Chapitre VI

Synthèse des contrôleurs dans le domaine fréquentielles

I. Introduction

La synthèse dans le domaine fréquentiel est basée sur la réponse fréquentielle. La méthode est **graphique.** On peut utiliser les représentations de la réponse fréquentielle courantes (Bode, Nyquist (polaire), Black-Nichols).

La méthode préférée est basée sur le diagramme de Bode. Avant de considérer la synthèse des contrôleurs, il est utile d'analyser leurs propriétés dans le domaine fréquentiel.

II. Analyse fréquentielle des contrôleurs

Rappelons les propriétés intrinsèques des contrôleurs :

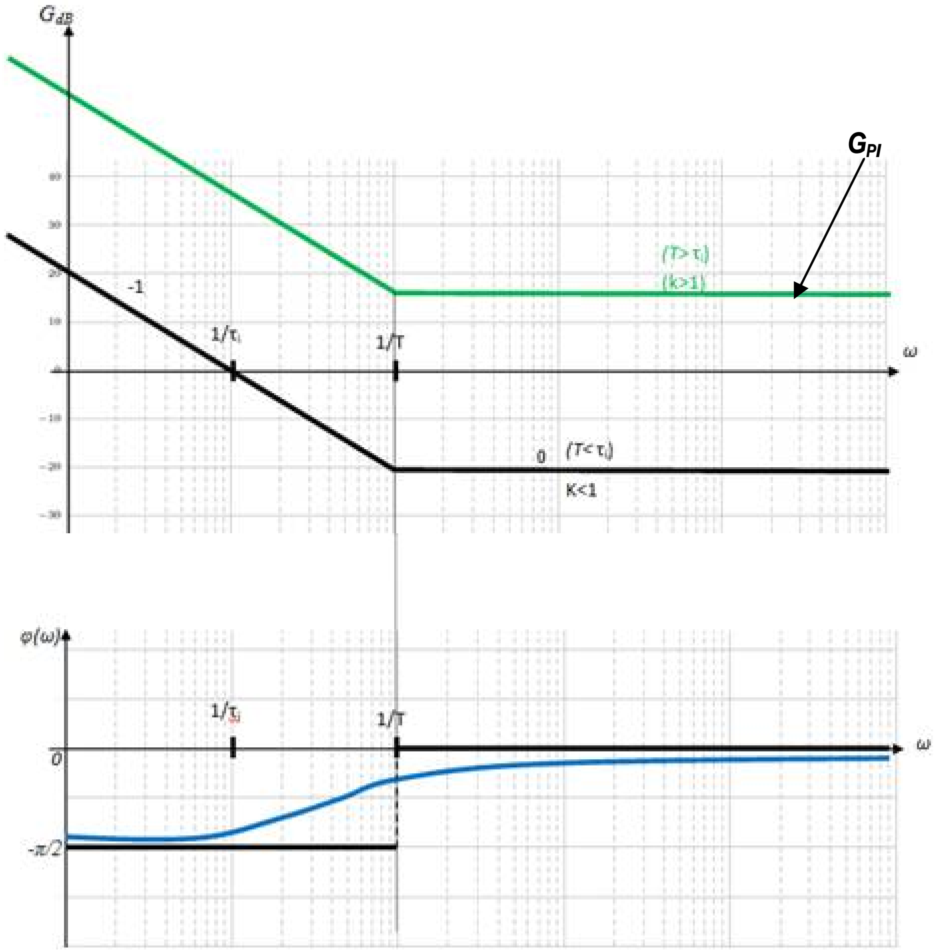
Contrôleurs	Propriétés intrinsèques	Compensateur utilisé
PI	Élimine l'erreur	Retard de phase : diminue l'erreur
PD	Améliore la stabilité	Avance de phase : améliore la stabilité
PID	Élimine l'erreur+améliore la stabilité	Avance+Retard de phase : diminue l'erreur+améliore la stabilité

Nous allons maintenant tracer le diagramme de Bode de ces contrôleurs :

