TD 05

Diagramme de Nyquist

Exercice 01 :

Tracer les courbes en polaires des fonctions de transferts suivantes :

1) $G_1(p) = \dfrac{1}{(p+1)}$

2) $G_2(p) = \dfrac{1}{p(p+1)}$

Si on remplace le numérateur par K, pour quelle valeur de K ce système est stable ?

Solution :

1) $G_1(p) = \dfrac{1}{(p+1)}$ $\qquad G_1(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega+1)}$

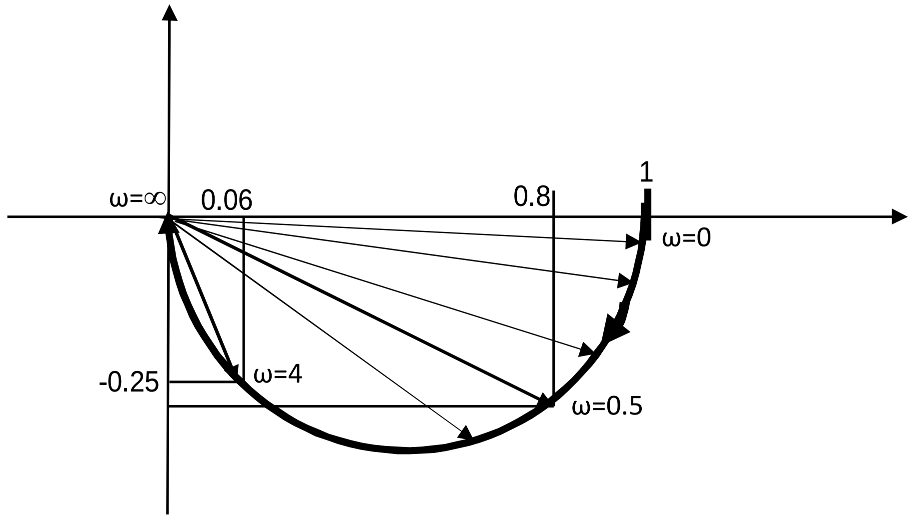
$$G_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} = \frac{1(-j\omega+1)}{(j\omega+1)(-j\omega+1)} = \frac{1-j\omega}{\omega^2+1} = \frac{1}{\omega^2+1} - j\frac{\omega}{\omega^2+1}$$

$$Réel(G_1(j\omega)) = \frac{1}{\omega^2+1}, \quad \mathrm{Im}(G_1(j\omega)) = -\frac{\omega}{\omega^2+1}$$

$$\left|G_1(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -arctg\omega$$

Lorsque $\omega \to 0$ $\quad \left|G_1(j\omega)\right| = 1, \quad \angle G(j\omega) = 0$

Lorsque $\omega \to \infty$ $\quad \left|G_1(j\omega)\right| = 0, \quad \angle G(j\omega) = -\dfrac{\pi}{2}$



2) $G_2(p) = \dfrac{1}{p(p+1)}$ $\quad G_2(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \dfrac{1}{-\omega^2 + j\omega}$

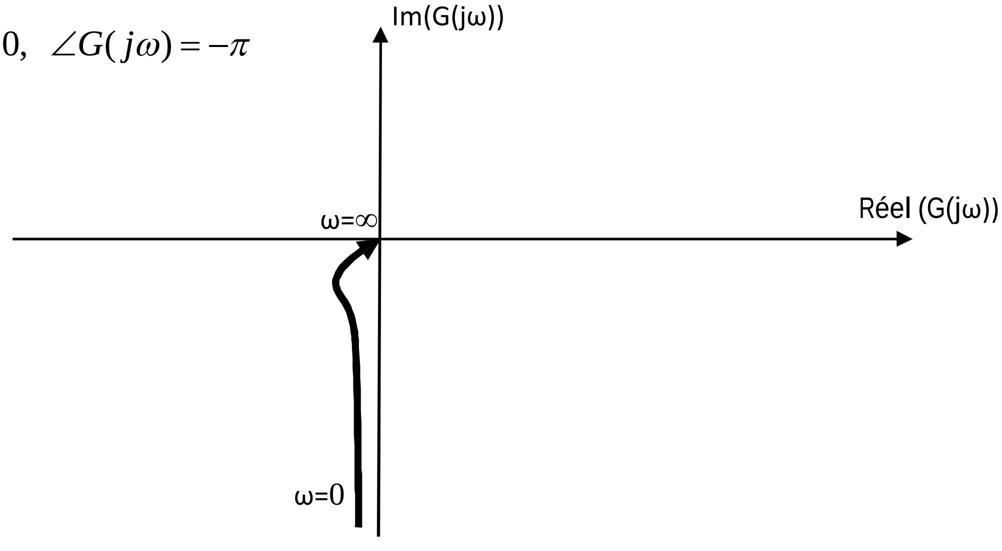
$$G_1(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + j\omega} = \frac{\left(-\omega^2 - j\omega\right)}{\left(j\omega+1\right)\left(-\omega^2 - j\omega\right)} = \frac{-(\omega^2 + j\omega)}{-\left(j\omega+1\right)\left(\omega^2 + j\omega\right)} = \frac{1}{j\omega^3 + j\omega} = -j\frac{1}{\omega^3 + \omega}$$

$$R\acute{e}el(G_1(j\omega)) = 0, \quad \mathrm{Im}(G_1(j\omega)) = -\frac{1}{\omega^3 + \omega}$$

$$\left|G_1(j\omega)\right| = \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - arctg\omega$$

