TD 03

La méthode du lieu des pôles

Exemple :

Tracer le lieu des pôles de la FT suivante :

$$KG(p) = \frac{K}{p(p+2)(p+5)}$$

En appliquant les règles d'EVANS:

Soit le système en boucle fermée (BF) avec :

$$G(p) = \frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)}$$

z_i, i=1,…,m ; les zéros de G(p)

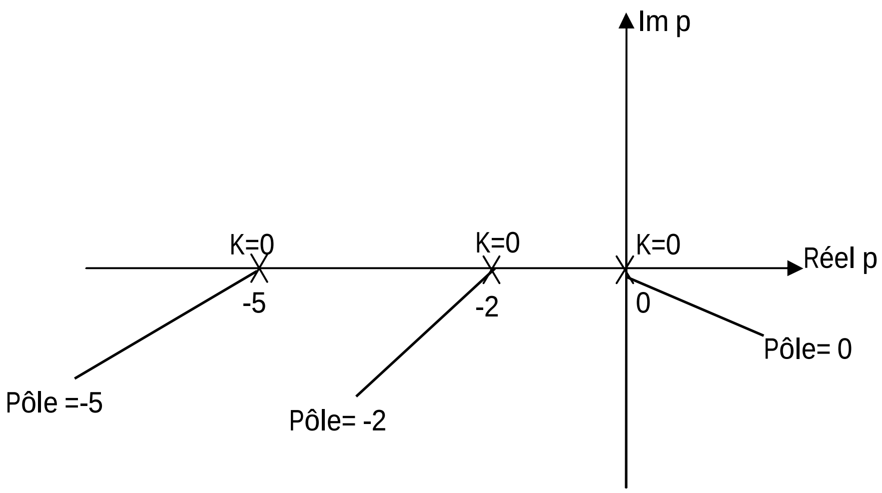
p_i, i=1,…,n ; les pôles de G(p)

Pour tracer le lieu des pôles de H(p), on utilise les règles suivantes :

$$H(p) = \frac{KG(p)}{1+KG(p)}$$

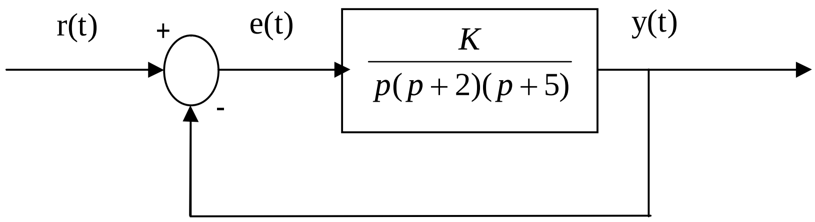
Règle N°01 :

Tracer le plan complexe et placer : les pôles de G(p) : x, Les zéros de G(p) : o



Puisque le nombre de pôles de H(p)= nombre de pôles de G(p)=3 ; le lieu de pôles de H(p) a "***3***" branches, une branche commence à K=0 à un pôle de G(p) et elle se termine à un zéros de G(p) à K→∞.

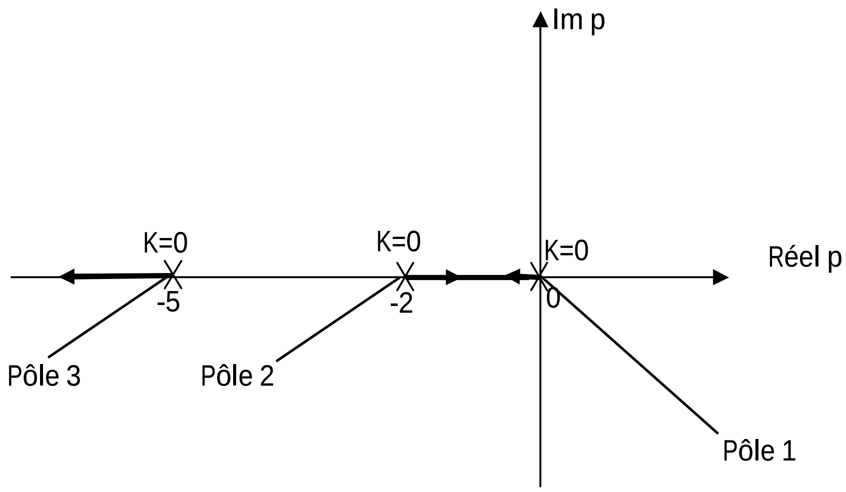
Lorsque le nombre de zéros est insuffisant, on place les zéros qui manquent à l'infini.



Les pôles de G(p) :
0, -2, -5
Les zéros de G(p) :
∞, ∞, ∞
Il existe : 03 branches

Règle N°02 :

Sur l'axe des réels, le lieu des pôles existe à **gauche** d'un nombre **impair** de **pôles** et de **zéros**.

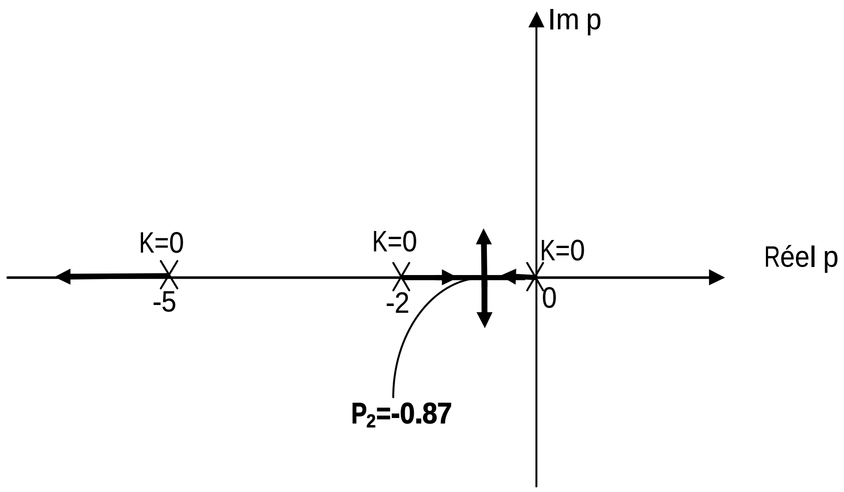


Règle N°03 :

Point de sortie des branches de l'axe des réels est la solution de :

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{G(p)}\right)=0 \qquad \frac{d}{dp}\big(p(p+2)(p+5)\big)$$

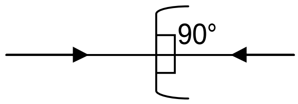
$$p_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{19}}{3} \qquad p_1=-3.8 \quad p_2=-0.87$$



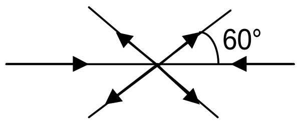
Règle N°04 :

Angle de sortie des branches de l'axe des réels :

Pour deux branches : 90°



Pour 04 branches : 60°



On a 3 branches donc angle de sortie =60°

Règle N°05 :

Asymptotes :

Point d'appui sur l'axe des réels :

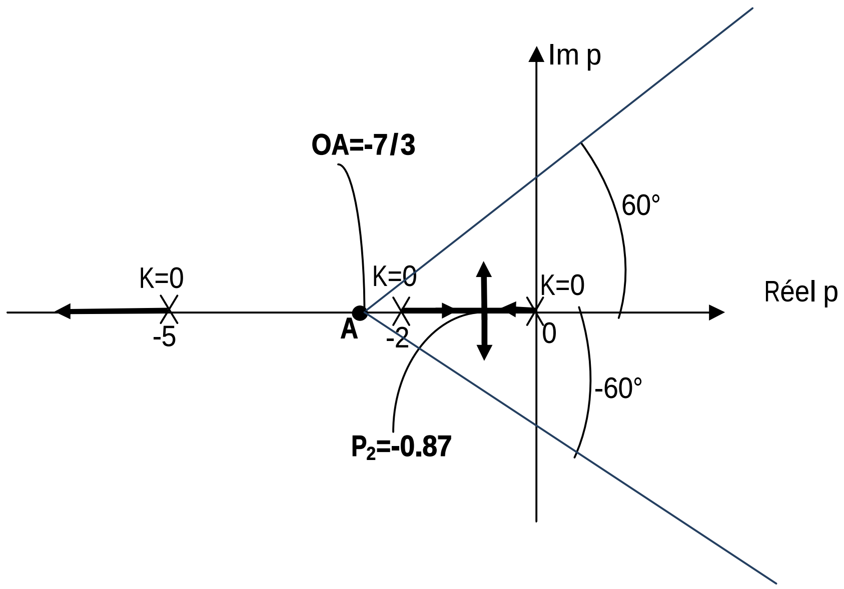
$$OA = \frac{\sum(pôles\ de\ G(p)) - \sum(zéros\ de\ G(p))}{(nombre\ de\ pôles\ de\ G(p)) - (nombre\ de\ zéros\ de\ G(p))}$$

$$OA = \frac{(-2-5-0)-(0)}{(3)-(0)} = \frac{-7}{3}$$

L'angle de l'asymptote avec l'axe des réels :

$$\alpha_k = \frac{(1+2k)\pi}{(nombre\ de\ pôles\ de\ G(p)) - (nombre\ de\ zéros\ de\ G(p))} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2$$