II.1. Régulateur *PI* :

$$G_{PI}(p) = K + \frac{1}{\tau_i p} = \frac{Tp+1}{\tau_i p}$$

Pour $T<\tau_i$

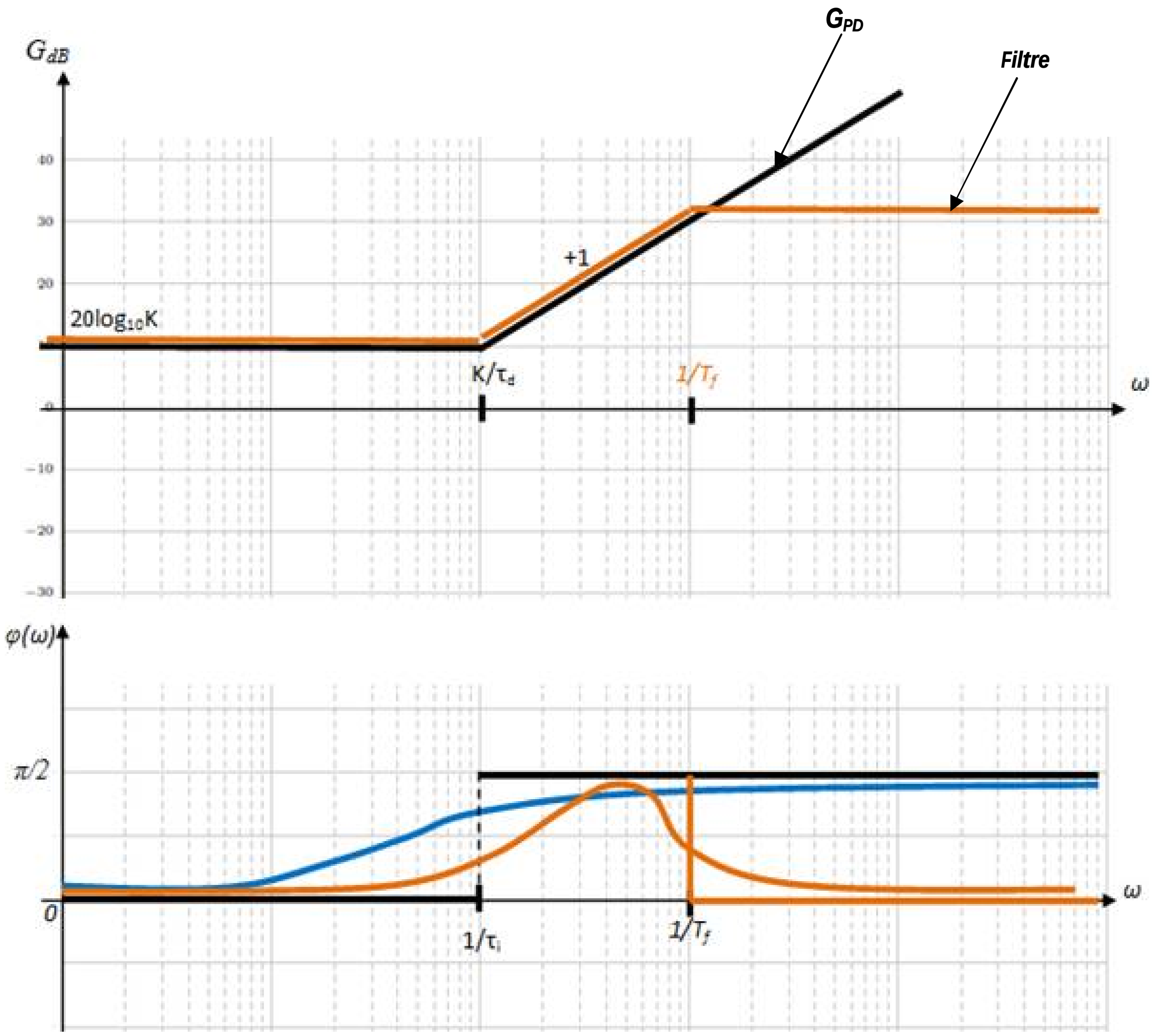


Caractéristique :

Phase négative (qui peut déstabiliser le système pente (-1) aux basses fréquences (BF⇒ω<1/T)).

