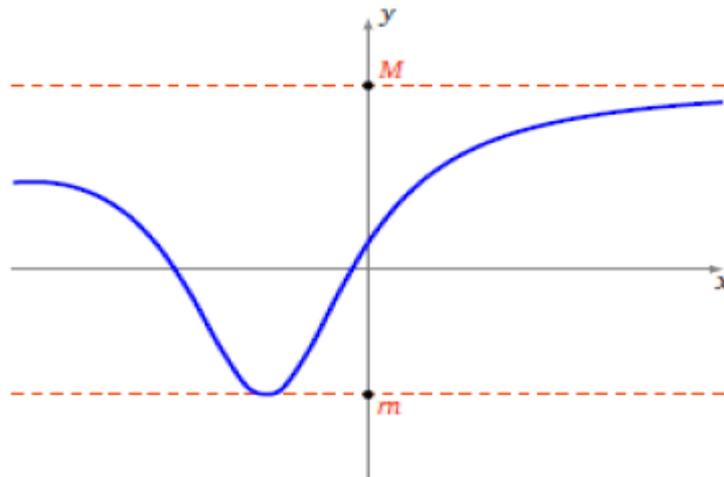
Définition 1.2 Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors:

- $f \geq g$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) > 0$;
- f est dite *constante* sur U si $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \quad f(x) = a$;
- f est dite *nulle* sur U si $\forall x \in U \quad f(x) = 0$.

Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 1.3 Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

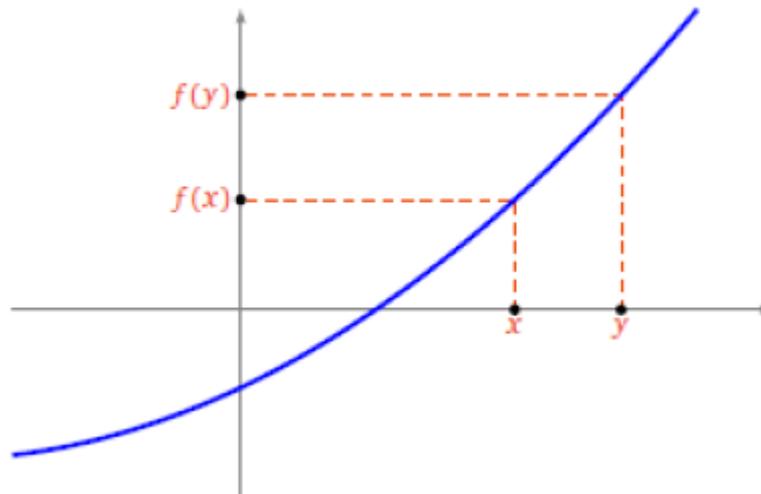
- f est *majorée* sur U si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \quad f(x) \leq M$;
- f est *minorée* sur U si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \quad f(x) \geq m$;
- f est *bornée* sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U , c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \quad |f(x)| \leq M$.



Fonctions croissantes, décroissantes

Définition 1.4 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est *croissante* sur U si $\forall a, b \in U \quad a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$
- f est *strictement croissante* sur U si $\forall a, b \in U \quad a < b \implies f(a) < f(b)$
- f est *décroissante* sur U si $\forall a, b \in U \quad a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$
- f est *strictement décroissante* sur U si $\forall a, b \in U \quad a < b \implies f(a) > f(b)$
- f est *monotone* (resp. *strictement monotone*) sur U si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur U .



Exemple 1.2 • La fonction racine carrée $\begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ est strictement croissante.

• Les fonctions exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et logarithme $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sont strictement croissantes.

• La fonction valeur absolue $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ n'est ni croissante, ni décroissante.

Par contre, la fonction $\begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ est strictement croissante.

