Chapitre I OUTILS MATHématiques

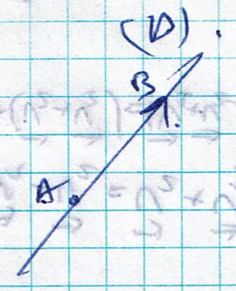
Définition d'un vecteur :

On appelle vecteur ($\overrightarrow{AB}$) un segment de droite possédant une origine (A) et une extrémité (B). et définit par :

Sa direction (la droite (Δ)).

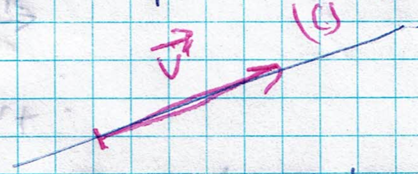
Son sens (du point A ver le point B).

Sa longueur (la distance AB).



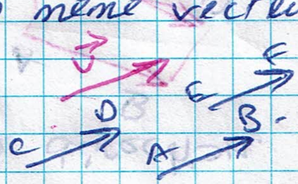
Types de vecteurs.

→ Un vecteur est dit lié si son point d'application est fixe.



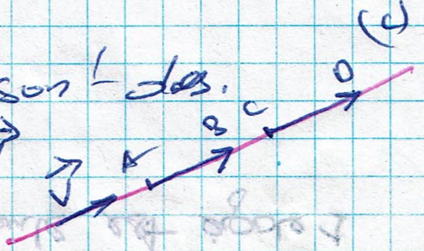
→ Un vecteur est dit libre si son point d'application et sa direction sont inconnus et seuls les autres composants sont connus.

Exemple : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont des ~~représenta~~ Représentants d'un même vecteur $\vec{V}$



→ Un vecteur est dit glissant si son point d'application n'est pas fixé

Exemple : les vecteur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants d'un même vecteur $\vec{V}$

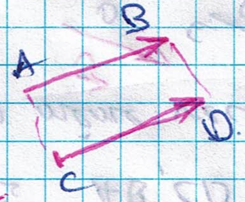


→ vecteur est dit unitaire si son module est égale 1

Calcul vectoriel

vecteur égaux

Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont considéré égaux s'ils ont le même longueur, la direction et le même sens.



Addition de vecteurs

soit deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ ~~avec~~ la somme de ces vecteurs est un vecteur $\vec{V_3}$ tel que:
Si (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) sont les composantes des vecteurs $\vec{V_1}$ et V_2 respectivement.

$$\vec{V_1} = a_1 \vec{i}\ a_2 \vec{J}\ a_3 \vec{K}$$
$$\vec{V_2} = b_1 i\ b_2 \vec{J}\ b_3 \vec{K}$$

la somme des deux vecteurs $\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_3} = (a_1+b_1) i + (a_2+b_2) \vec{J} + (a_3+b_3) \vec{K}$

Propriétés

- la somme vectorielle est commutative $\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_2} + \vec{V_1}$
  vectorielle est associative: $\vec{V_1} + (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = (\vec{V_1} + \vec{V_2}) + \vec{V_3}$

$\vec{V} = -\vec{AB} = \vec{B A}$ dit vecteurs opposé.

- pour soustraire un vecteur il suffit d'ajouter son opposé tel que:- $\vec{AB} - \vec{CD} = AB + \vec{DC}$

Multiplication par un scalaire

soit x un nombre réel et $\vec{V_1}$ vecteur, la multiplication de $\vec{V_1}$ par x est un vecteur $\vec{V_2}$ tel que:

$$\vec{V_1} = xa_1\vec{i} + xa_2\vec{j} + xa_3\vec{k}$$

- la direction de vecteur est conservée.
- la logueur du vecteur est multipliée $|x|$.

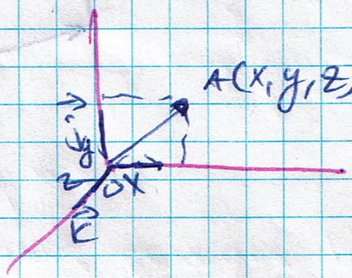
si x est positif le sens du vecteur reste le même

si x est négatif le sens change.

Propriétés
$$1.\vec{V_1} = \vec{V_1}$$
$$x(y.\vec{V_1}) = (x.y)\vec{V_1}$$
$$x\vec{V_1} + y\vec{V_1} = (x+y)\vec{V_1}$$
$$x\vec{V_1} + x\vec{V_2} = x(\vec{V_1}+\vec{V_2})$$

Composantes d'un vecteurs.