II.2. Régulateur *PD* :

$$G_{PD}(p) = K + \tau_d\, p = K\left(1 + \frac{\tau_d}{K}\, p\right)$$

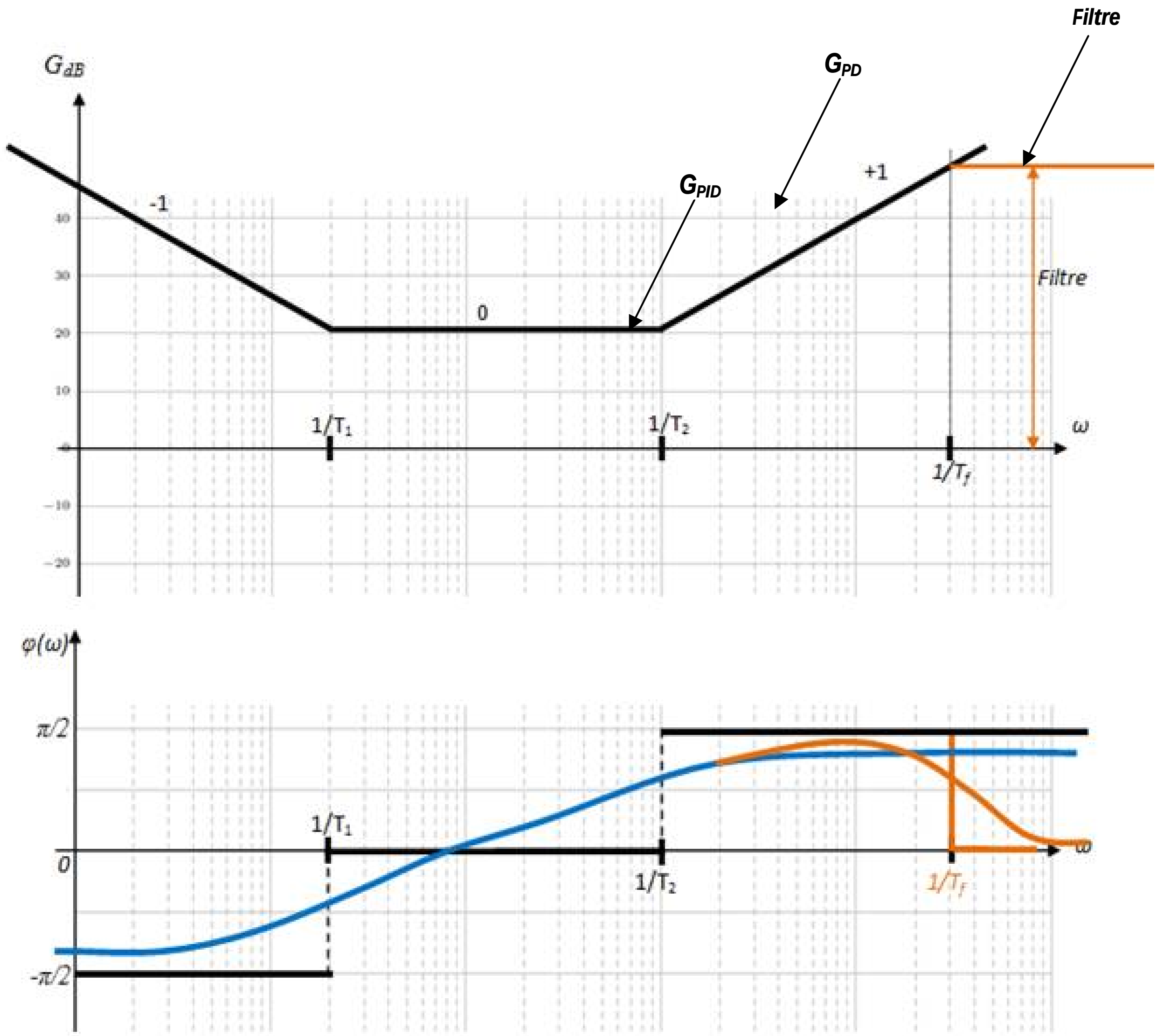


Phase positive : effet de stabilisation, pente (+1) aux hautes fréquences (HF⇒$\omega > K/\tau_d$)). Amplification des parasites, pour éliminer cet effet amplificateur on ajoute un filtre de type :

$$F(p) = \frac{1}{1 + T_f\, p}$$

II.3. Régulateur *PID* :

$$G_{PD}(p) = K + \frac{1}{\tau_i p} + \tau_d p = \frac{(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{\tau_i p}$$