3 zéros à l'infini ⤇3 asymptotes. $\alpha_0 = \frac{\pi}{3},\ \ \alpha_1 = \pi,\ \ \alpha_{-1} = \frac{-\pi}{3}$



Règle N°06 :

Point de coupure de l'axe imaginaire des racines de ***1+KG(p)=0*** sont : $p = \pm j\omega$ alors : ***1+KG(jω)=0***

On calcul ***K*** à l'aide du critère de Routh marginalement stable.

$$1 + KG(p) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{K}{p(p+2)(p+5)} = 0 \Rightarrow p(p+2)(p+5) + K = 0$$

$$\Rightarrow p^3 + 7p^2 + 10p + K = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} p^3 & 1 & 10 \\ p^2 & 7 & K \\ p^1 & \dfrac{70-K}{7} & 0 \\ p^0 & K & 0 \end{array}$$

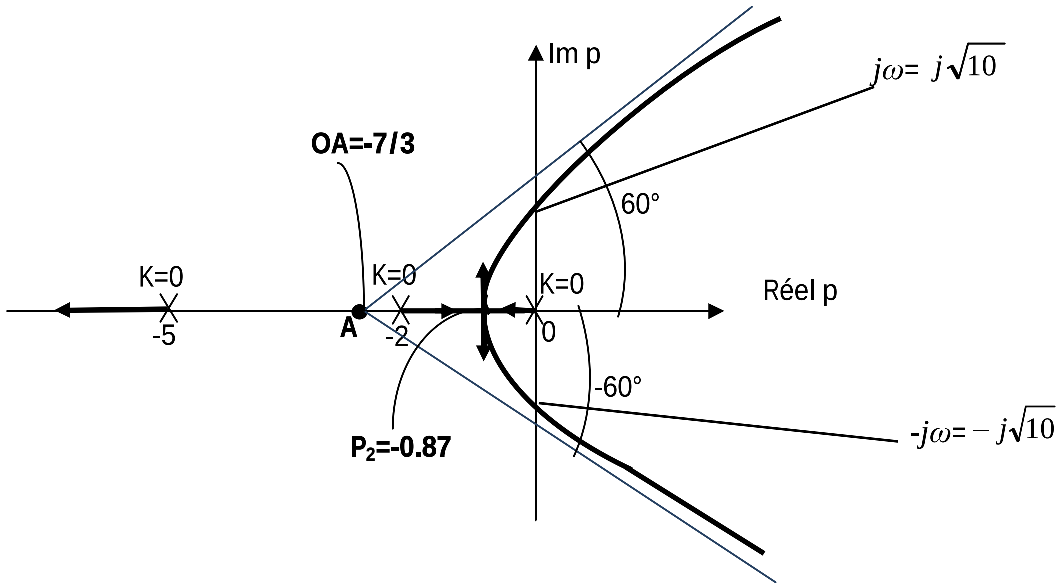
Pour que ce système soit stable il faut que $K \geq 0$ et $\frac{70-K}{7} \geq 0 \Rightarrow 70 - K \geq 0 \Rightarrow K \leq 70$

Alors il faut que $0 \leq K \leq 70$

$$p^3 + 7p^2 + 10p + K = 0 \Rightarrow (j\omega)^3 + 7(j\omega)^2 + 10(j\omega) + K$$

$$\Rightarrow -j\omega^3 - 7\omega^2 + j10\omega + K = 0$$

$$\begin{cases} -j\omega^3 + j10\omega = 0 \Rightarrow \omega^2 = 10 \Rightarrow \omega = \sqrt{10} \\ -7\omega^2 + K = 0 \Rightarrow K = 7\omega^2 \Rightarrow K = 70 \end{cases}$$



Règle N°07 :

Angle de départ d’un pôle complexe de G(p)

$$\varphi_{(p_0)} = 180° - \sum_{i \neq 0} \angle(p_0 - p_i) + \sum_{j} \angle(p_0 - z_j)$$

Angle d’arrivée à zéro de G(p)

$$\varphi_{(z_0)} = \sum_{i} \angle(z_0 - p_i) - \sum_{j \neq 0} \angle(z_0 - z_j) - 180°$$

Pas de pôle complexe ni de zéros complexe alors : pas d’angle de départ d’un pôle complexe ni d’angle d’arrivée d’un zéros complexe.

Exercices :

Exercice 01 :

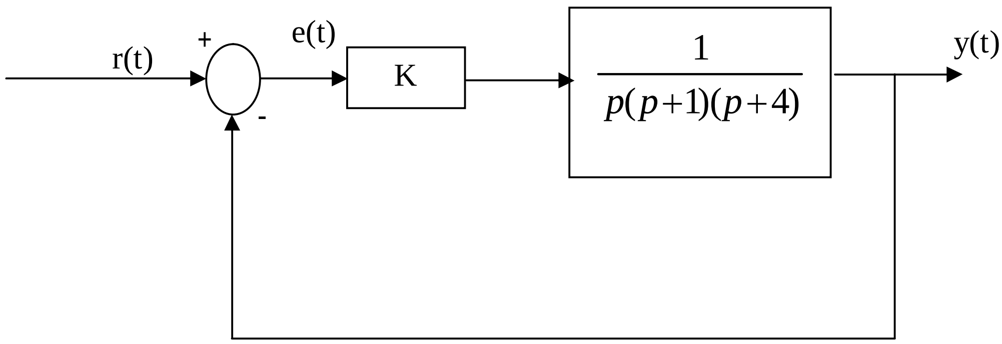
Tracer le lieu des pôles de la FT suivante :

$$KG(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+4)}$$

Solution :

Soit une commande en boucle fermée avec un régulateur P de gain K.

- Tracer le lieu des pôles du système en boucle fermée pour K Є [0, ∞[.



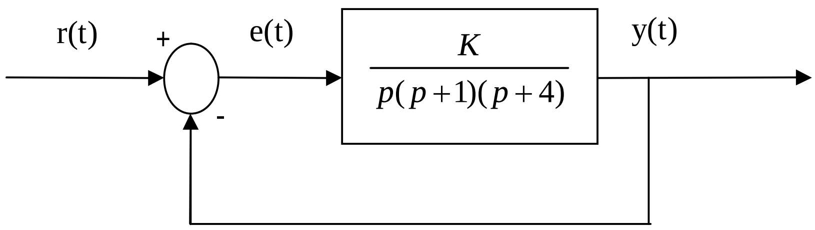
Règle N°01 :

