TD 05

Diagramme de Bode

Exercice 01 :

Tracer le diagramme de Bode des fonctions de transferts suivantes :

1) $G_1(p) = \dfrac{1}{p^2}$

2) $G_2(p) = 1 + j\omega\tau$

3) $G_3(p) = \dfrac{1}{1 + j\omega\tau}$

Solution :

1) $G_1(p) = \dfrac{1}{p^2}$ $\qquad G_1(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega)^2},\ \omega_c = 1$

$$G_{dB} = 20\log_{10}\left|G(j\omega)\right| = 20\log_{10}\left|\frac{1}{(j\omega)^2}\right| = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) = 20\log_{10}\left(\omega^2\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow G_{dB} = -20\log_{10}\left(\omega^2\right) \Rightarrow G_{dB} = -40\log_{10}(\omega)$$

Analyse asymptotique :

Définissons : $\omega_c = 1$

$$\Rightarrow G_{dB} = -20\log_{10}\left(\omega^2\right)$$

$$\Rightarrow G_{dB} = -40\log_{10}(\omega)$$

Droite de pente -40dB/décade.

Soit : $\tau=1 \mapsto \omega_c=1/1=1$rd/s

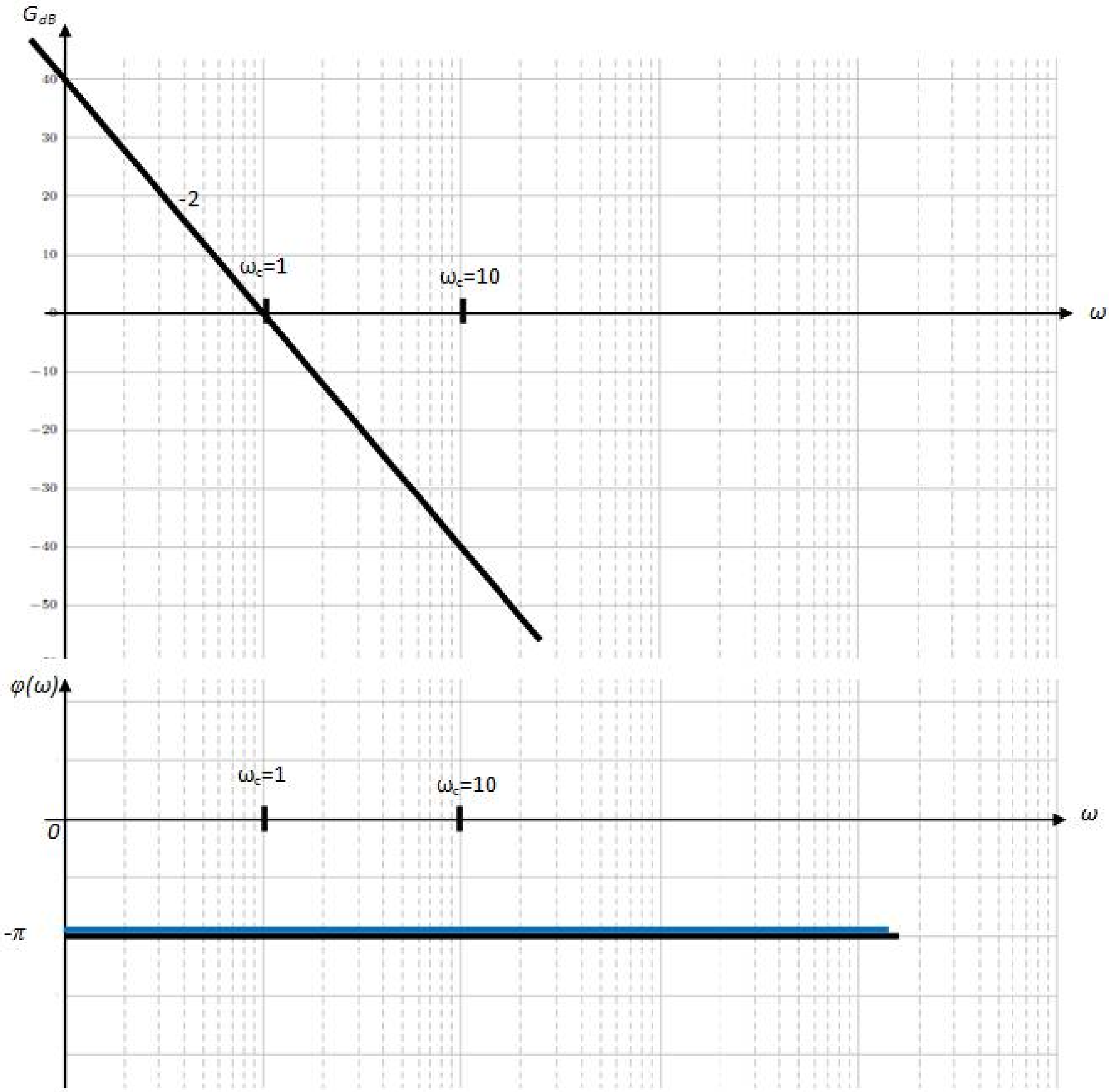
$$\varphi = -\angle\omega^2 \Rightarrow \varphi = -2arctg(\omega)$$