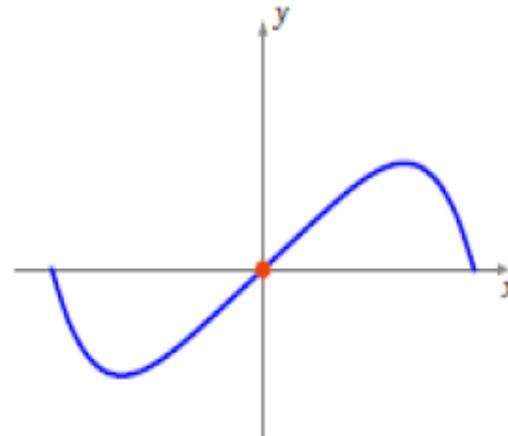
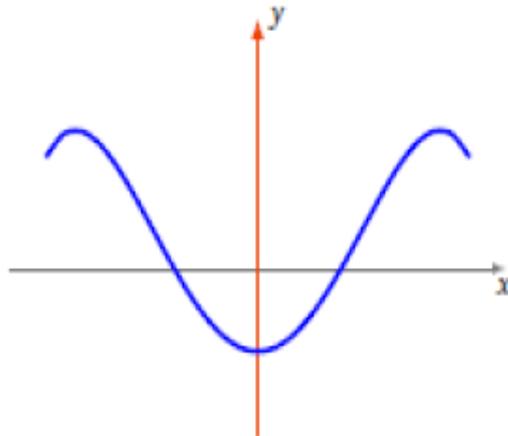
Parité et périodicité

Définition 1.5 Soit I un intervalle de \mathbb{R} symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $] -a, a[$ ou $[-a, a]$ ou \mathbb{R}). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

- f est *paire* si $\forall x \in I \quad f(-x) = f(x)$,
- f est *impaire* si $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique

- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).



Exemple 1.3 • *La fonction $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire. La fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire.*

Définition 1.6 *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite **périodique** de période T si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x)$.*

Exemple 1.4 *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques. La fonction tangente est π -périodique.*

Limites

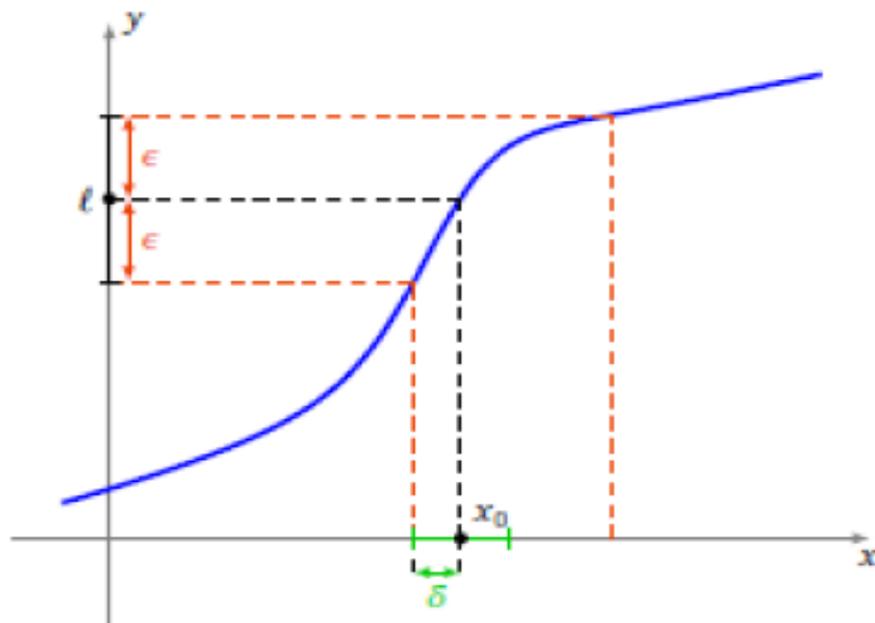
Limite en un point

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I .

Définition 2.1 Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 . On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou bien $\lim_{x_0} f = \ell$.