Lorsque ω→0 $\quad \left|G_1(j\omega)\right| = -\infty, \quad \angle G(j\omega) = -\dfrac{\pi}{2}$

Lorsque ω→∞ $\quad \left|G_1(j\omega)\right| = 0, \quad \angle G(j\omega) = -\pi$



Si :

$$G_2(p) = \frac{K}{p(p+1)}$$

La valeur de K pour que ce système soit stable est :

On a :

$$1 + KG_2(p) = 1 + \frac{K}{p(p+1)} = \frac{p(p+1)+K}{p(p+1)} = 0 \Rightarrow p(p+1)+K = p^2 + p + K = 0$$

En utilisant le critère de Routh :

$$\begin{array}{c|cc} p^2 & 1 & K \\ p^1 & 1 & 0 \\ p^0 & K & \end{array}$$

Ce système est stable pour K>0

Exercice 02 :

Tracer les courbes en polaires des fonctions de transferts suivantes :

1) $G_1(p) = \dfrac{1}{p^3(p+1)}$

2) $G_2(p) = \dfrac{1}{p^4(p+1)}$

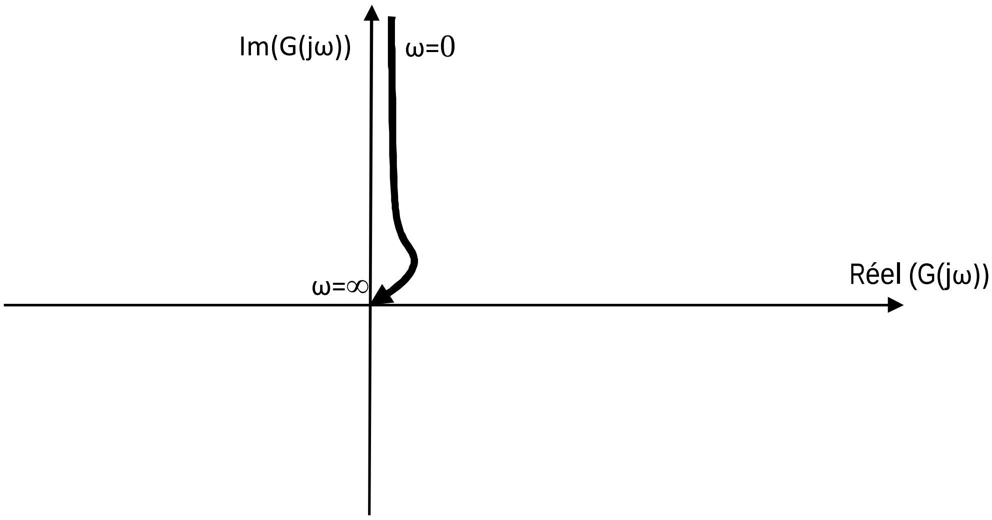
Solution :

1) $G_1(p) = \dfrac{1}{p^3(p+1)}$ $\qquad G_1(j\omega) = \dfrac{1}{-j\omega^3(j\omega+1)}$

$$\left|G_1(j\omega)\right| = \frac{1}{\omega^3\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -\frac{3\pi}{2} - arctg\omega$$

Lorsque ω→0 $\left|G_1(j\omega)\right| = \infty, \quad \angle G(j\omega) = -\dfrac{3\pi}{2}$

Lorsque ω→∞ $\left|G_1(j\omega)\right| = 0, \quad \angle G(j\omega) = -2\pi$

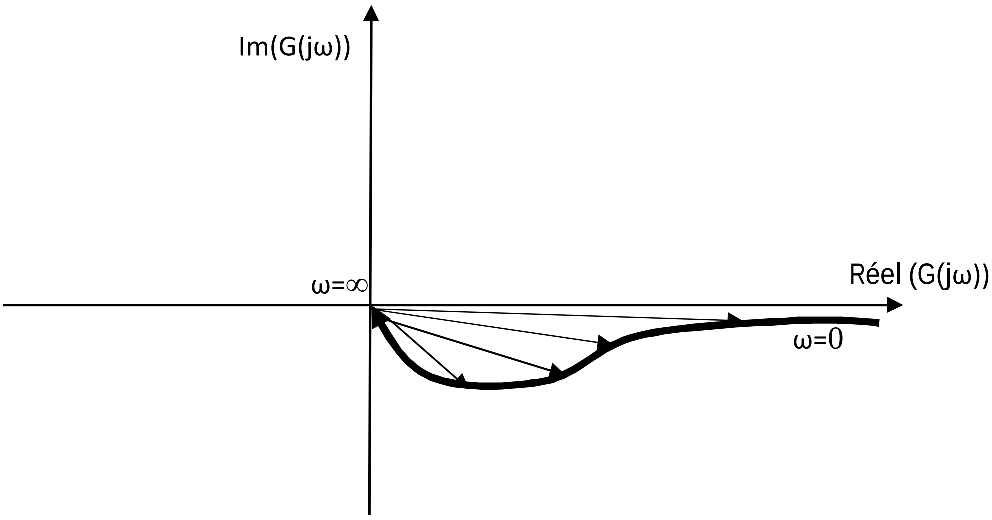


2) $G_2(p) = \dfrac{1}{p^4(p+1)}$ $\qquad G_1(j\omega) = \dfrac{1}{\omega^4(j\omega+1)}$