On trace le plan complexe et on place : les pôles de G(p) :x

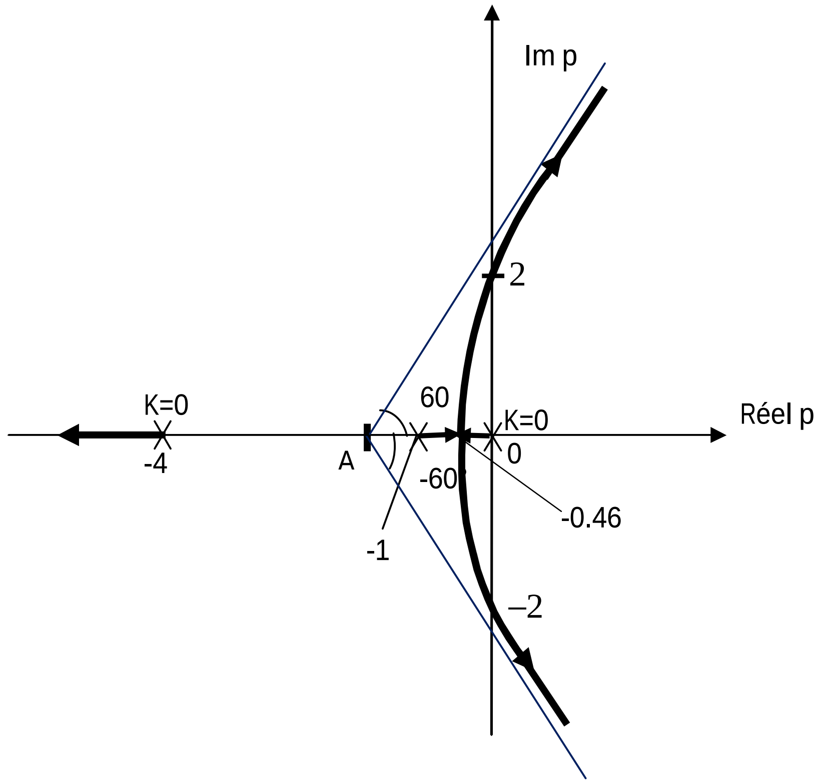
Les zéros de G(p) :o

Puisque le nombre de pôles de H(p)= nombre de pôles de G(p)=3 ; le lieu de pôles de H(p) a "***3"***

Lorsque le nombre de zéros est insuffisant, on place les zéros qui manquent à l'infini (3 zéros à ∞).



Les pôles de G(p) :
0, -1, -4
Les zéros de G(p) :
∞, ∞, ∞
Il existe : 03 branches



Règle N°02 :

Sur l’axe des réels, le lieu des pôles existe à **gauche** d’un nombre **impair** de **pôles** et de **zéros**.

Règle N°03 :

Point de sortie des branches de l’axe des réels est la solution de :

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{G(p)}\right)=0$$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{p(p+1)(p+4)}{K}\right)=0 \Rightarrow \frac{d}{dp}\left(\frac{(p^3+5p^2+4p)}{K}\right)=\frac{(3p^2+10p+4)}{K}=0$$

$$3p^2+10p+4=0,\quad \Delta'=25-12=13,\quad p_1=\frac{-5-\sqrt{13}}{3}=-2.86,\ \ p_2=\frac{-5+\sqrt{13}}{3}=-0.46$$

Une autre méthode pour trouver les points de sorties :

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x-p_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x-z_i}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=0 \Rightarrow x_1=-0.46,\ x_2=-2.86$$

Règle N°04 :

Angle de sortie des branches de l'axe des réels :

03 branches alors 60°.

Règle N°05 :

Asymptotes :

Point d'appui sur l'axe des réels :

$$OA = \frac{\sum (pôles\ de\ G(p)) - \sum (zéros\ de\ G(p))}{(nombre\ de\ pôles\ de\ G(p)) - (nombre\ de\ zéros\ de\ G(p))} \qquad OA = \frac{(0-1-4)-(0)}{(3)-(0)} = \frac{-5}{3} = -1.66$$

L'angle de l'asymptote avec l'axe des réels :

$$\alpha_k = \frac{(1+2k)\pi}{(nombre\ de\ pôles\ de\ G(p)) - (nombre\ de\ zéros\ de\ G(p))} \qquad k = 0, \pm 1,$$

3 zéros à l'infini ⤇3 asymptotes. $\alpha_0 = \frac{\pi}{3},\ \alpha_{-1} = \frac{-\pi}{3},\ \alpha_1 = \pi$

Règle N°06 :

Point de coupure de l'axe imaginaire des racines de ***1+KG(p)=0*** sont : $p = \pm j\omega$ alors :

1+KG(jω)=0

$$1 + KG(p) = 0 \Rightarrow K + p(p+1)(p+4) = 0 \Rightarrow K + (p^3 + 5p^2 + 4p) = 0$$

$$K + ((j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 + 4j\omega) = K - j\omega^3 - 5\omega^2 + 4j\omega = 0$$

$$\begin{cases} -j\omega^3 + 4j\omega = 0 & \Rightarrow \omega = \sqrt{4} = \pm 2 \\ -5\omega^2 + K = 0 & \Rightarrow K = 20 \end{cases}$$

Règle N°07 :

Angle de départ d'un pôle complexe de G(p)

$$\varphi_{(p_0)} = 180° - \sum_{i \neq 0} \angle(p_0 - p_i) + \sum_j \angle(p_0 - z_j)$$

Angle d'arrivée à zéro de G(p)

$$\varphi_{(z_0)} = \sum_i \angle(z_0 - p_i) - \sum_{j \neq 0} \angle(z_0 - z_j) - 180°$$

Pas de pôles complexes, donc pas d'angle de départ d'un pôle complexe ni angle d'arrivée à un zéros de G(p).

Exercice 02 :

Tracer le lieu des pôles de la FT suivante :

$$KG(p) = \frac{K}{p(p^2 + 6p + 25)}$$

Solution :

Règle N°01 :

On trace le plan complexe et on place : les pôles de G(p) :x

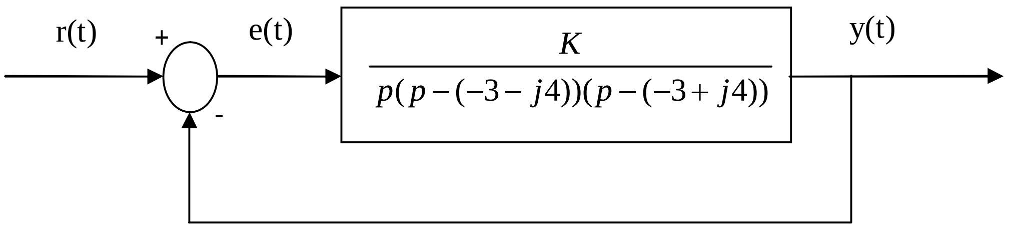
Les zéros de G(p) :o

Puisque le nombre de pôles de H(p)= nombre de pôles de G(p)=3 ; le lieu de pôles de H(p) a "***3***"

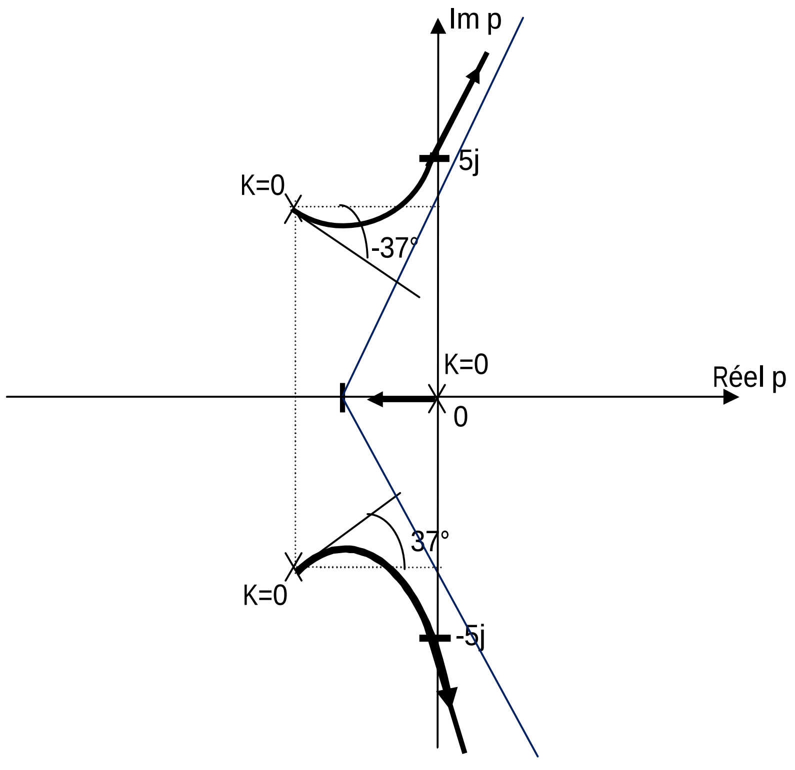
Lorsque le nombre de zéros est insuffisant, on place les zéros qui manquent à l'infini (3 zéros à ∞).

$$KG(p) = \frac{K}{p(p^2 + 6p + 25)}$$

$$p^2 + 6p + 25 = 0 \Rightarrow \Delta' = 9 - 25 = -16 \Rightarrow p_{1,2} = -3 \pm j4$$



Les pôles de G(p) :
0, -3-j4, -3+j4
Les zéros de G(p) :
∞, ∞, ∞
Il existe : 03 branches



Règle N°02 :

Sur l'axe des réels, le lieu des pôles existe à **gauche** d'un nombre **impair** de **pôles** et de **zéros**.