Remarque 2.1 • L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

• L'inégalité $|f(x) - \ell| < \epsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 2.2 • On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

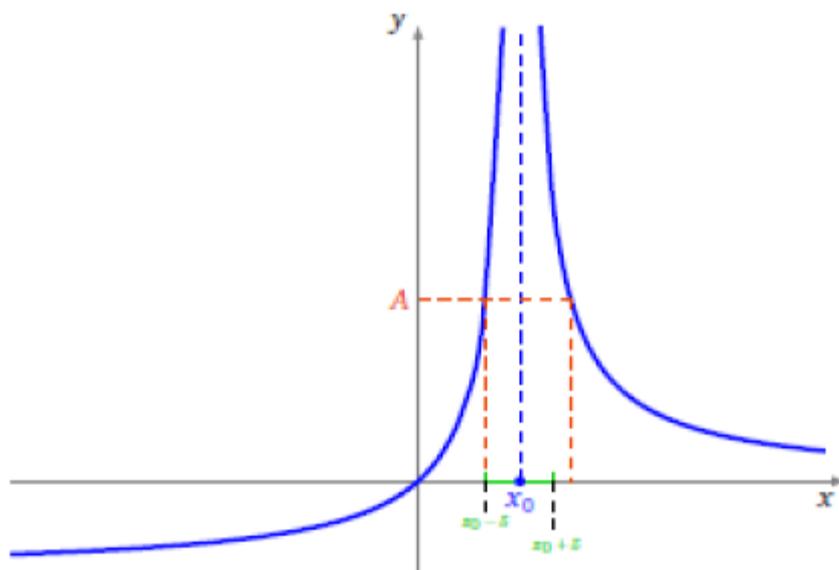
$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

• On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.



Limite en l'infini

Définition 2.3 • Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

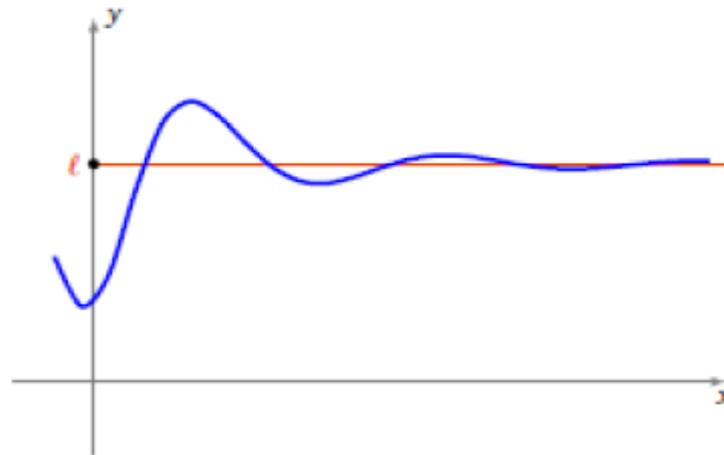
On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$.

• On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $] -\infty, a[$.



Exemple 2.1 *On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:*

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^n} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^n} \right) = 0.$$

Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 2.4 • On appelle *limite à droite* en x_0 de f la limite de la fonction $f|_{]x_0, b[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x_0^+} f$.

• On définit de même la *limite à gauche* en x_0 de f : la limite de la fonction $f|_{]a, x_0[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x_0^-} f$.

• On note aussi $\lim_{x \rightarrow x_0}^> f(x)$ pour la limite à droite et $\lim_{x \rightarrow x_0}^< f(x)$ pour la limite à gauche.

Dire que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à droite en x_0 signifie donc :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Unicité de la limite

Proposition 3.1

Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Proposition 3.2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0}^< f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0}^> f(x) = \ell$$

Exemple 3.1

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \geq 0 \\ 4x + 5 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

On a

$\lim_{x \rightarrow 0}^> f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 0}^< f(x) = 5$ Dans ce cas on dit que f n'admet pas une limite en 0.