$\left|G_1(j\omega)\right| = \dfrac{1}{\omega^4\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -2\pi - arctg\omega$

Lorsque ω→0 $\quad \left|G_1(j\omega)\right| = \infty, \quad \angle G(j\omega) = -2\pi$

Lorsque ω→∞ $\quad \left|G_1(j\omega)\right| = 0, \quad \angle G(j\omega) = -\dfrac{5\pi}{2}$



Exercice 03 :

Tracer la courbe polaire des systèmes suivants :

1) $G_1(p) = \dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$

2) $G_2(p) = \dfrac{1}{p(p+a)(p+b)}$

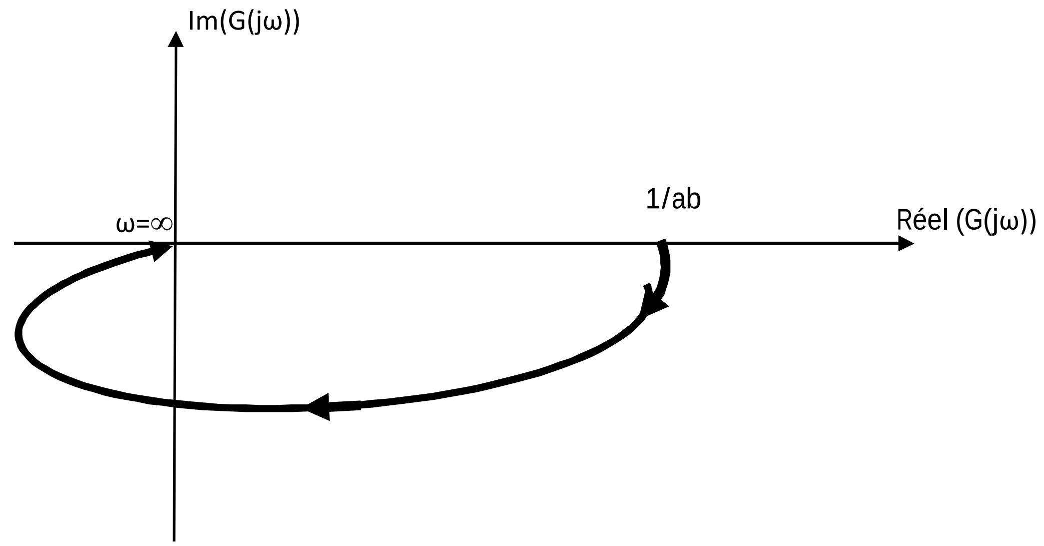
Solution :

1) $G_1(p) = \dfrac{1}{(p+a)(p+b)}$ $\qquad G_1(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega+a)(j\omega+b)}$

$$\left|G_1(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}\sqrt{b^2+\omega^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -arctg\frac{\omega}{a} - arctg\frac{\omega}{b}$$

Lorsque ω→0 $\quad \left|G_1(j\omega)\right| = \dfrac{1}{ab}, \quad \angle G(j\omega) = 0$

Lorsque ω→∞ $\quad \left|G_1(j\omega)\right| = 0, \quad \angle G(j\omega) = -\pi$

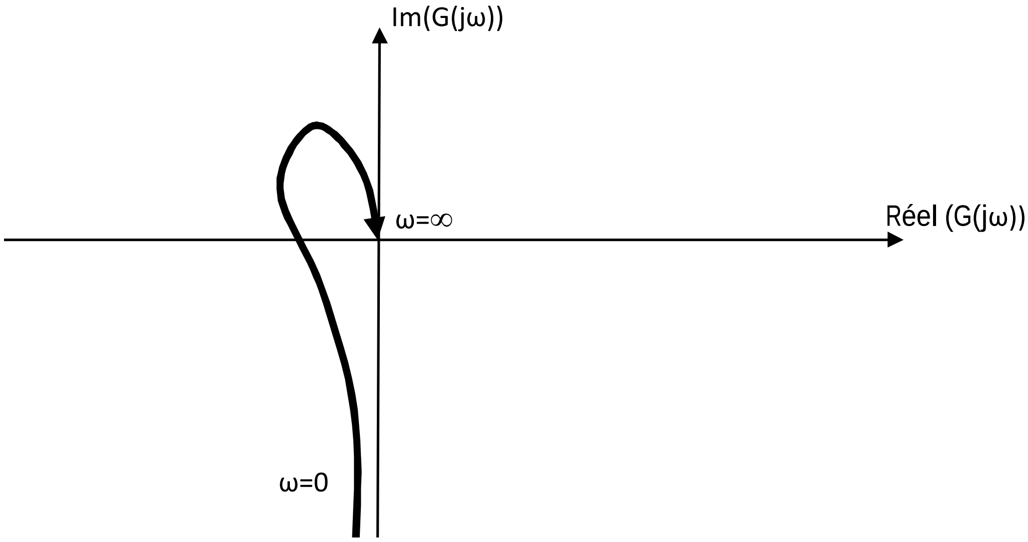


2) $G_1(p) = \dfrac{1}{p(p+a)(p+b)}$ $\quad G_1(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega(j\omega+a)(j\omega+b)}$

$$\left|G_1(j\omega)\right| = \frac{1}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}\sqrt{b^2+\omega^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - arctg\frac{\omega}{a} - arctg\frac{\omega}{b}$$