Règle N°03 :

Point de sortie des branches de l'axe des réels est la solution de :

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{G(p)}\right)=0$$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{p(p^2+6p+25)}{K}\right)=0 \Rightarrow \frac{d}{dp}\left(\frac{(p^3+6p^2+25p)}{K}\right)=\frac{(3p^2+12p+25)}{K}=0$$

$$3p^2+12p+25=0,\quad \Delta'=36-75=-39$$

Deux pôles imaginaires conjugués, donc pas de point de sortie de l'axe des réels.

Règle N°04 :

Angle de sortie des branches de l'axe des réels :

03 branches alors 60°.

Règle N°05 :

Asymptotes :

Point d'appui sur l'axe des réels :

$$OA=\frac{\sum\left(pôles\ de\ G(p)\right)-\sum\left(zéros\ de\ G(p)\right)}{\left(nombre\ de\ pôles\ de\ G(p)\right)-\left(nombre\ de\ zéros\ de\ G(p)\right)}$$

$$OA=\frac{\left(0-3-j4-3+j4\right)-\left(0\right)}{\left(3\right)-\left(0\right)}=\frac{-6}{3}=-2$$

L'angle de l'asymptote avec l'axe des réels :

$$\alpha_k=\frac{\left(1+2k\right)\pi}{\left(nombre\ de\ pôles\ de\ G(p)\right)-\left(nombre\ de\ zéros\ de\ G(p)\right)} \qquad k=0,\ \pm 1,$$

3 zéros à l'infini ⤇3 asymptotes. $\alpha_0=\frac{\pi}{3},\ \ \alpha_{-1}=\frac{-\pi}{3},\ \alpha_1=\pi$

Règle N°06 :

Point de coupure de l'axe imaginaire des racines de ***1+KG(p)=0*** sont : $p=\pm j\omega$ alors :

1+KG(jω)=0

$$1+KG(p)=0 \Rightarrow K+p(p^2+6p+25)=0 \Rightarrow K+(p^3+6p^2+25p)=0$$

$$K+((j\omega)^3+6(j\omega)^2+25j\omega)=K-j\omega^3-6\omega^2+25j\omega=0$$

$$\begin{cases}-j\omega^3+25j\omega=0 & \Rightarrow \omega=\sqrt{25}=\pm 5\\ -6\omega^2+K=0 & \Rightarrow K=150\end{cases}$$

Règle N°07 :

Angle de départ d'un pôle complexe de G(p)

$$\varphi_{(p_0)}=180°-\sum_{i\neq 0}\angle(p_0-p_i)+\sum_{j}\angle(p_0-z_j)$$

Angle d'arrivée à zéro de G(p)

$$\varphi_{(z_0)}=\sum_{i}\angle(z_0-p_i)-\sum_{j\neq 0}\angle(z_0-z_j)-180°$$

Puisque p_1 appartient au lieu des pôles on a :

$$\varphi_{p_1}=\lim_{p\to p_1}(\angle((p-p_1)))$$

$$\varphi_{p_1}=\lim_{p\to p_1}(\angle((p-p_1)))=\lim_{p\to p_1}\left(\pi-\sum_{i\neq 1}^{n}\angle((p-p_i))+\sum_{j=1}^{m}\angle((p-z_j))\right)$$

$p_1=-3+4j$

$$\varphi_{p_1}=\pi-\sum_{i\neq 1}^{n}\angle((p-p_i))+\sum_{j=1}^{m}\angle((p-z_j))$$

pas de zéros alors

$$\varphi_{p_1}=\pi-\sum_{i\neq 1}^{n}\angle((p-p_i))$$

$$\varphi_{p_1}=\pi-\angle((-3+j4))-\angle((-3+j4+3+j4)) \qquad \varphi_{p_1}=\pi-\angle((p_1-0))-\angle((p_1-(-3+j4)))$$

$$\varphi_{p_1}=\pi-\angle((-3+j4))-\angle((j8)) \qquad \varphi_{p_1}=180°-127°-90°\Rightarrow\varphi_{p_1}=-37°$$

Exercice 03 :

On désir corrigé à l'aide du correcteur :

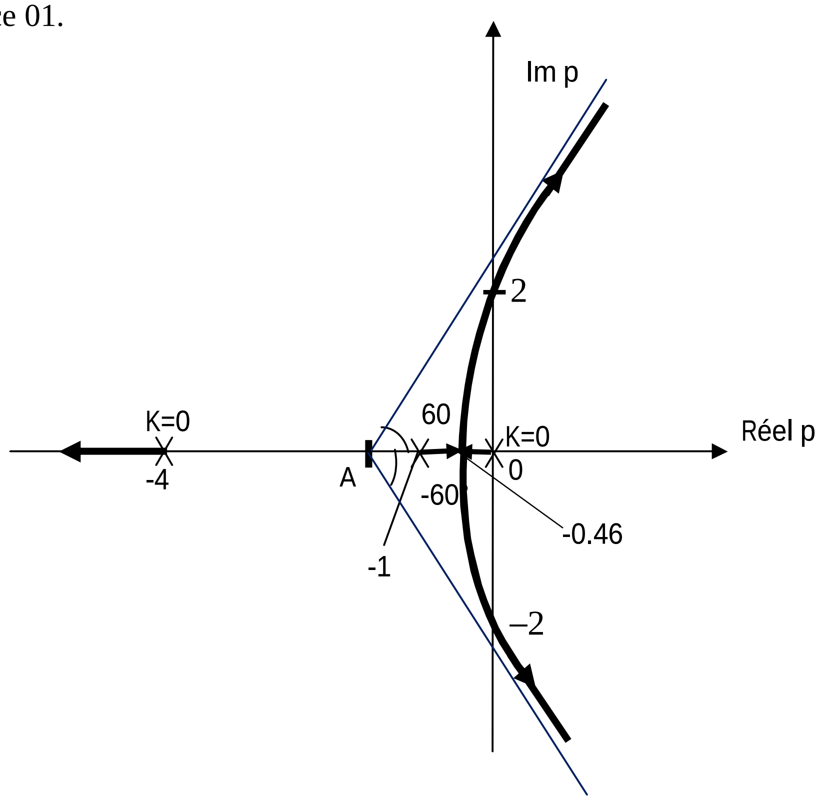
$$C(p)=\frac{p+1.5}{p+15}$$

Le système dont la fonction de transfert en boucle ouverte FTBO

$$KG(p)=\frac{K}{p(p+1)(p+4)}$$

De l'exercice 01.