Soient deux fonctions f et g . On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$

Proposition 3.3 Si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors :

- $\lim_{x_0} (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x_0} (f + g) = \ell + \ell'$

- $\lim_{x_0} (f \times g) = \ell \times \ell'$

- si $\ell \neq 0$, alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

De plus, si $\lim_{x_0} f = +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$

- si h est une fonction bornée et $\lim_{x_0} f = 0$ alors $\lim_{x_0} (h \cdot f) = 0$.

Proposition 3.4 (Composition de limites)

Si $\lim_{x_0} f = \ell$ et $\lim_{\ell} g = \ell'$, alors $\lim_{x_0} g \circ f = \ell'$.

Proposition 3.5 • Si $f \leq g$ et si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.

• Si $f \leq g$ et si $\lim_{x_0} f = +\infty$, alors $\lim_{x_0} g = +\infty$.

• Théorème des gendarmes

Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, alors g a une limite en x_0 et $\lim_{x_0} g = \ell$.

Continuité en un point

Définition

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 4.1 • On dit que f est *continue en un point* $x_0 \in I$ si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

• On dit que f est *continue sur* I si f est continue en tout point de I .

On note $C(I; \mathbb{R})$ ou $C^0(I; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 4.2 • On dit que f est *continue à droite* en point $x_0 \in I$ si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

• On dit que f est *continue à gauche* en point $x_0 \in I$ si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Exemple 4.1

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x > 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 4x + 5 & \text{si } x < 1 \end{cases} .$$

On a

$\lim_{x \rightarrow 1}^> f(x) = 3 = f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1}^< f(x) = 9 \neq f(1)$ Dans ce cas on dit que f n'admet pas une limite en 1.

f est continue à droite en 1 mais n'est pas continue à gauche en 1.

donc f n'est pas continue en 1

Exemple 4.2 *Les fonctions suivantes sont continues :*

- *la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,*
- *les fonctions \sin et \cos sur \mathbb{R} ,*
- *la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur \mathbb{R} ,*
- *la fonction \exp sur \mathbb{R} ,*
- *la fonction \ln sur $]0, +\infty[$.*

Proposition 4.1 Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

- $\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),
- $f + g$ est continue en x_0 ,
- $f \times g$ est continue en x_0 ,
- si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0 .

Proposition 4.2 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Dérivée

Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 6.1 f est *dérivable en x_0* si le *taux d'accroissement* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0 .

La limite s'appelle alors le *nombre dérivé* de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Remarque 6.1 Autre écriture de la dérivée.

- f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie.

Définition 6.2 f est *dérivable sur I* si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$.

La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la *fonction dérivée* de f , elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Exemple 6.1 La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 2x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit : $f'(x) = 2x$.

Définition 6.3 • f est dérivable à *droite* en x_0 , si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$

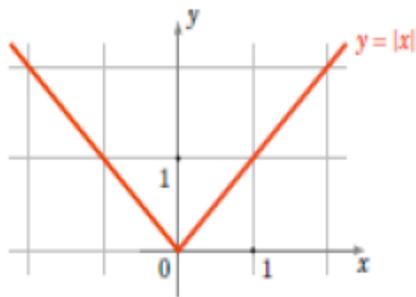
• f est dérivable à *gauche* en x_0 , si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$

• f est dérivable en $x_0 \iff f$ est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Proposition 6.1 Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .

Remarque 6.2 La réciproque est *fausse* : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



En effet, le taux d'accroissement de $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$ vérifie :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Il y a bien une limite à droite ($f'_d(0) = +1$), une limite à gauche ($f'_g(0) = -1$) mais elles ne sont pas égales : il n'y a pas de limite en 0. Ainsi f n'est pas dérivable en $x = 0$.

Cela se lit aussi sur le dessin, il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche, mais elles ont des directions différentes.