Lorsque ω→0 $\left|G_1(j\omega)\right| = \infty, \quad \angle G(j\omega) = -\dfrac{\pi}{2}$

Lorsque ω→∞ $\left|G_1(j\omega)\right| = 0, \quad \angle G(j\omega) = -\dfrac{3\pi}{2}$



Exercice 04 :

Tracer la courbe polaire du système suivant :

$$G_1(p) = \frac{1}{(p-1)}$$

Etudier la stabilité de ce système en utilisant la méthode de Nyquist.

Solution :

1) $G_1(p) = \dfrac{1}{(p-1)}$ $\quad G_1(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega-1)}$

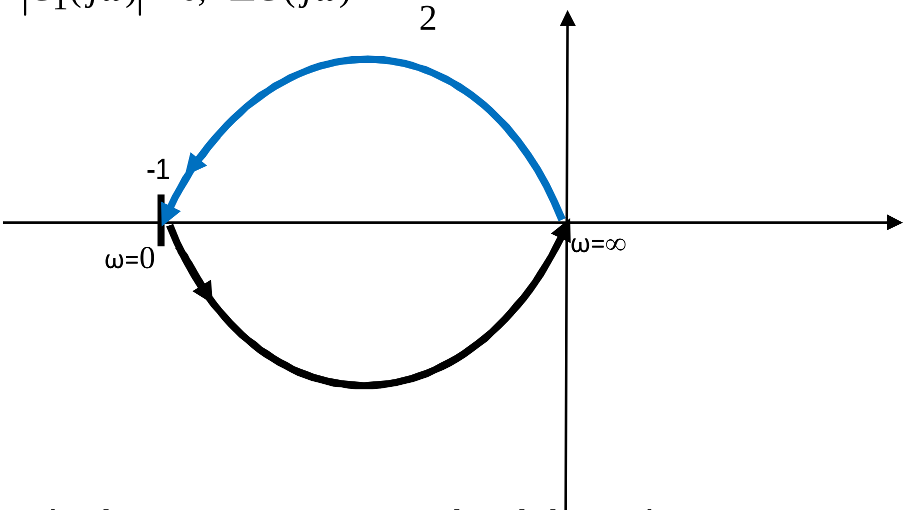
$$G_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega-1} = \frac{1(-j\omega-1)}{(j\omega-1)(-j\omega-1)} = \frac{-1-j\omega}{\omega^2+1} = \frac{-1}{\omega^2+1} - j\frac{\omega}{\omega^2+1}$$

$$Réel(G_1(j\omega)) = -\frac{1}{\omega^2+1}, \quad \mathrm{Im}(G_1(j\omega)) = -\frac{\omega}{\omega^2+1}$$

$$|G_1(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -arctg\omega$$

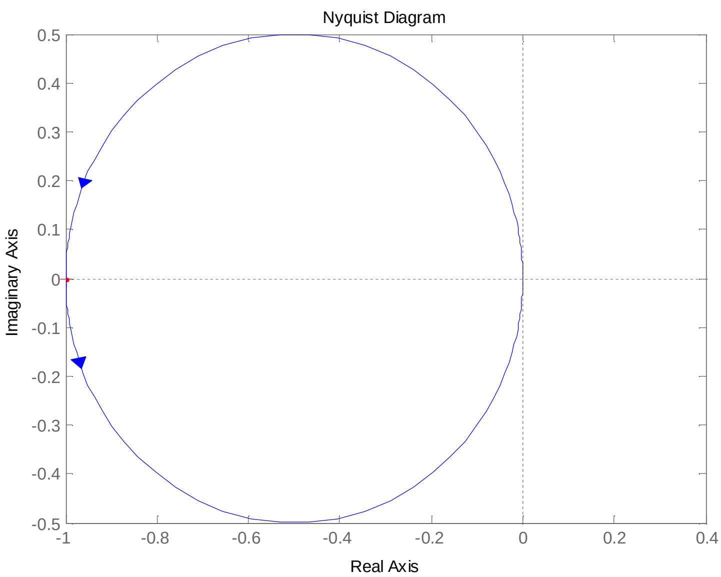
Lorsque $\omega \to 0$ $\quad |G_1(j\omega)| = 1, \quad \angle G(j\omega) = 0$

Lorsque $\omega \to \infty$ $\quad |G_1(j\omega)| = 0, \quad \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$



En appliquant le critère de NYQUIST, on peut conclure de la manière suivante :

La fonction de transfert en boucle ouverte G(p) admet un pôle à partie réelle positive (1,0). Le contour d'exclusion de NYQUIST, parcouru de $\omega = -\infty$ à $\omega = +\infty$, entoure (frôle) une fois le point critique (–1,0), donc cette fonction transfert correspond à un système marginalement stable en boucle fermée.