Asymptotes :

BF : $\omega << \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \to -\pi$

HF : $\omega >> \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \to -\pi$

Pour : $\omega = \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \to -\pi$



2) $G_2(p) = 1 + j\omega\tau$

$$G(p) = 1 + \tau p$$

$$G(j\omega) = 1 + j\omega\tau,\ \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

$$G_{dB} = 20\log = \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$G_{dB} = 10\log = \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)$$

Analyse asymptotique :

Définissons : $\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$

$$\Rightarrow G_{dB} = 10\log_{10}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)$$

De plus, définissons les basses fréquences par : $\omega << \omega_c \quad BF$

Les hautes fréquences par : $\omega >> \omega_c \quad HF$

Etudions G_{dB} aux BF et aux HF

BF :

$$\Rightarrow G_{dB} = 10\log_{10}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) = 10\log_{10}(1) \Rightarrow G_{dB} = 0dB$$

HF :

$$\Rightarrow G_{dB} = 10\log_{10}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) \Rightarrow G_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\Rightarrow G_{dB} = 20[\log_{10}(\omega) - \log_{10}(\omega_c)]$$

Si nous traçons G_{dB} en fonction de $\log_{10}\omega$, on peut poser : $X = \log_{10}\omega$

$$G_{dB} = 20X + A, \ avec\ A = -20\log_{10}(\omega_c) = cte$$

C'est l'équation d'une droite.

Calculons la pente de cette droite :

$$G_{dB_{HF}} = 20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}(\omega_c)$$

Nous allons calculer G_{dB} pour : $\omega = 10\omega_c$ (décade)

$$G_{dB_{HF}} = 20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}(\omega_c)$$

$$\Rightarrow G_{dB_{HF}} = 20\log_{10}(10\omega_c) - 20\log_{10}(\omega_c)$$

$$\Rightarrow G_{dB_{HF}} = 20\log_{10}(10) + 20\log_{10}(\omega_c) - 20\log_{10}(\omega_c)$$

$$\Rightarrow G_{dB_{HF}} = 20\log_{10}(10)$$

$$\Rightarrow G_{dB_{HF}} = 20\,dB$$

L'asymptote aux HF ($\omega >> \omega_c$) est une droite de pente : **20dB par décade**.

On a :

$$G(p) = 1 + \tau p$$

Asymptotes :

BF=0

HF=20dB/décade.

Soit : $\tau=0.05 \mapsto \omega_c=1/\tau=20$rd/s

Pour $\omega=\omega_c \mapsto G_{dB}=10\log_{10}(1+ \omega/\omega_c) \mapsto G_{dB}=3$dB.