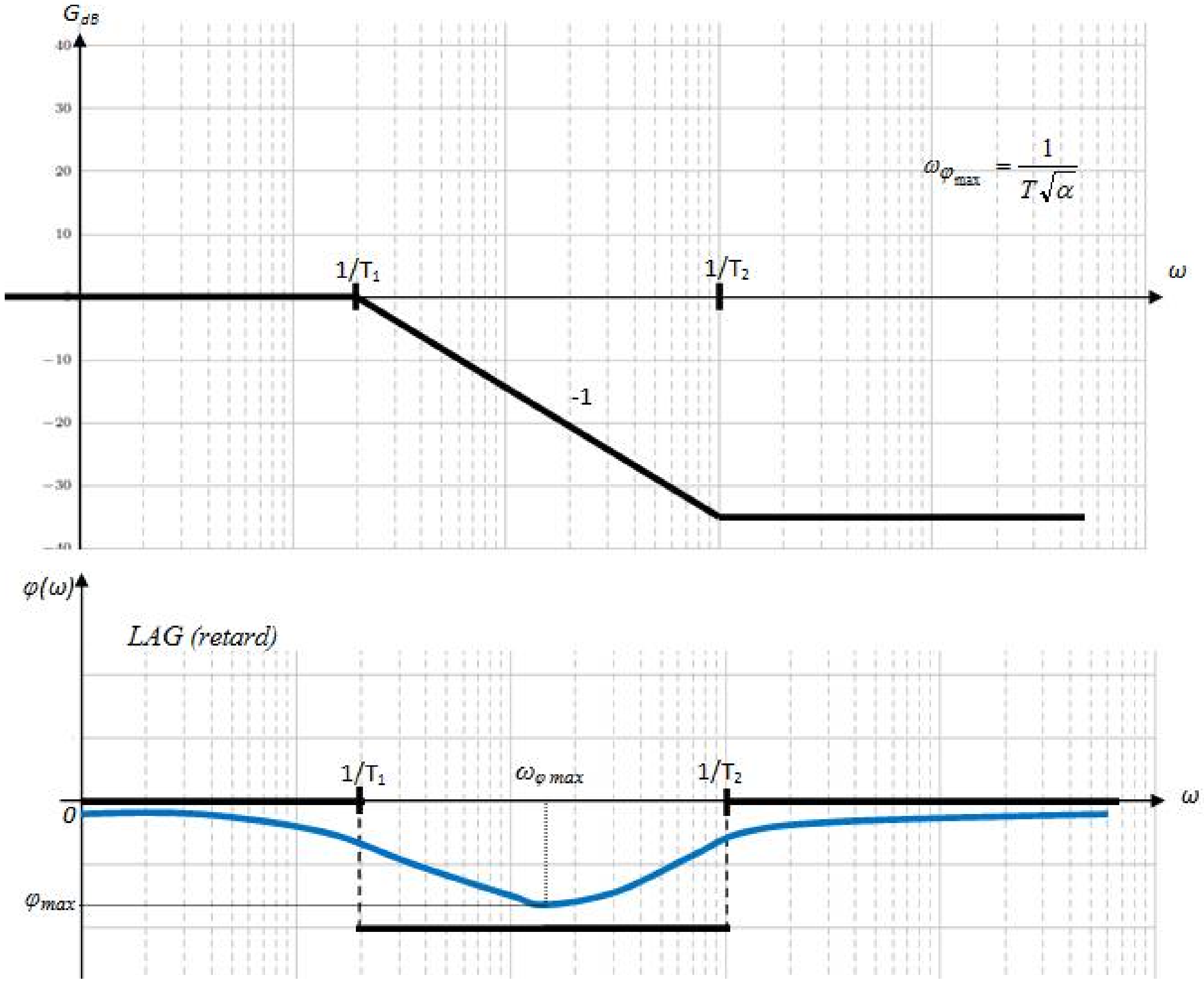
Régulateur *PID* ⤇ effet de *PI* + effet de *PD*

II.4. Compensateur à retard de phase (LAG):

$$G_{RP}(p) = \frac{1+T_1 p}{1+T_2 p} \quad \left(\frac{p+a}{p+b}, \, b < a\right)$$

$$T_2 > T_1 \Rightarrow \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_1}, \qquad \frac{1}{T_2} = b \;\; et \;\; \frac{1}{T_1} = a$$