P = 1

N = + 1

Z = P – N = 0

- Pas de pôle instable de la FTBF
- Système marginalement stable en boucle fermée.
- Ce système est instable en boucle ouverte et marginalement stable en boucle fermée.

Exercice 05 :

On considère un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée par la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{10}{p(p+2)}$$

En appliquant le critère de NYQUIST, vérifie la stabilité de ce système.

Solution :

$$G(p) = \frac{10}{p(p+2)}$$

En passant dans le domaine fréquentiel on obtient :

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{10}{j\omega(j\omega+2)}\frac{-j\omega}{-j\omega}\frac{(-j\omega+2)}{(-j\omega+2)}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{10(-\omega^2-2j\omega)}{(-\omega^2+2j\omega)}\frac{1}{(-\omega^2-2j\omega)} = \frac{10(-\omega^2-2j\omega)}{(\omega^4+2j\omega^3-2j\omega^3+4\omega^2)}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{10(-\omega^2-2j\omega)}{(\omega^4+4\omega^2)}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{-10}{(\omega^2+4)} - \frac{20j}{\omega(\omega^2+4)}$$

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2+4}}, \quad \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - arctg\frac{\omega}{2}$$

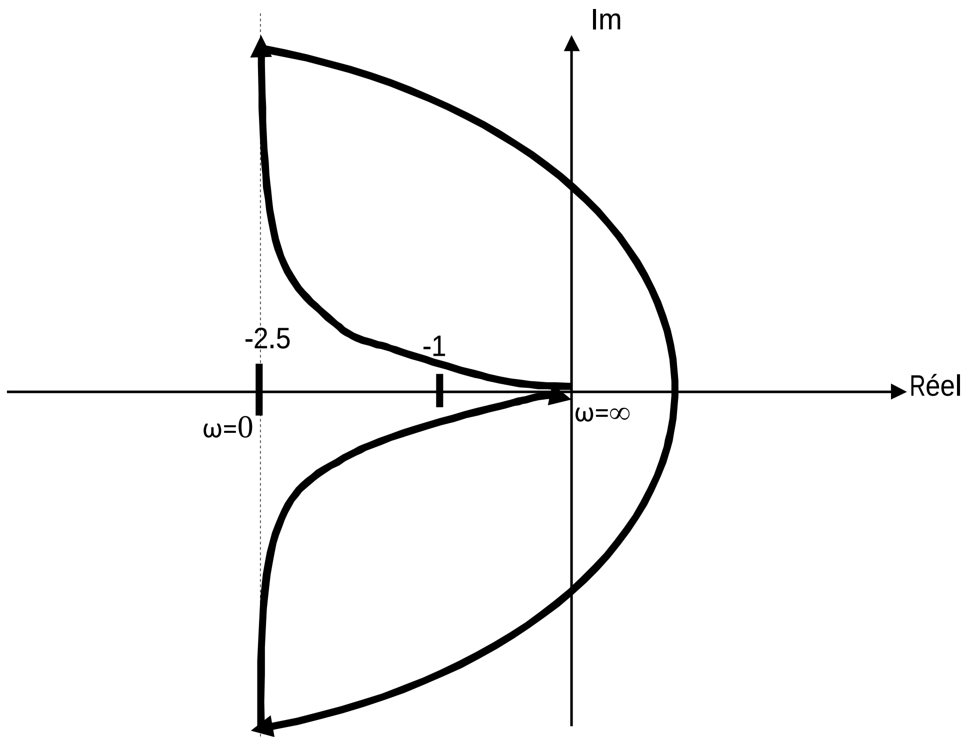
Lorsque ω→0 $\left|G(j\omega)\right| = \infty, \quad \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2}$

Lorsque ω→∞ $\left|G_1(j\omega)\right| = 0, \quad \angle G(j\omega) = -\pi$

$$Réel(G(j\omega)) = -\frac{10}{(\omega^2+4)}, \quad \mathrm{Im}(G(j\omega)) = -\frac{20j}{\omega(\omega^2+4)}$$