ω_c : fréquence de coupure à 3dB

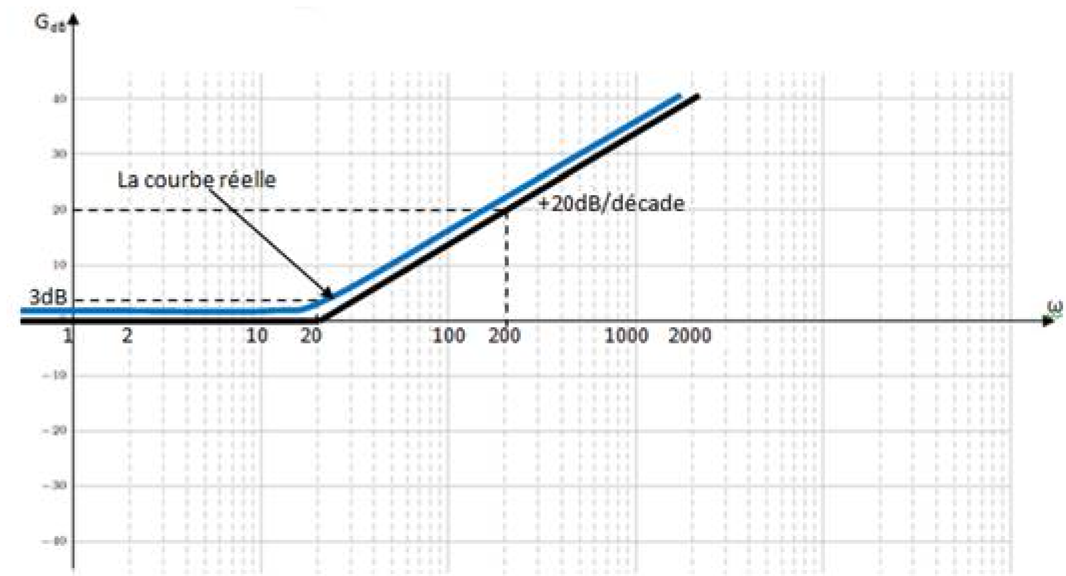
$$\angle G(j\omega) = \angle(1+ j\omega\tau) = arctg\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = arctg(\omega\tau)$$

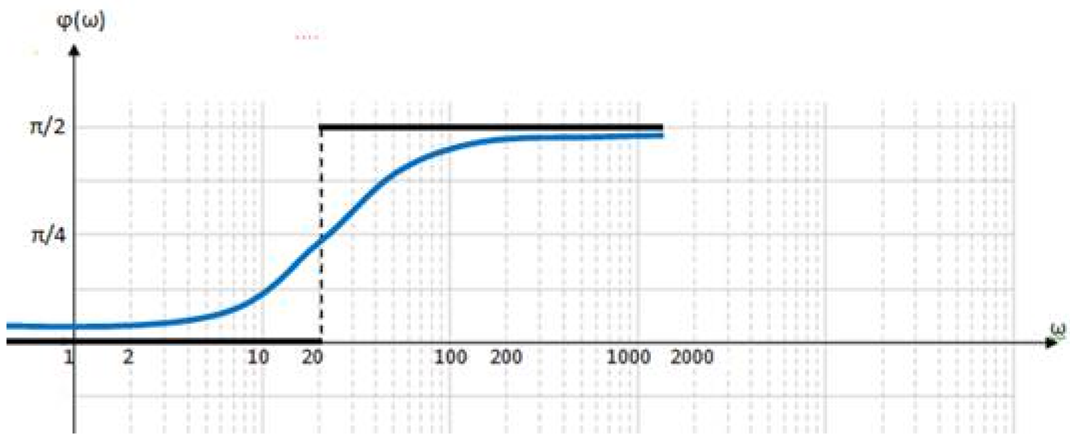
Asymptotes :

BF : $\omega << \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \to 0$

HF : $\omega >> \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \to \frac{\pi}{2}$

Pour : $\omega = \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \to \frac{\pi}{4}$





3) $G_3(p) = \dfrac{1}{1+j\omega\tau}$

$$G(p) = \frac{1}{1+\tau p} \Rightarrow \; G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

$$G_{dB} = 20\log_{10}\left|G(j\omega)\right| = 20\log_{10}\left|\frac{1}{1+j\omega\tau}\right| = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\right) = 20\log_{10}\left(1+\omega^2\tau^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow G_{dB} = -10\log_{10}\left(1+\omega^2\tau^2\right)$$