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Les réel $x.y.z$ sont Alors appelé les posantes du vecteur $\vec{V}$

Norme ou module d'un vecteur.

le module d'un vecteur $\vec{AB}$ represente la distance entre le pointe A et B. noté $\|\vec{AB}\|$ Tel que:

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Exemple soit $A(2,5)$ et $B(-3,1)$ deux points et $\vec{AB}$ un vecteur. Determiner les cordonnées et le module du vecteur $\vec{AB}$.

$$\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}, \quad \vec{AB}\begin{pmatrix} -3-2 \\ 1-5 \end{pmatrix} \quad \vec{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

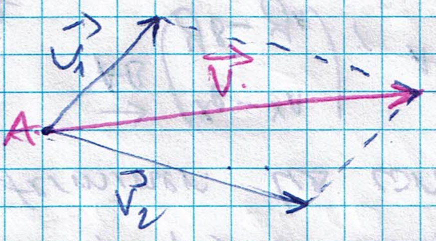
$$\|\vec{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} \Rightarrow \text{Donc } \|\vec{AB}\| = \sqrt{45}.$$

Opération sur les vecteurs :

Additions des vecteurs.

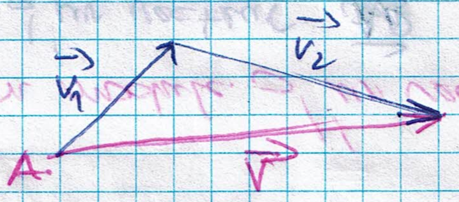
La sommations des deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$

→ Règle du parallélogramme.

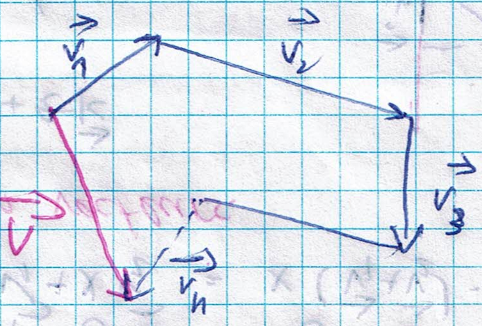


$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$

→ Règle du triangle.



→ Règle du polygone.

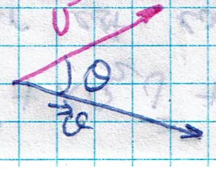


Produit des vecteurs.

Produit scalaire des vecteurs.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est égale à :

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \|\vec{U}\| . \|\vec{V}\| \cos(\vec{U},\vec{V}) = \|\vec{U}\| . \|\vec{V}\| \cos\theta = U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z$$



Un produit scalaire de deux vecteurs est :

- Commutatif : $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = \vec{V_2}\cdot\vec{V_1}$

- Associatif : par apport la multiplication d'un scalaire :

$$\lambda(\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}) = (\lambda\vec{V_1})\cdot\vec{V_2} = \vec{V_1}\cdot(\lambda\vec{V_2}).$$

- Distributif : par apport la somme vectorielle.

$$\vec{V_1}\cdot(\vec{V_2}+\vec{V_3}) = \vec{V_1}\cdot\vec{V_2}+\vec{V_1}\cdot\vec{V_3}$$

- Nul si seulement si les deux vecteurs orthogonaux.

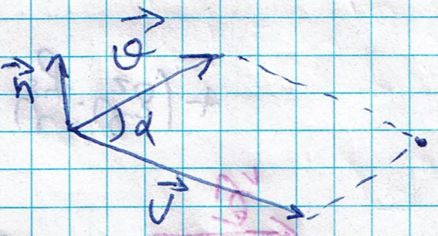
$$\vec{V_1}\perp\vec{V_2} \Leftrightarrow \vec{V_1}\cdot\vec{V_2}=0.$$

→ Produit vectoriel.

Le produit vectoriel de deux vecteurs dont le Resultat comme son nom l'indique sera un vecteur.