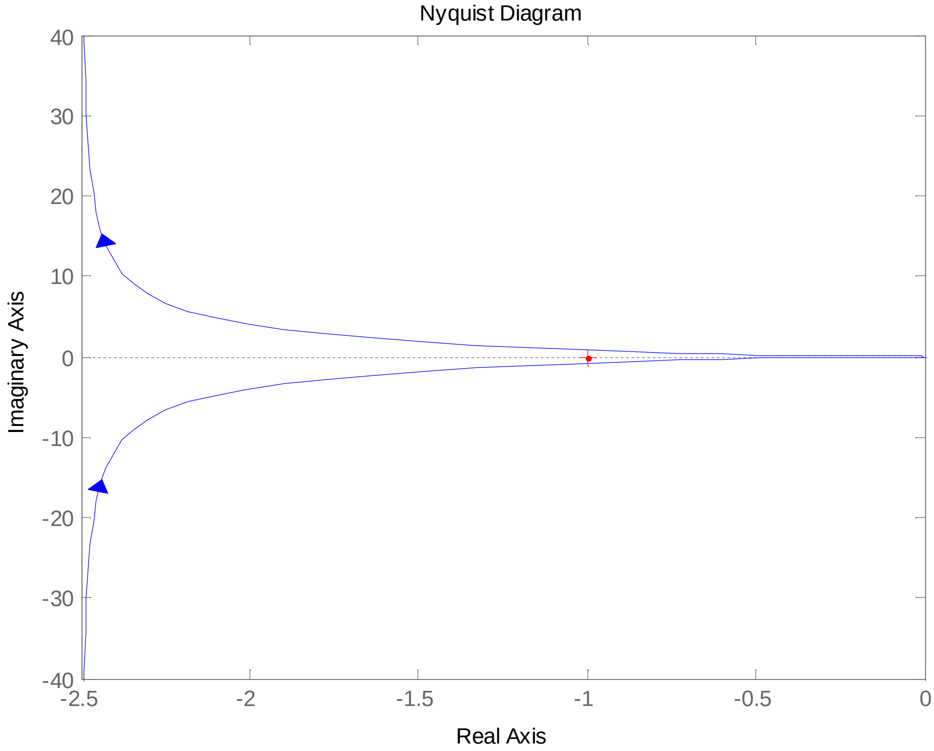
$$\omega \to 0 \Rightarrow Réel(G(j\omega)) = -\frac{5}{2}, \quad \mathrm{Im}(G(j\omega)) = -\infty$$

$$\omega \to \infty \Rightarrow Réel(G(j\omega)) = 0, \quad \mathrm{Im}(G(j\omega)) = 0$$



En appliquant le critère de NYQUIST, on peut conclure que :

La fonction de transfert G(p) n'admet aucun pôle à partie réelle positive et comme le contour d'exclusion de NYQUIST n'entoure pas le point critique (–1, 0), cette fonction transfert correspond à un système stable en boucle fermée.



Exercice 06 :

On considère un système dont la fonction de transfert en boucle ouverte est représentée par la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{8(p+1)}{p(p-1)(p+3)}$$

En appliquant le critère de NYQUIST, vérifie la stabilité de ce système.

Solution :

$$G(p) = \frac{8(p+1)}{p(p-1)(p+3)}$$

En passant dans le domaine fréquentiel on obtient :

$$G(j\omega) = \frac{8(j\omega+1)}{j\omega(j\omega-1)(j\omega+3)} = \frac{8(j\omega+1)}{j\omega(j\omega-1)(j\omega+3)}\frac{-j\omega}{-j\omega}\frac{(-j\omega-1)(-j\omega+3)}{(-j\omega-1)(-j\omega+3)}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{8(j\omega+1)(-j\omega-1)(-j\omega+3)}{j\omega(j\omega-1)(-j\omega-1)(j\omega+3)(-j\omega+3)}\frac{-j\omega}{-j\omega}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{-j\omega 8(j\omega+1)(-j\omega-1)(-j\omega+3)}{\omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+9)}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{-j\omega 8(\omega^2-2j\omega-1)(-j\omega+3)}{\omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+9)}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{-j\omega 8(-j\omega^3+3\omega^2-2\omega^2-5j\omega-3)}{\omega^2(\omega^2+1)(\omega^2+9)}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{-8(\omega^3+5\omega+j(\omega^2-3))}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+9)}$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{-8(\omega^2+5)}{(\omega^2+1)(\omega^2+9)} + \frac{-8(j(\omega^2-3))}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+9)}$$

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{8(\sqrt{\omega^2+1})}{\omega(\sqrt{\omega^2+1})(\sqrt{\omega^2+3})} = \frac{8}{\omega\sqrt{\omega^2+3}}, \quad \angle G(j\omega) = arctg\omega - \frac{\pi}{2} - \pi + arctg\omega - arctg\frac{\omega}{3}$$