Analyse asymptotique :

Définissons : $\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$

$$\Rightarrow G_{dB} = -10\log_{10}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)$$

De plus, définissons les basses fréquences par : $\omega << \omega_c \quad BF$

Les hautes fréquences par : $\omega >> \omega_c \quad HF$

Etudions G_{dB} aux BF et aux HF

BF :

$$\Rightarrow G_{dB} = -10\log_{10}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) = -10\log_{10}(1) \Rightarrow G_{dB} = 0dB$$

HF :

$$\Rightarrow G_{dB} = -10\log_{10}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) = -10\log_{10}\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) \Rightarrow G_{dB} = -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\Rightarrow G_{dB} = -20\left[\log_{10}(\omega) - \log_{10}(\omega_c)\right]$$

Si nous traçons G_{dB} en fonction de $\log_{10}\omega$, on peut poser : $X = \log_{10}\omega$

$$G_{dB} = -20X + A, \; avec \; A = +20\log_{10}(\omega_c) = cte$$

C'est l'équation d'une droite.

Calculons la pente de cette droite :

$$G_{dB_{HF}} = -20\log_{10}(\omega) + 20\log_{10}(\omega_c)$$

Nous allons calculer G_{dB} pour : $\omega = 10\omega_c$ (décade)

$$G_{dB_{HF}} = -20\log_{10}(\omega) + 20\log_{10}(\omega_c)$$
$$\Rightarrow G_{dB_{HF}} = -20\log_{10}(10\omega_c) + 20\log_{10}(\omega_c)$$
$$\Rightarrow G_{dB_{HF}} = -20\log_{10}(10) - 20\log_{10}(\omega_c) + 20\log_{10}(\omega_c)$$
$$\Rightarrow G_{dB_{HF}} = -20\log_{10}(10)$$
$$\Rightarrow G_{dB_{HF}} = -20\,dB$$

L'asymptote aux HF ($\omega >> \omega_c$) est une droite de pente :**-20dB par décade**.

Asymptotes :

BF=0

HF=-20dB/décade.

Soit : $\tau=0.05 \Rightarrow \omega_c=1/\tau=20$rd/s

Pour $\omega=\omega_c \Rightarrow G_{dB}=-10\log_{10}(1+\omega/\omega_c) \Rightarrow G_{dB}=-3$dB.

ω_c : fréquence de coupure à -3dB

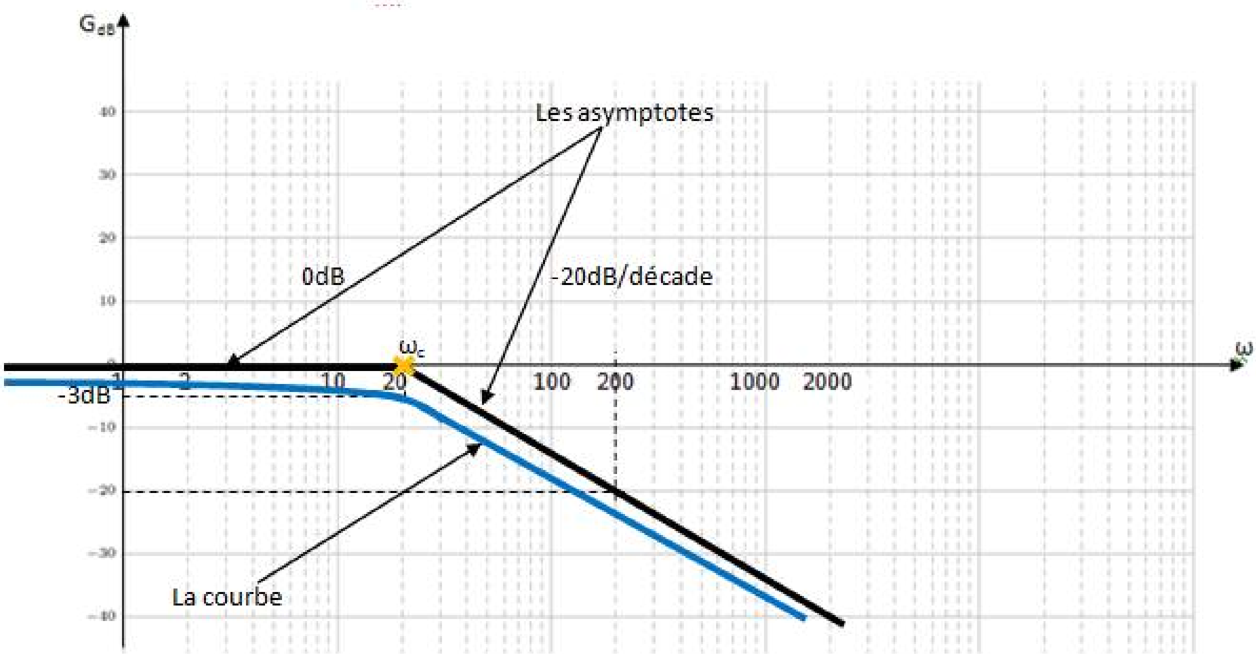
$$\angle G(j\omega) = -\angle(1 + j\omega\tau) = -arctg\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = -arctg(\omega\tau)$$