Solution :



$$C(p)=\frac{p+1.5}{p+15}$$

$$KG(p)=\frac{K}{p(p+1)(p+4)}$$

La FTBO en insérant le correcteur C(p) devient :

$$G_1(p)=\frac{K(p+1.5)}{p(p+1)(p+4)(p+15)}$$

Règle N°01 :

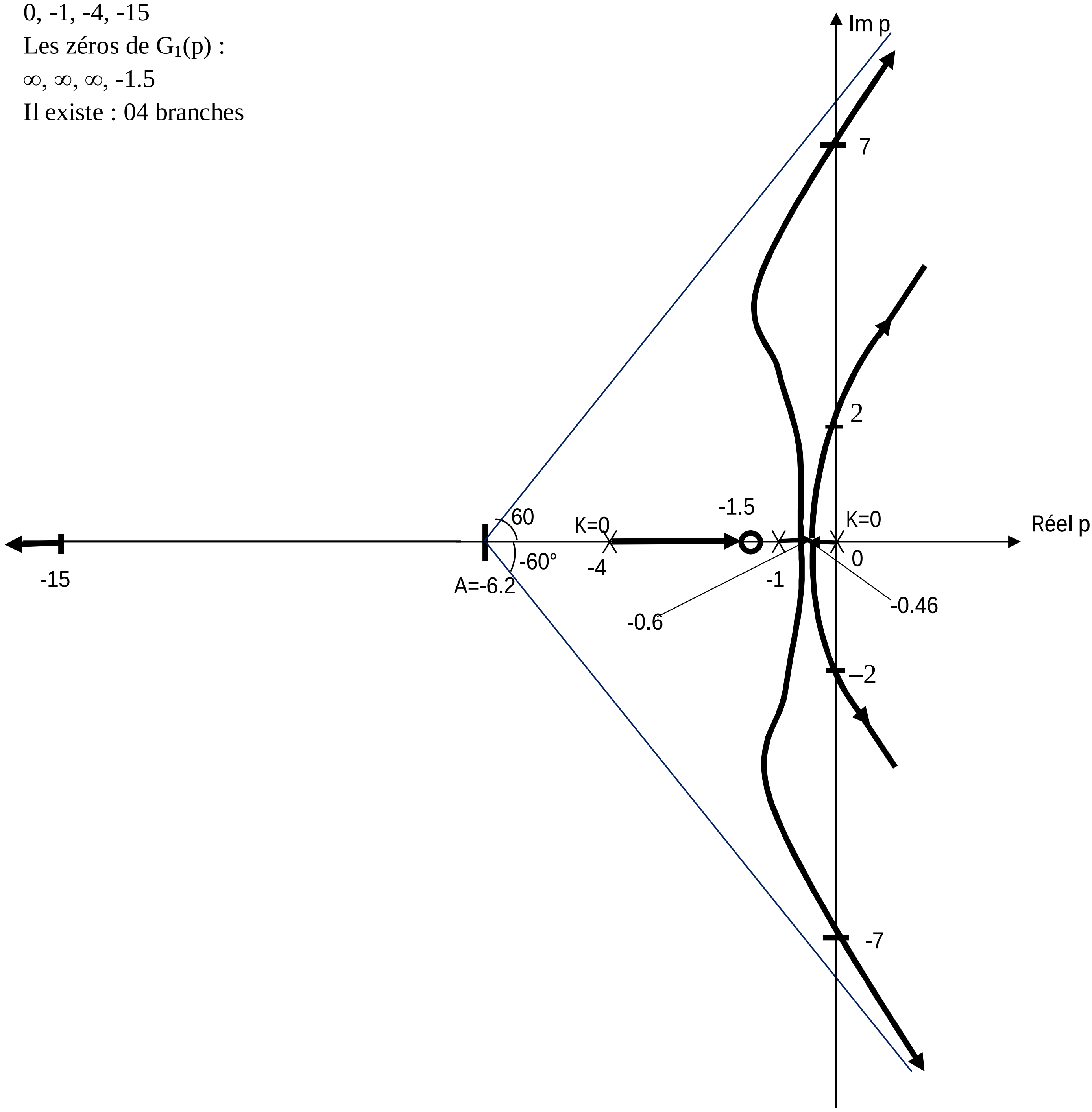
On trace le plan complexe et on place : les pôles de G_1(p) :x

Les zéros de G_1(p) :o

Puisque le nombre de pôles de H(p)= nombre de pôles de G_1(p)=4 ; le lieu de pôles de H(p) a "***3***"

Lorsque le nombre de zéros est insuffisant, on place les zéros qui manquent à l'infini (3 zéros à ∞) et un zéro à -1.5.

Les pôles de $G_1(p)$:
0, -1, -4, -15
Les zéros de $G_1(p)$:
∞, ∞, ∞, -1.5
Il existe : 04 branches



Règle N°02 :

Sur l'axe des réels, le lieu des pôles existe à **gauche** d'un nombre **impair** de **pôles** et de **zéros**.

Règle N°03 :

Point de sortie des branches de l'axe des réels est la solution de :

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{G(p)}\right)=0$$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{p(p+1)(p+4)(p+15)}{K(p+1.5)}\right)=0 \Rightarrow \frac{d}{dp}\left(\frac{(p^3+5p^2+4p)(p+15)}{K(p+1.5)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dp}\left(\frac{(p^3+5p^2+4p)(p+15)}{K(p+1.5)}\right)=\frac{d}{dp}\left(\frac{(p^4+15p^3+5p^3+75p^2+4p^2+60p)}{K(p+1.5)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dp}\left(\frac{(p^4+20p^3+79p^2+60p)}{K(p+1.5)}\right)=\frac{1}{K}\frac{(4p^3+60p^2+158p+60)(p+1.5)-(p^4+20p^3+79p^2+60p)}{(p+1.5)^2}=0$$

$$\Rightarrow (4p^3+60p^2+158p+60)(p+1.5)-(p^4+20p^3+79p^2+60p)=0$$

$$\Rightarrow (4p^4+6p^3+60p^3+90p^2+158p^2+237p+60p+90)-(p^4+20p^3+79p^2+60p)=0$$

$$\Rightarrow (3p^4+46p^3+169p^2+237p+90)=0$$

$$p_1=-0.6$$
$$p_2=-10.75$$
$$p_3=-2-j0.87$$
$$p_4=-2+j0.87$$

Donc $p=-0.6$

Règle N°04 :

Angle de sortie des branches de l'axe des réels :

03 branches alors 60°.

Règle N°05 :

Asymptotes :

Point d'appui sur l'axe des réels :

$$OA=\frac{\sum\left(pôles\ de\ G(p)\right)-\sum\left(zéros\ de\ G(p)\right)}{\left(nombre\ de\ pôles\ de\ G(p)\right)-\left(nombre\ de\ zéros\ de\ G(p)\right)}$$

$$OA=\frac{(0-1-4-15)-(-1.5)}{(4)-(1)}=\frac{-18.5}{3}=-6.2$$

L'angle de l'asymptote avec l'axe des réels :

$$\alpha_k = \frac{(1+2k)\pi}{(nombre\ de\ \ pôles\ de\ G(p)) - (nombre\ de\ zéros\ de\ G(p))} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2$$

3 zéros à l'infini ⤇3 asymptotes. $\alpha_0 = \frac{\pi}{3},\ \ \alpha_{-1} = \frac{-\pi}{3},\ \alpha_1 = \pi,\ \ \alpha_{-2} = -\pi$

Règle N°06 :

Point de coupure de l'axe imaginaire des racines de ***1+KG(p)=0*** sont : $p = \pm j\omega$ alors :

1+KG(jω)=0

$$1 + KG(p) = 0 \Rightarrow K(p+1.5) + p(p+1)(p+4)(p+15) = 0 \Rightarrow K(p+1.5) + (p^3 + 5p^2 + 4p)(p+15) = 0$$
$$\Rightarrow K(p+1.5) + (p^4 + 15p^3 + 5p^3 + 75p^2 + 4p^2 + 60p) = 0 \Rightarrow K(p+1.5) + (p^4 + 20p^3 + 79p^2 + 60p) = 0$$
$$\Rightarrow p^4 + 20p^3 + 79p^2 + (60+K)p + 1.5K = 0$$
$$\Rightarrow (j\omega)^4 + 20(j\omega)^3 + 79(j\omega)^2 + (60+K)j\omega + 1.5K = 0 \Rightarrow \omega^4 - 20j\omega^3 - 79\omega^2 + (60+K)j\omega + 1.5K = 0$$

$$\begin{array}{l|ccc}
p^4 & 1 & 79 & 1.5K \\
p^3 & 20 & (60+K) & 0 \\
p^2 & \frac{1520-K}{20} & 1.5K & 0 \\
p^1 & \frac{(1520-K)(60+K)-600K}{(1520-K)} & 0 & 0 \\
p^0 & 1.5K & 0 & 0
\end{array}$$

$$\frac{1520-K}{20} = 0 \Rightarrow K = 1520$$

$$\frac{(1520-K)(60+K)-600K}{(1520-K)} = 0 \Rightarrow (1520-K)(60+K) - 600K = 0$$
$$\Rightarrow (1520-K)(60+K) - 600K = 0 \Rightarrow 91200 + 1520K - 60K - K^2 - 600K = 0$$
$$\Rightarrow 91200 + 1520K - 60K - K^2 - 600K = 0 \Rightarrow 91200 + 860K - K^2 = 0$$
$$K^2 - 860K - 91200 = 0 \Rightarrow \Delta' = 184900 + 91200 = 276100$$
$$\Rightarrow K = 956$$

$$\frac{1520-K}{20}p^2 + 1.5K = 0 \Rightarrow (1520-K)p^2 + 30K = 0 \Rightarrow (1520-K)p^2 + 30K = 0$$
$$\Rightarrow 564p^2 + 28680 = 0 \Rightarrow p^2 = 50 \Rightarrow p = \pm 7.12 \Rightarrow \omega = \pm j7.07$$