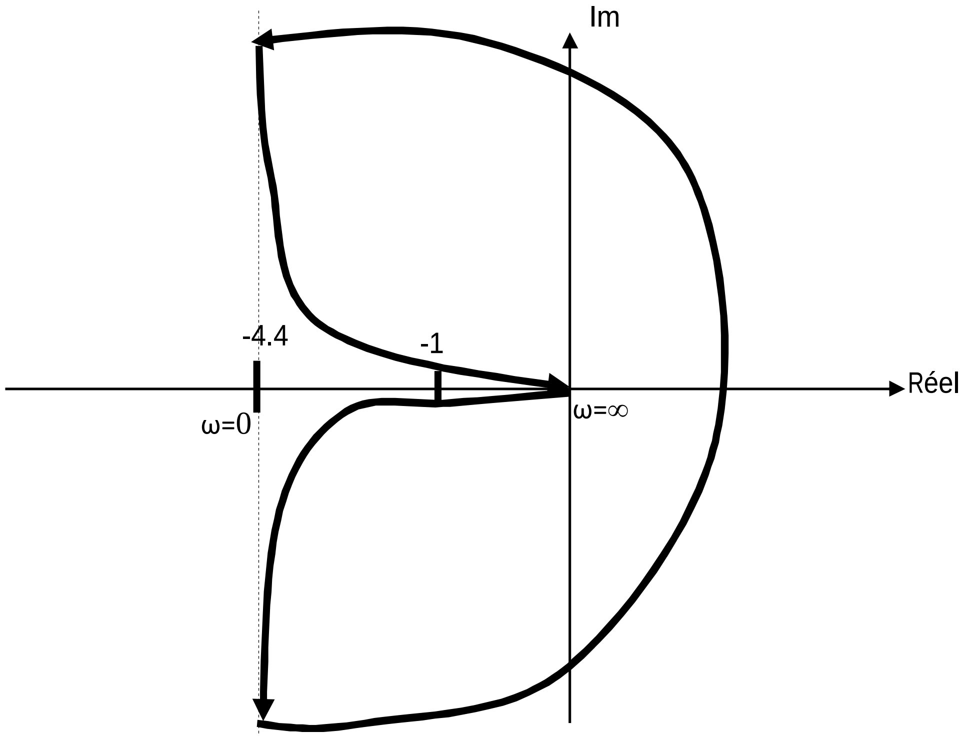
Lorsque $\omega \to 0$ $\quad \left|G(j\omega)\right| = \infty, \quad \angle G(j\omega) = -\frac{3\pi}{2}$

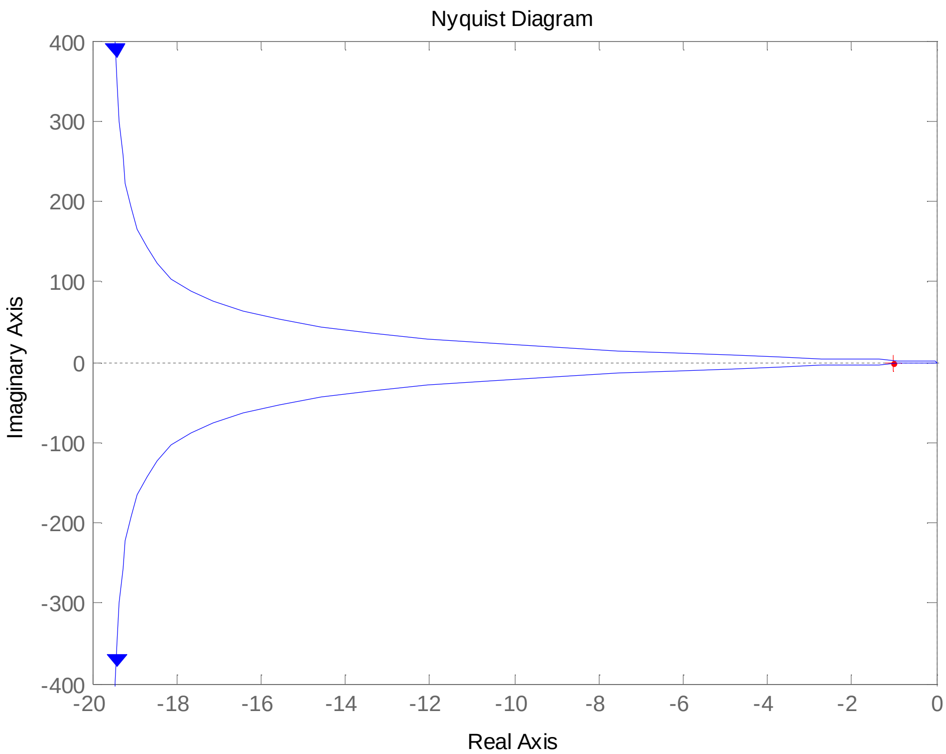
Lorsque $\omega \to \infty$ $\quad \left|G(j\omega)\right| = 0, \quad \angle G(j\omega) = -\pi$

$$Réel(G(j\omega)) = \frac{-8(\omega^2+5)}{(\omega^2+1)(\omega^2+9)}, \quad \mathrm{Im}(G(j\omega)) = \frac{-8(j(\omega^2-3))}{\omega(\omega^2+1)(\omega^2+9)}$$

$$\omega \to 0 \Rightarrow Réel(G(j\omega)) = -4.44, \quad \mathrm{Im}(G(j\omega)) = -\infty$$

$$\omega \to \infty \Rightarrow Réel(G(j\omega)) = 0, \quad \mathrm{Im}(G(j\omega)) = 0$$





En appliquant le critère de NYQUIST, on peut conclure de la manière suivante :

La fonction de transfert en boucle ouverte G(p) admet un pôle à partie réelle positive (1,0). Le contour d'exclusion de NYQUIST, n'entoure pas le point critique (–1, 0), cette fonction transfert correspond à un système stable en boucle fermée.

Exercice 07 :

Soit un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ placé dans une boucle de régulation à retour unitaire, avec :

$$G(p)=\frac{K}{(p-1)(p+10)^2}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ possède donc un pôle à partie réelle positive : 1 et un pôle double à partie réelle négative : -10.