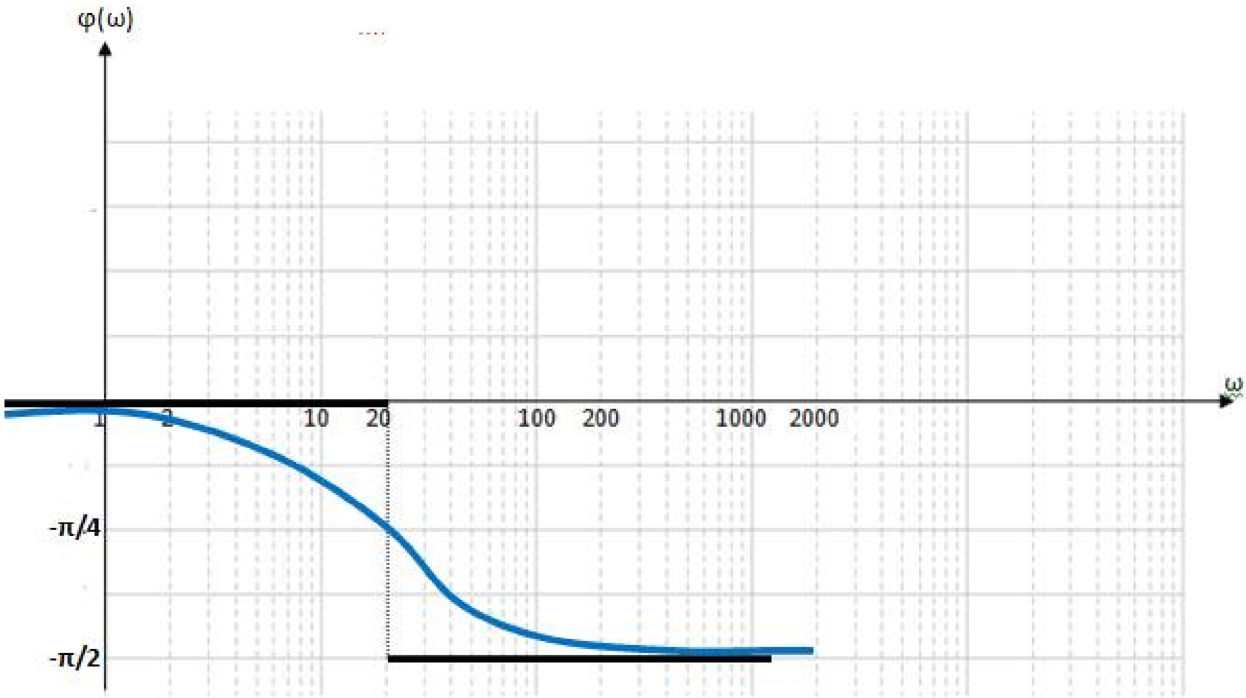
Asymptotes :