Exercice 04 :

Tracer le lieu des pôles de la FT suivante :

$$KG(p)=\frac{K}{p(p^2+2p+2)}$$

Solution :

Règle N°01 :

On trace le plan complexe et on place : les pôles de G(p) :x

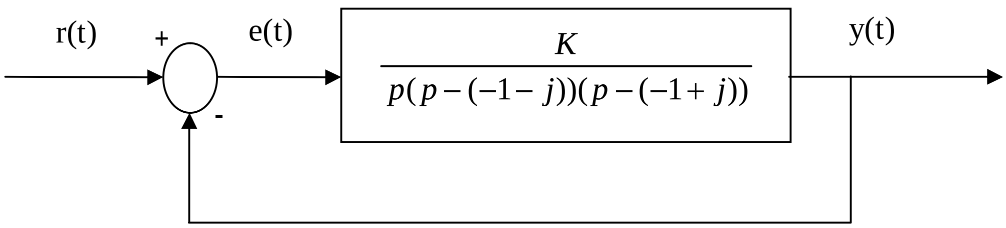
Les zéros de G(p) :o

Puisque le nombre de pôles de H(p)= nombre de pôles de G(p)=3 ; le lieu de pôles de H(p) a "***3"***

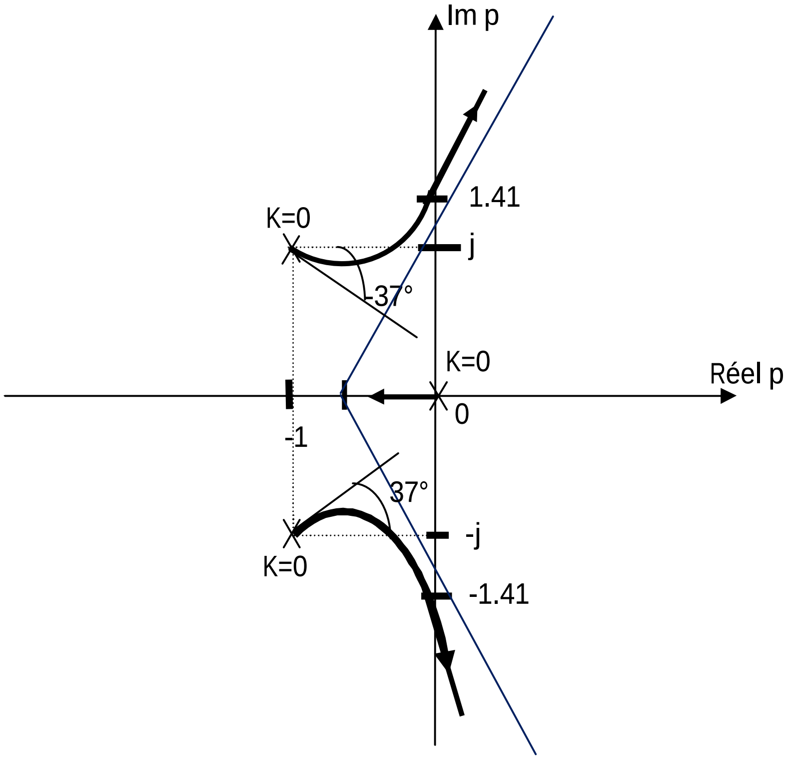
Lorsque le nombre de zéros est insuffisant, on place les zéros qui manquent à l'infini (3 zéros à ∞).

$$KG(p)=\frac{K}{p(p^2+6p+25)}$$

$$p^2+2p+2=0 \Rightarrow \Delta'=1-2=-1 \Rightarrow p_{1,2}=-1\pm j$$



Les pôles de G(p) :
0, -1-j, -1+j
Les zéros de G(p) :
∞, ∞, ∞
Il existe : 03 branches



Règle N°02 :

Sur l'axe des réels, le lieu des pôles existe à **gauche** d'un nombre **impair** de **pôles** et de **zéros**.

Règle N°03 :

Point de sortie des branches de l'axe des réels est la solution de :

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{G(p)}\right)=0$$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{p(p^2+2p+2)}{K}\right)=0 \Rightarrow \frac{d}{dp}\left(\frac{(p^3+2p^2+2p)}{K}\right)=\frac{(3p^2+4p+2)}{K}=0$$

$$3p^2+4p+2=0, \quad \Delta'=4-6=-2$$

Deux pôles imaginaires conjugués et un seul pôle réel, donc pas de point de sortie de l'axe des réels.

Règle N°04 :

Angle de sortie des branches de l'axe des réels :

03 branches alors 60°.

Règle N°05 :

Asymptotes :

Point d'appui sur l'axe des réels :

$$OA=\frac{\sum\left(pôles\ de\ G(p)\right)-\sum\left(zéros\ de\ G(p)\right)}{\left(nombre\ de\ pôles\ de\ G(p)\right)-\left(nombre\ de\ zéros\ de\ G(p)\right)}$$

$$OA=\frac{\left(0-1-j-1+j\right)-\left(0\right)}{\left(3\right)-\left(0\right)}=\frac{-2}{3}=-0.66$$

L'angle de l'asymptote avec l'axe des réels :

$$\alpha_k=\frac{\left(1+2k\right)\pi}{\left(nombre\ de\ pôles\ de\ G(p)\right)-\left(nombre\ de\ zéros\ de\ G(p)\right)} \qquad k=0, \pm 1,$$

3 zéros à l'infini ⤇3 asymptotes. $\alpha_0=\frac{\pi}{3}, \quad \alpha_{-1}=\frac{-\pi}{3}, \ \alpha_1=\pi$

Règle N°06 :

Point de coupure de l'axe imaginaire des racines de ***1+KG(p)=0*** sont : $p=\pm j\omega$ alors :

1+KG(jω)=0

$$1+KG(p)=0 \Rightarrow K+p(p^2+2p+2)=0 \Rightarrow K+(p^3+2p^2+2p)=0$$

$$K + ((j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2j\omega) = K - j\omega^3 - 2\omega^2 + 2j\omega = 0$$

$$\begin{cases} -j\omega^3 + 2j\omega = 0 & \Rightarrow \omega = \sqrt{2} = \pm 1.41 \\ -2\omega^2 + K = 0 & \Rightarrow K = 4 \end{cases}$$

Règle N°07 :

Angle de départ d'un pôle complexe de G(p)

$$\varphi_{(p_0)} = 180° - \sum_{i \neq 0} \angle(p_0 - p_i) + \sum_{j} \angle(p_0 - z_j)$$

Angle d'arrivée à zéro de G(p)

$$\varphi_{(z_0)} = \sum_{i} \angle(z_0 - p_i) - \sum_{j \neq 0} \angle(z_0 - z_j) - 180°$$

Puisque p_1 appartient au lieu des pôles on a :

$$\varphi_{p_1} = \lim_{p \to p_1} (\angle((p - p_1)))$$

$$\varphi_{p_1} = \lim_{p \to p_1} (\angle((p - p_1))) = \lim_{p \to p_1} \left(\pi - \sum_{i \neq 1}^{n} \angle((p - p_i)) + \sum_{j=1}^{m} \angle((p - z_j)) \right)$$

p_1=-3+4j

$$\varphi_{p_1} = \pi - \sum_{i \neq 1}^{n} \angle((p - p_i)) + \sum_{j=1}^{m} \angle((p - z_j))$$

pas de zéros alors

$$\varphi_{p_1} = \pi - \sum_{i \neq 1}^{n} \angle((p - p_i))$$

$$\varphi_{p_1} = \pi - \angle((-1 + j)) - \angle((-1 + j + 1 + j)) \qquad \varphi_{p_1} = \pi - \angle((p_1 - 0)) - \angle((p_1 - (-1 + j)))$$

$$\varphi_{p_1} = \pi - \angle((-1 + j)) - \angle((j2))$$

$$\varphi_{p_1} = 180° - 135° - 90° \Rightarrow \varphi_{p_1} = -45°$$

Exercice 06 :

Tracer le lieu des pôles de la FT suivante :

$$KG(p) = \frac{K(p+1)}{p(p+2)(p+4)}$$

Calculer le gain K de façon que G(p) en boucle fermée du système doit avoir un coefficient d'amortissement ξ=0.5 pour les pôles complexes dominants.