Proposition 6.2 Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I . Alors pour tout $x \in I$

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ (si $f(x) \neq 0$)
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (si $g(x) \neq 0$)

Remarque 6.3 *Il est plus facile de mémoriser les égalités de fonctions :*

$$(f + g)' = f' + g' \quad (\lambda f)' = \lambda f' \quad (f \times g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Preuve 6.1 *Prouvons par exemple $(f \times g)' = f'g + fg'$.*

Fixons $x_0 \in I$. Nous allons réécrire le taux d'accroissement de $f(x) \times g(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0). \end{aligned}$$

Remarque 6.3 *Il est plus facile de mémoriser les égalités de fonctions :*

$$(f + g)' = f' + g' \quad (\lambda f)' = \lambda f' \quad (f \times g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Preuve 6.1 *Prouvons par exemple $(f \times g)' = f'g + fg'$.*

Fixons $x_0 \in I$. Nous allons réécrire le taux d'accroissement de $f(x) \times g(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0). \end{aligned}$$

Dérivée de fonctions usuelles

u représente une fonction $x \mapsto u(x)$.

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
\sqrt{u}	$\frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u' e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Composition

Proposition 6.3 *Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 de dérivée :*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Preuve 6.2

$$\begin{aligned} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} g'(f(x_0)) \times f'(x_0). \end{aligned}$$

Exemple 6.2 Calculons la dérivée de $\ln(1+x^2)$. Nous avons $g(x) = \ln(x)$ avec $g'(x) = \frac{1}{x}$;
et $f(x) = 1+x^2$ avec $f'(x) = 2x$. Alors la dérivée de $\ln(1+x^2) = g \circ f(x)$ est

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(1+x^2) \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée.

Si la fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la **dérivée seconde** de f .

Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$$

Si la **dérivée n -ième** $f^{(n)}$ existe on dit que f est **n fois dérivable**.

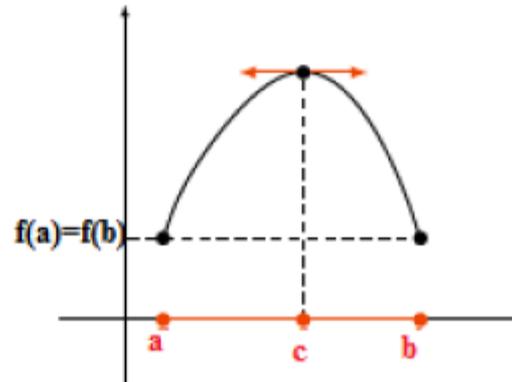
Si f est **n fois dérivable** sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I on dit que f est classe $C^n(I, \mathbb{R})$.

Théorème de Rolle

Théorème 6.1 (Théorème de Rolle) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

Théorème des accroissements finis

Théorème 6.2 (Théorème des accroissements finis) *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b - a)$$

Preuve 6.3 *Posons $\ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $g(x) = f(x) - \ell \cdot (x - a)$.*

Alors $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b - a) = f(a)$.

Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or $g'(x) = f'(x) - \ell$. Ce qui donne $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Fonction croissante et dérivée

Corollaire 6.1 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geq 0 \quad \iff \quad f \text{ est croissante ;}$
2. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leq 0 \quad \iff \quad f \text{ est décroissante ;}$
3. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) = 0 \quad \iff \quad f \text{ est constante ;}$
4. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) > 0 \quad \implies \quad f \text{ est strictement croissante ;}$
5. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) < 0 \quad \implies \quad f \text{ est strictement décroissante.}$

Remarque 6.4 La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse.

Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Règle de l'Hospital

Corollaire 6.2 (Règle de l'Hospital) Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$.

On suppose que

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, (\text{ou } \infty)$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Exemple 6.3 Calculer la limite en 1 de $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. On vérifie que :

- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$,
- $g(x) = \ln(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{x}$,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3.$$

Donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3.$$

Références

Maurice Chossat, Yannick Privat – Aide mémoire- Mathématiques de l'ingénieur- Dunod (2010).

Djebbar Samir-Cours Maths 1 Et Exercices Avec Solutions

Mohamed Mehabali-Mathématique 1, Fonction d'une variable réelle. Première année Universitaire 2011 .

Marc Hindry -*Cours mathématiques première année (L1)* .