BF : $\omega << \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \to 0$

HF : $\omega >> \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \to -\frac{\pi}{2}$

Pour : $\omega = \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \to -\frac{\pi}{4}$


G dB
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-3dB
Les asymptotes
0dB
-20dB/décade
La courbe
ωc
1
2
10
20
100
200
1000
2000
ω


φ(ω)
-π/4
-π/2
1
2
10
20
100
200
1000
2000
ω

Exercice 02 :

Tracer sur papier semi log le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :

$$G(p)=\frac{10}{p(p+1)(p+5)}$$

Solution :

$$G(p)=\frac{10}{p(p+1)((p+5)}\Rightarrow\ G(j\omega)=\frac{10}{j\omega(j\omega+1)((j\omega+5)}=\frac{10}{5j\omega(j\omega+1)(\frac{j\omega}{5}+1)}$$

$$\Rightarrow\ G(j\omega)=\frac{2}{j\omega(j\omega+1)(\frac{j\omega}{5}+1)}$$

$$G_{dB}=20\log_{10}\left|G(j\omega)\right|=20\log_{10}\left|\frac{2}{j\omega(j\omega+1)((\frac{j\omega}{5}+1)}\right|=20\log_{10}\left(\frac{1}{j\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{25}}}\right)$$

$$\Rightarrow G_{dB}=20\log_{10}(2)-20\log_{10}(\omega)-20\log_{10}\left(1+\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}-20\log_{10}\left(1+\frac{\omega^2}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow G_{dB}=20\log_{10}(2)-20\log_{10}(\omega)-10\log_{10}\left(1+\omega^2\right)-10\log_{10}\left(1+\frac{\omega^2}{25}\right)$$

Analyse asymptotique :

Définissons : $\omega_c=\frac{1}{\tau}$

$$\Rightarrow G_{dB}=-10\log_{10}\left(1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)$$

Etudions G_{dB} aux BF et aux HF

BF :

$$G_{dB}=20\log_{10}(2)-20\log_{10}(\omega)-10\log_{10}\left(1+\omega^2\right)-10\log_{10}\left(1+\frac{\omega^2}{25}\right)=-\infty$$

HF :

$$G_{dB}=20\log_{10}(2)-20\log_{10}(\omega)-10\log_{10}\left(1+\omega^2\right)-10\log_{10}\left(1+\frac{\omega^2}{25}\right)$$

$$\Rightarrow G_{dB}=20\log_{10}(2)-20\log_{10}(\omega)-20\log_{10}(\omega)-20\log_{10}\left(\frac{\omega}{5}\right)$$

$$\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \angle(1 + j\omega) - \angle\left(1 + \frac{j\omega}{5}\right) = -\frac{\pi}{2} - arctg(\omega) - arctg\left(\frac{\omega}{5}\right)$$

Asymptotes :

BF : $\omega << \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \to -\frac{\pi}{2}$

HF : $\omega >> \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \to -\frac{3\pi}{2}$

Et comme on peut tracer le diagramme de Bode en décomposant la fontion de transfert en plusieurs fonctions en cascades :

$$G(p) = \frac{10}{p(p+1)(p+5)} \Rightarrow G(p) = \frac{2}{p(p+1)((\frac{p}{5}+1)}$$

$$G_1(p) = \frac{2}{p} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \omega_c = 1rd/s \\ -20dB/dec \\ -\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow G_{1dB} = 20\log_{10}(2) - 20\log_{10}(\omega)$$

$$G_2(p) = \frac{1}{(p+1)} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \omega_c = 1rd/s \\ -20dB/dec \\ -\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow G_{2dB} = -20\log_{10}(\omega)$$

$$G_3(p) = \frac{1}{(\frac{p}{5}+1)} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \omega_c = 5rd/s \\ -20dB/dec \\ -\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow G_{3dB} = -20\log_{10}(\frac{\omega}{5})$$