Solution :

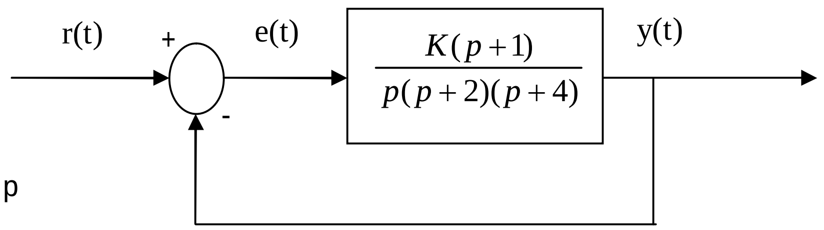
Règle N°01 :

On trace le plan complexe et on place : les pôles de G(p) :x

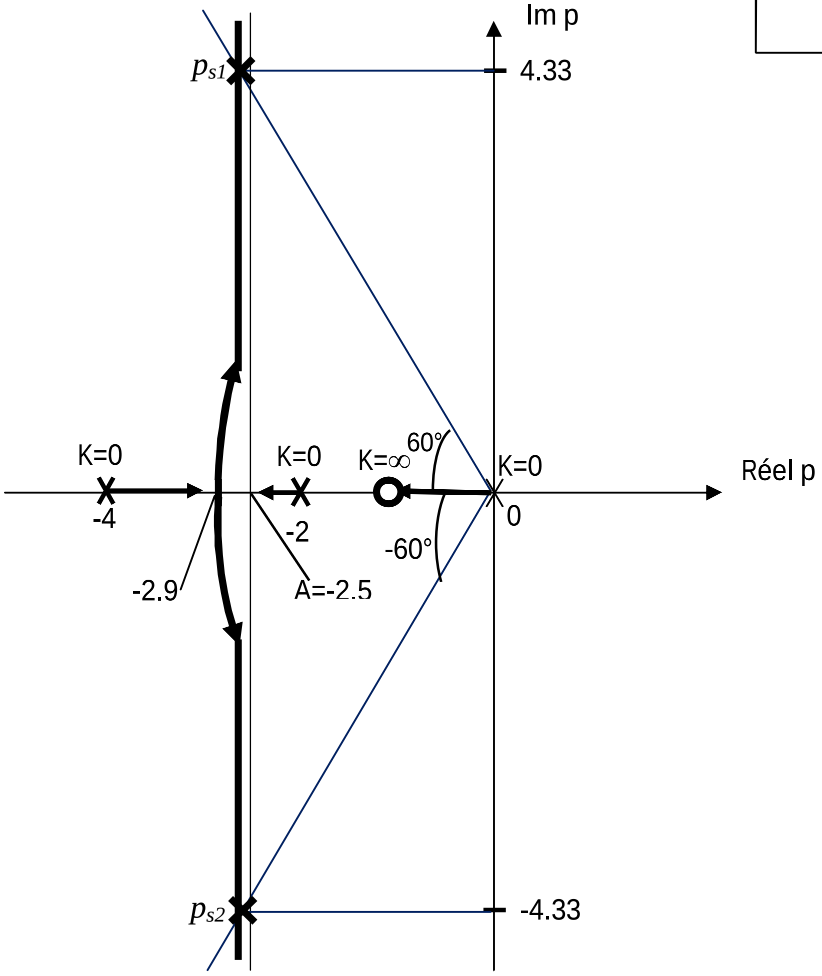
Les zéros de G(p) :o

Puisque le nombre de pôles de H(p)= nombre de pôles de G(p)=3 ; le lieu de pôles de H(p) a "**3**"

Lorsque le nombre de zéros est insuffisant, on place les zéros qui manquent à l'infini (2 zéros à ∞).



Les pôles de G(p) :
0, -2, -4
Les zéros de G(p) :
-1, ∞, ∞
Il existe : 03 branches



Règle N°02 :

Sur l'axe des réels, le lieu des pôles existe à **gauche** d'un nombre **impair** de **pôles** et de **zéros**.

Règle N°03 :

Point de sortie des branches de l'axe des réels est la solution de :

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{G(p)}\right)=0$$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{p(p+2)(p+4)}{K(p+1)}\right)=0 \Rightarrow \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{K}\frac{(p^3+6p^2+8p)}{(p+1)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(3p^2+12p+8)(p+1)-(p^3+6p^2+8p)}{(p+1)^2}=0 \Rightarrow (3p^2+12p+8)(p+1)-(p^3+6p^2+8p)=0$$

$$\Rightarrow 3p^3+15p^2+20p+8-(p^3+6p^2+8p)=(2p^3+9p^2+12p+8)=0 \;\Rightarrow\; p=-2.9$$

Règle N°04 :

Angle de sortie des branches de l'axe des réels :

03 branches alors 60°.

Règle N°05 :

Asymptotes :

Point d'appui sur l'axe des réels :

$$OA=\frac{\sum(\text{pôles de } G(p))-\sum(\text{zéros de } G(p))}{(\text{nombre de pôles de } G(p))-(\text{nombre de zéros de } G(p))} \qquad OA=\frac{(0-2-4)-(-1)}{(3)-(1)}=\frac{-5}{2}=-2.5$$

L'angle de l'asymptote avec l'axe des réels :

$$\alpha_k=\frac{(1+2k)\pi}{(\text{nombre de pôles de } G(p))-(\text{nombre de zéros de } G(p))} \qquad k=0,\pm 1,$$

3 zéros à l'infini ⤇3 asymptotes. $\alpha_0=\frac{\pi}{2},\;\alpha_{-1}=\frac{-\pi}{2},\;\alpha_1=\frac{3\pi}{2}$

Règle N°06 :

Point de coupure de l'axe imaginaire des racines de ***1+KG(p)=0*** sont $p=\pm j\omega$ alors :

1+KG(jω)=0

$$1+KG(p)=0 \Rightarrow K(p+1)+p(p+2)(p+4)=0 \Rightarrow K(p+1)+(p^3+6p^2+8p)=0$$

$$\Rightarrow K(j\omega+1)+((j\omega)^3+6(j\omega)^2+8(j\omega))=0$$

$$\begin{cases} -j\omega^3 + (8+K)\,j\omega = 0 & \Rightarrow -j\omega^3 + (8+6\omega^2)\,j\omega = 0 \Rightarrow (8+5\omega^2) = 0 \Rightarrow \omega^2 = -8 \\ & -6\omega^2 + K = 0 \end{cases}$$

Pas d'intersection avec l'axe des imaginaires.

Règle N°07 :

Angle de départ d'un pôle complexe de G(p)

$$\varphi_{(p_0)} = 180° - \sum_{i \neq 0} \angle(p_0 - p_i) + \sum_{j} \angle(p_0 - z_j)$$

Angle d'arrivée à zéro de G(p)

$$\varphi_{(z_0)} = \sum_{i} \angle(z_0 - p_i) - \sum_{j \neq 0} \angle(z_0 - z_j) - 180°$$

Pas de pôles complexes, donc pas d'angle de départ d'un pôle complexe ni angle d'arrivée à un zéros de G(p).