Le produit de deux vecteurs $\vec{U}(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}(x_2, y_2, z_2)$.

$$\vec{U}\wedge\vec{V} = \|\vec{U}\|\cdot\|\vec{V}\| \sin\alpha\,\vec{n}$$



Etant que : $\vec{n}$ le vecteur unitaire normale à la surface

le produit vectoriel est :

→ Distributif à gauche et à droite pour la somme vectorielle

$$(\vec{V_2}+\vec{V_3})\cdot\vec{V_1} = \vec{V_2}\wedge\vec{V_1}+\vec{V_3}\wedge\vec{V_1} \quad \text{et}$$

$$\vec{V_1}\wedge(\vec{V_2}+\vec{V_3}) = \vec{V_1}\wedge\vec{V_2}+\vec{V_1}\wedge\vec{V_3}$$

→ Associatif par apport la multiplication par un scalaire :

$$\lambda(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}) = (\lambda\vec{V_1})\wedge\vec{V_2} = \vec{V_1}\wedge(\lambda\vec{V_2}).$$

→ Antisymétrique : ou anticommutatif.

$$(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}) = (\vec{V_2}\wedge\vec{V_1})$$

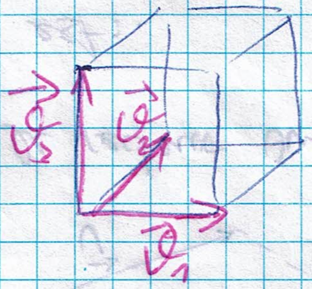
Nul si ~~le~~ et seulement si les deux vecteurs sont sclaires:

$$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 0$$

Produit mixte:

Le produit mixte est donc un scalaire ~~égale~~ égal au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

$$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \\ v_{3x} & v_{3y} & v_{2z} \end{vmatrix}$$



$$= v_{1x}(v_{2y} \cdot v_{3z} - v_{3y} \cdot v_{2z}) +$$

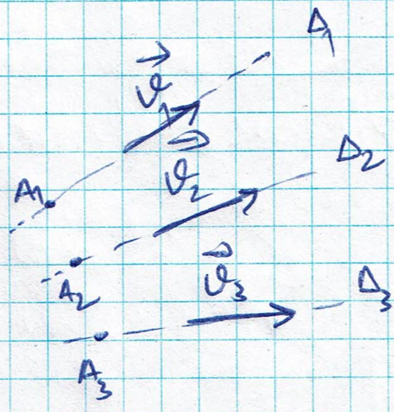
Le produit ~~nul~~ mixte est nul, si:
- les trois vecteurs sont dans le même plan.
- l'un des vecteurs est nul.

→ ~~V~~ Torseur

→ Définition:

Le torseur est un outil mathématique privilégié de la mécanique du solide. Il lui permet une représentation condensée et simplifiée des action mécaniques, des vitesse et diverse autres grandeurs.

Un ~~ten~~ torseur défini par ces deux éléments dits éléments de réduction :-



un vecteur noté $\vec{R}$ (

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i$$

un champ de vecteur $\vec{M}$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{OA_i} \wedge \vec{v}_i$$

Alors, le torseur T au point O s'écrit :-

$$\{T\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{Bmatrix} \text{ ou } \{T\}_O = \{\vec{R}, \vec{M}_O\}.$$

torseur de force. $\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$ $\vec{M}_A$ est le moment de la force.

Addition de torseurs

La somme de deux torseurs $\{T\}$ et $\{T\}_2$ est un torseur $\{T\}_A$ dont les éléments de Réduction sont respectivement la somme des éléments de Réduction des deux torseurs $\{T_1\}$ et $\{T\}_2$:

$$\{T\}_A = \{T\}_1 + \{T\}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{1A} + \vec{M}_{2A} \end{Bmatrix}_A.$$

Produit par un scalaire :

On définit le produit par un scalaire du torseur

$$\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$$ par le torseur :-

$$\{T\}' = d\{T\} = \begin{Bmatrix} d\vec{R} \\ d\vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$$

Produit de deux torseurs On appelle Comoment

$$\phi(A) = \{T\}_1 \times \{T\}_2 = \vec{R}_1 . \vec{M}_{2A} + \vec{R}_2 \vec{M}_{1A}$$

type des torseurs :

– Couple : On appelle couple un torseur dont la Résultante et nulle.

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$$

– Glisseur :

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

– torseur nul :

$$\{0\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}.$$

torseur quelconque :

un torseur quelconque, si et seulement si, son invariant scalaire n'est pas nul $\vec{R} . \vec{M}_A \neq \vec{0}$