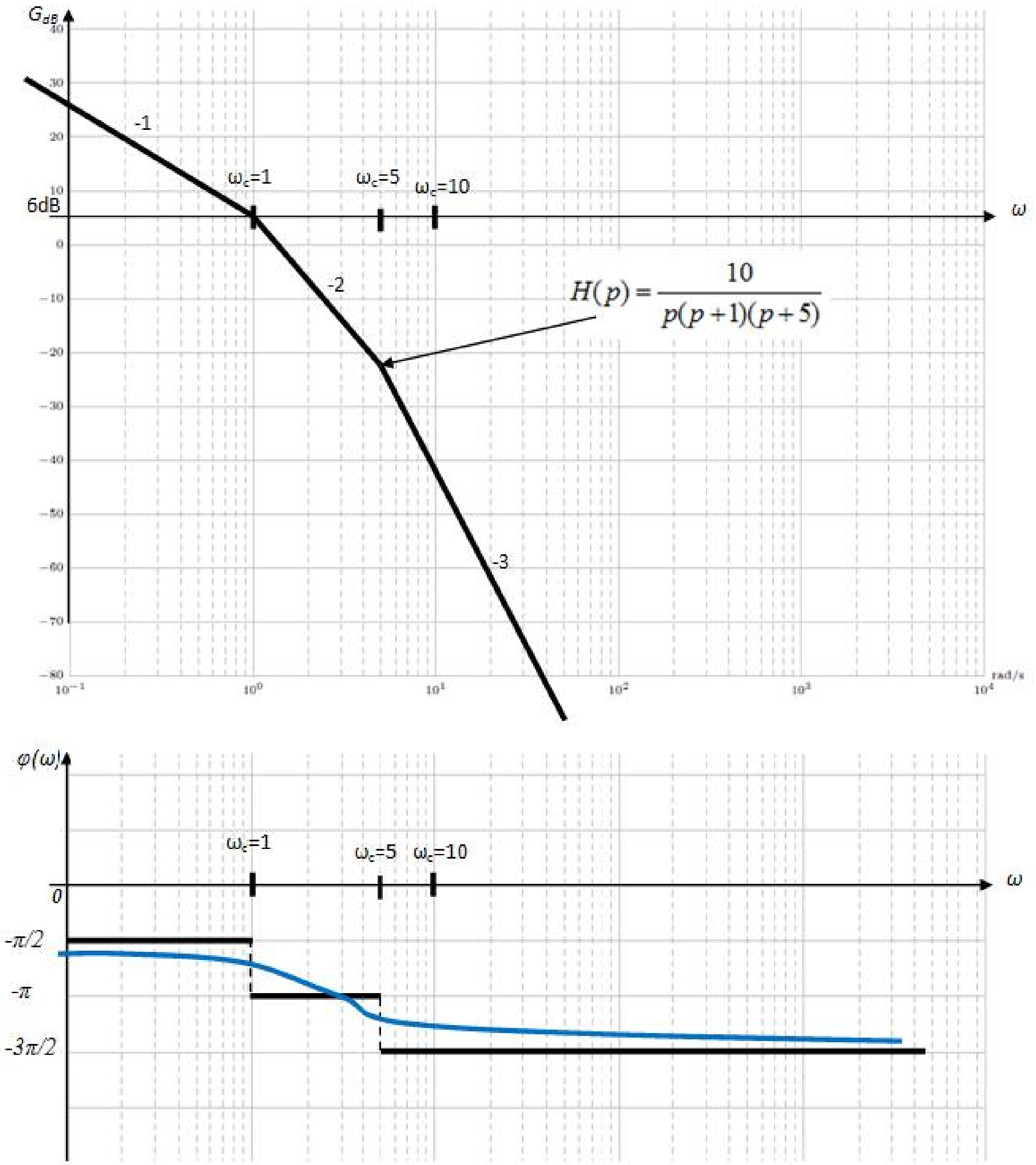
Pour tracer G_{dB} on trace d'abord les G_{idB} puis on fait la somme **géométrique** (**des asymptotes**)

Pour les phases :

$$\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \angle(1 + j\omega) - \angle\left(1 + \frac{j\omega}{5}\right) = -\frac{\pi}{2} - arctg(\omega) - arctg\left(\frac{\omega}{5}\right)$$

$$\angle G(j\omega) = \sum_{i=1} \angle G_i$$

Pour tracer $\angle G(j\omega)$ on trace d'abord les $\angle G_i$ puis on fait la somme géométrique et **on calcul des points pour trouver la courbe réelle**.