Dans un premier temps, étudions la stabilité de ce système en boucle fermée à partir du critère de Routh ; calculons, pour ce faire, la fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(p)=\frac{G(p)}{1+G(p)}=\frac{\dfrac{K}{(p-1)(p+10)^2}}{1+\dfrac{K}{(p-1)(p+10)^2}}=\frac{\dfrac{K}{(p-1)(p+10)^2}}{\dfrac{(p-1)(p+10)^2+K}{(p-1)(p+10)^2}}=\frac{K}{p^3+19p^2+80p-100+K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$D(p)=p^3+19p^2+80p-100+K$$

Appliquons le critère de Routh en construisant le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|cc}
p^3 & 1 & 80 \\
p^2 & 19 & K-100 \\
p^1 & \dfrac{1620-K}{19} & 0 \\
p^0 & K-100 & 0
\end{array}$$

Pour que le système soit stable, il faut qu'il n'y ait aucun changement de signe dans la première colonne.

1620-K>0 ⤇K<1620

Le système est donc stable si $100 < K < 1620$.

Pour tracer le lieu de Nyquist, nous devons à présent réaliser l'étude fréquentielle du système en boucle ouverte :

$$G(p)=\frac{K}{(p-1)(p+10)^2}$$

En passant dans le domaine fréquentiel on obtient :

$$G(j\omega)=\frac{K}{(j\omega-1)(j\omega+10)^2}=\frac{K}{(j\omega-1)(j\omega+10)^2}\frac{(-j\omega-1)(-j\omega+10)^2}{(-j\omega-1)(-j\omega+10)^2}$$

$$\Rightarrow G(j\omega)=\frac{K(-j\omega-1)(-j\omega+10)^2}{(j\omega-1)(-j\omega-1)(j\omega+10)(-j\omega+10)(j\omega+10)(-j\omega+10)}$$

$$\Rightarrow G(j\omega)=\frac{K(-j\omega-1)(-\omega^2-10j\omega+100)}{(\omega^2-1)(\omega^2+100)(\omega^2+100)}=\frac{K(j\omega^3-9\omega^2-90j\omega-100)}{(\omega^2-1)(\omega^2+100)^2}$$

$$\Rightarrow G(j\omega)=\frac{K(-9\omega^2-100)}{(\omega^2-1)(\omega^2+100)^2}+j\frac{K(\omega^3-90\omega)}{(\omega^2-1)(\omega^2+100)^2}$$

$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{K}{(\sqrt{\omega^2+1})(\omega^2+10)},\quad \angle G(j\omega)=-\pi+arctg\omega-2arctg\frac{\omega}{10}$$

Lorsque ω→0 $\left|G(j\omega)\right|=\frac{1}{10},\quad \angle G(j\omega)=-\pi$

Lorsque ω→∞ $\left|G(j\omega)\right|=0,\quad \angle G(j\omega)=-\frac{5\pi}{2}$

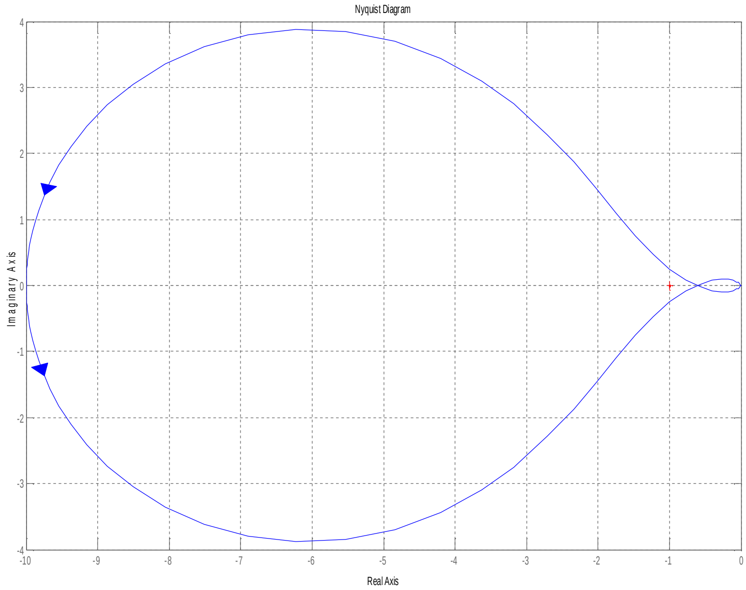
Pour K=1000 on a :

$$\textit{Réel}(G(j\omega))=\frac{K(-9\omega^2-100)}{(\omega^2-1)(\omega^2+100)^2},\quad \mathrm{Im}(G(j\omega))=\frac{K(\omega^3-90\omega)}{(\omega^2-1)(\omega^2+100)^2}$$

$$\omega\to 0\Rightarrow \textit{Réel}(G(j\omega))=-10,\quad \mathrm{Im}(G(j\omega))=0$$

$$\omega\to\infty\Rightarrow \textit{Réel}(G(j\omega))=0,\quad \mathrm{Im}(G(j\omega))=0$$

Parcourons l'image par $G(p)$ du contour de Nyquist dans le sens des **ω** croissants : nous sommes dans le sens anti-horaire. Cette image fait un seul tour autour du point critique ; le système est donc bien stable étant donné que la fonction de transfert en boucle ouverte possède un seul pôle à partie réelle positive.


Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0