$\xi=0.5 \Rightarrow \cos\theta=0.5 \Rightarrow \theta=60°$

$$\omega_d \; ? \quad tg\theta = \frac{\omega_d}{\sigma} \Rightarrow \omega_d = 4.32$$

$$p_s = -2.5 \pm j4.32$$

$$K = \left| \frac{1}{G(p)} \right|_{p=p_s} = 21.79$$

Exercice 07 :

Soit le système suivant :

$$KG(p) = \frac{K}{p^2(1+0.2p)}$$

Ce système doit satisfaire en BF les spécifications suivantes :

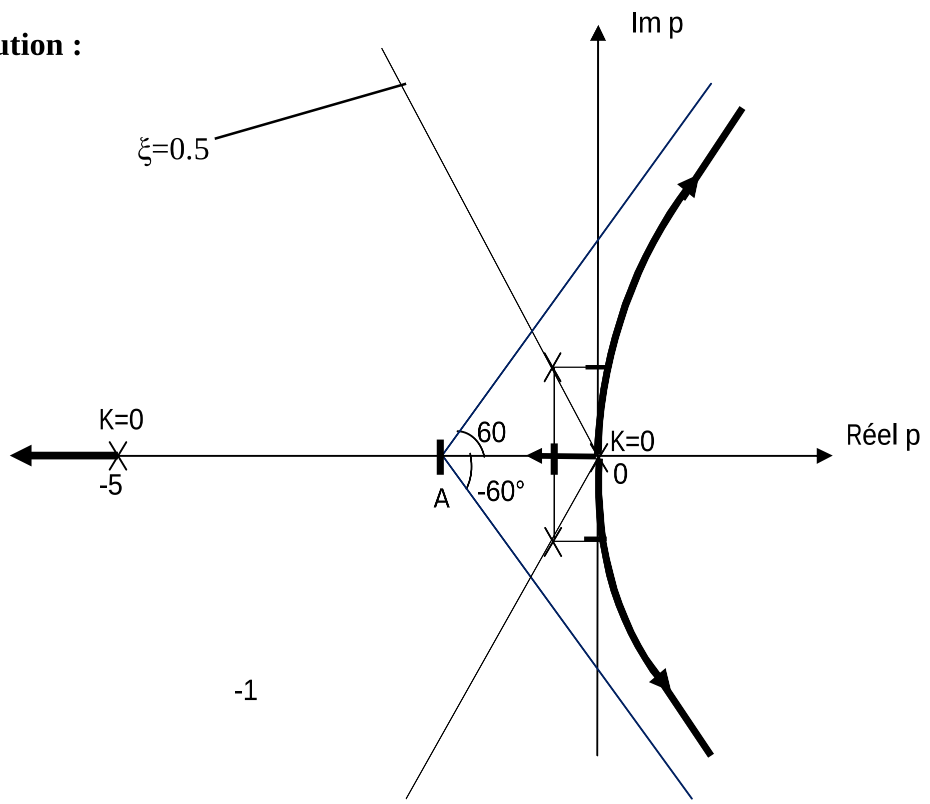
$\xi=0.5$ et $\omega_n=0.9$

1) Expliquer à l'aide d'un lieu des pôles pourquoi ce système ne satisfait pas ces spécifications.

2) Calculer un compensateur $G_c(p) = (p+a)/(p+b)$ qui permet au système en BF à retour unitaire de satisfaire ces spécifications.

3) calculer la valeur du gain K.

Solution :



$$KG(p) = \frac{K}{p^2(1+0.2p)} = \frac{K}{p^2(p+5)}$$

Règle N°01 :

On trace le plan complexe et on place : les pôles de $G_1(p)$:x

Les zéros de $G_1(p)$:o

Puisque le nombre de pôles de H(p)= nombre de pôles de $G_1(p)$=4 ; le lieu de pôles de H(p) a "***3"***

Lorsque le nombre de zéros est insuffisant, on place les zéros qui manquent à l'infini (3 zéros à ∞).

Les pôles de $G_1(p)$:
0, 0, -5
Les zéros de $G_1(p)$:
∞, ∞, ∞,
Il existe : 03 branches

Règle N°02 :

Sur l'axe des réels, le lieu des pôles existe à **gauche** d'un nombre **impair** de **pôles** et de **zéros**.

Règle N°03 :

Point de sortie des branches de l'axe des réels est la solution de :

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{G(p)}\right)=0$$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{p^2(p+5)}{K}\right)=0 \Rightarrow \frac{d}{dp}\left(\frac{(p^3+5p^2)}{K}\right)=\left(\frac{3p^2+10p}{K}\right)=0$$

$$\Rightarrow 3p^2+10p=0 \Rightarrow p(3p+10)=0 \Rightarrow p_1=0, \quad p_2=\frac{-10}{3}=-3.33$$

Règle N°04 :

Angle de sortie des branches de l'axe des réels :

03 branches alors 60°.

Règle N°05 :

Asymptotes :

Point d'appui sur l'axe des réels :

$$OA=\frac{\sum(\text{pôles de } G(p))-\sum(\text{zéros de } G(p))}{(\text{nombre de pôles de } G(p))-(\text{nombre de zéros de } G(p))}$$

$$OA=\frac{(0-0-5)-(0)}{(3)-(0)}=\frac{-5}{3}=-1.66$$

L'angle de l'asymptote avec l'axe des réels :

$$\alpha_k = \frac{(1+2k)\pi}{(nombre\ de\ pôles\ de\ G(p)) - (nombre\ de\ zéros\ de\ G(p))} \qquad k = 0,\ \pm 1, \pm 2$$

3 zéros à l'infini ⤇3 asymptotes.

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{3},\quad \alpha_{-1} = \frac{-\pi}{3},\ \alpha_1 = \pi$$

Règle N°06 :

Point de coupure de l'axe imaginaire des racines de ***1+KG(p)=0*** sont : $p = \pm j\omega$ alors :

1+KG(jω)=0

$$1 + KG(p) = 0 \Rightarrow K + p^2(p+5) = 0 \Rightarrow K + (p^3 + 5p^2) = 0,\ \ p = j\omega$$

$$\Rightarrow K + (j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 = 0 \Rightarrow K - j\omega^3 - 5\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -j\omega^3 = 0 \Rightarrow \omega = 0 \\ K - 5\omega^2 = 0 \Rightarrow K = 0 \end{cases}$$

Les pôles complexes dominants sont :

$$p_{s_{1,2}} = -\sigma \pm j\omega_d$$

$$p_{s_{1,2}} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2},\ \ \xi = 0.5 \ \ \omega_n = 0.9$$

$$p_{s_{1,2}} = -0.45 \pm j0.78$$

Du tracé ci-dessus, on remarque que les spécifications choisis ne sont pas satisfaisante, parceque le lieu des pôles ne passe pas par les pôles dominants résultants de ces spécifications.

2) Calcule du compensateur $G_c(p) = (p+a)/(p+b)$ qui permet au système en BF à retour unitaire de satisfaire ces spécifications.

   $$p_{s_{1,2}} = -0.45 \pm j0.78$$

$$\angle G(p_{s_1}) = -\angle p_{s_1} - \angle p_{s_1} - \angle (p_{s_1} + 5)$$
$$= -\angle(-0.45 + j0.78) - \angle(-0.45 + j0.78) - \angle(-0.45 + j5.78)$$
$$= -\left(arctg\left(\frac{0.78}{-0.45}\right)\right) - \left(arctg\left(\frac{0.78}{-0.45}\right)\right) - \left(arctg\left(\frac{5.78}{-0.45}\right)\right)$$

Calculer

$$= 70°$$

$$\theta = -180° - (-250°)$$

Donc : $\theta = \angle G(p_{s_1}) = 70°$

On fixe a=0.5

$$\Rightarrow G_C(p) = \frac{p+a}{p+b}$$

$$\angle(p_{s_1} + a) - \angle(p_{s_1} + b) = 70°$$
$$\angle(p_{s_1} + 0.5) - \angle(p_{s_1} + b) = 70°$$
$$\angle(-0.45 + j0.70 + 0.5) - \angle(-0.45 + j0.70 + b) = 70°$$
$$105.36 - \angle(-1.33 + j3.02 + a) = 68.8°$$
$$\Rightarrow b = 2.5$$

$$G'(p) = K\frac{p+0.5}{p+2.5}\frac{1}{p^2(p+5)}$$

$$K = \frac{1}{\left|G(p_{s_1})\right|\left|G_c(p_{s_1})\right|} \approx 7$$