G_{dB}
40
30
20
10
6dB
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−70
−80
-1
-2
-3
$\omega_c=1$
$\omega_c=5$
$\omega_c=10$
ω
$H(p)=\frac{10}{p(p+1)(p+5)}$
rad/s
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
$\varphi(\omega)$
$\omega_c=1$
$\omega_c=5$
$\omega_c=10$
ω
0
$-\pi/2$
$-\pi$
$-3\pi/2$

Exercice 03 :

Tracer sur papier semi log le diagramme de Bode de la fonction de transfert suivante :

$$G(p)=\frac{10(p+1)}{p(p+2)^2(2p+1)}$$

Solution :

$$G(p)=\frac{10(p+1)}{p(p+2)^2(2p+1)} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{10(j\omega+1)}{j\omega(j\omega+2)^2(2j\omega+1)}=\frac{10(j\omega+1)}{4j\omega(\frac{j\omega}{2}+1)^2(\frac{j\omega}{0.5}+1)}$$

$$\Rightarrow G(j\omega)=\frac{2.5(j\omega+1)}{j\omega(\frac{j\omega}{2}+1)^2(\frac{j\omega}{0.5}+1)}$$

On peut tracer le diagramme de Bode en décomposant la fonction de transfert en plusieurs fonctions en cascades :

$$G(p)=\frac{10(p+1)}{p(p+2)^2(2p+1)} \Rightarrow G(p)=\frac{2.5(p+1)}{p(\frac{p}{2}+1)^2(\frac{p}{0.5}+1)}=\frac{2.5(p+1)}{p\left(\frac{p}{2}+1\right)^2\left(\frac{p}{0.5}+1\right)}$$

$$G_1(p)=(p+1)\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\omega_c=1rd/s\\ 20dB/dec\\ \frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow G_{2dB}=20\log_{10}(\omega)$$

$$G_2(p)=\frac{2.5}{p}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\omega_c=1rd/s\\ -20dB/dec\\ -\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow G_{2dB}=20\log_{10}(2.5)-20\log_{10}(\omega)=7.95dB-20\log_{10}(\omega)$$

$$G_3(p)=\frac{1}{(\frac{p}{2}+1)^2}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\omega_c=2rd/s\\ -40dB/dec\\ -\pi\end{matrix}\right\}\Rightarrow G_{3dB}=-40\log_{10}(\omega)$$

$$G_4(p)=\frac{1}{(\frac{p}{0.5}+1)}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\omega_c=0.5rd/s\\ -20dB/dec\\ -\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow G_{4dB}=-20\log_{10}(\frac{\omega}{5})$$

Pour tracer G_{dB} on trace d'abord les G_{idB} puis on fait la somme **géométrique** (**des asymptotes**)

Pour les phases :

$$\angle G(j\omega) = \angle(1+j\omega) - \frac{\pi}{2} - 2\angle\left(1+\frac{j\omega}{2}\right) - \angle\left(1+\frac{j\omega}{0.5}\right) = arctg(\omega) - \frac{\pi}{2} - 2arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) - arctg\left(\frac{\omega}{0.5}\right)$$

$$\angle G(j\omega) = \sum_{i=1} \angle G_i$$

BF : $\omega << \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \to -\frac{\pi}{2}$

HF : $\omega >> \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \to -\frac{3\pi}{2}$

Pour tracer $\angle G(j\omega)$ on trace d'abord les $\angle G_i$ puis on fait la somme géométrique et **on calcul des points pour trouver la courbe réelle**.