$$G_{RP}(p) = \frac{1+Tp}{1+\alpha Tp}, \; \alpha > 1$$



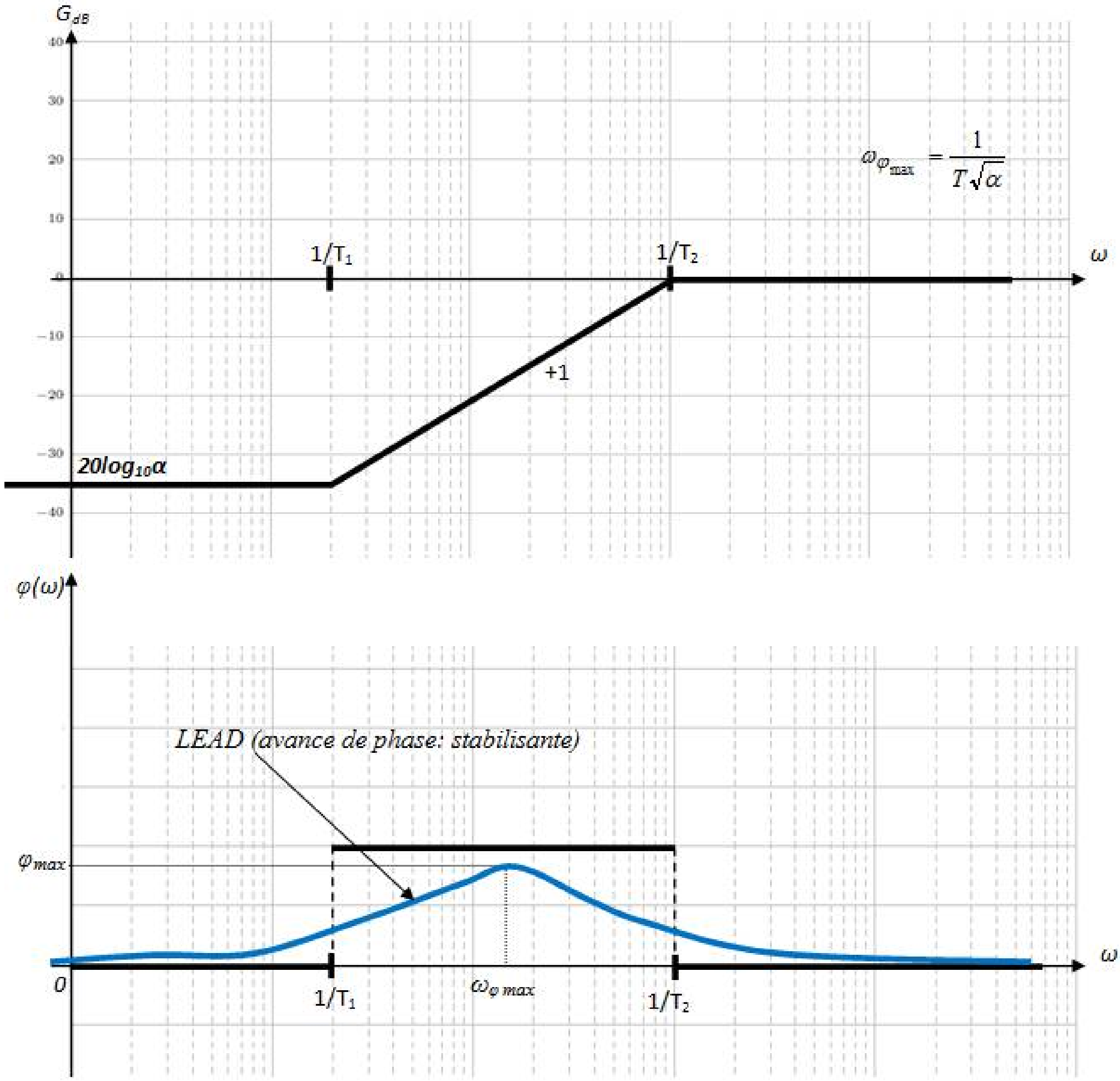
$$\omega_{\varphi_{\max}} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \quad \text{et on a :} \quad \alpha = \frac{1 - \sin\varphi_{\max}}{1 + \sin\varphi_{\max}}$$

Phase négative (déstabilisante), pente (-1) entre $\frac{1}{T_1}$ *et* $\frac{1}{T_2}$

II.5. Compensateur à avance de phase (LEAD):

$$G_{AV}(p) = \frac{1+T_1 p}{1+T_2 p} \quad \left(\frac{p+a}{p+b},\ a<b\right) \qquad T_1 > T_2 \Rightarrow \frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_2}, \qquad \frac{1}{T_1} = a \ \ et \ \frac{1}{T_2} = b$$

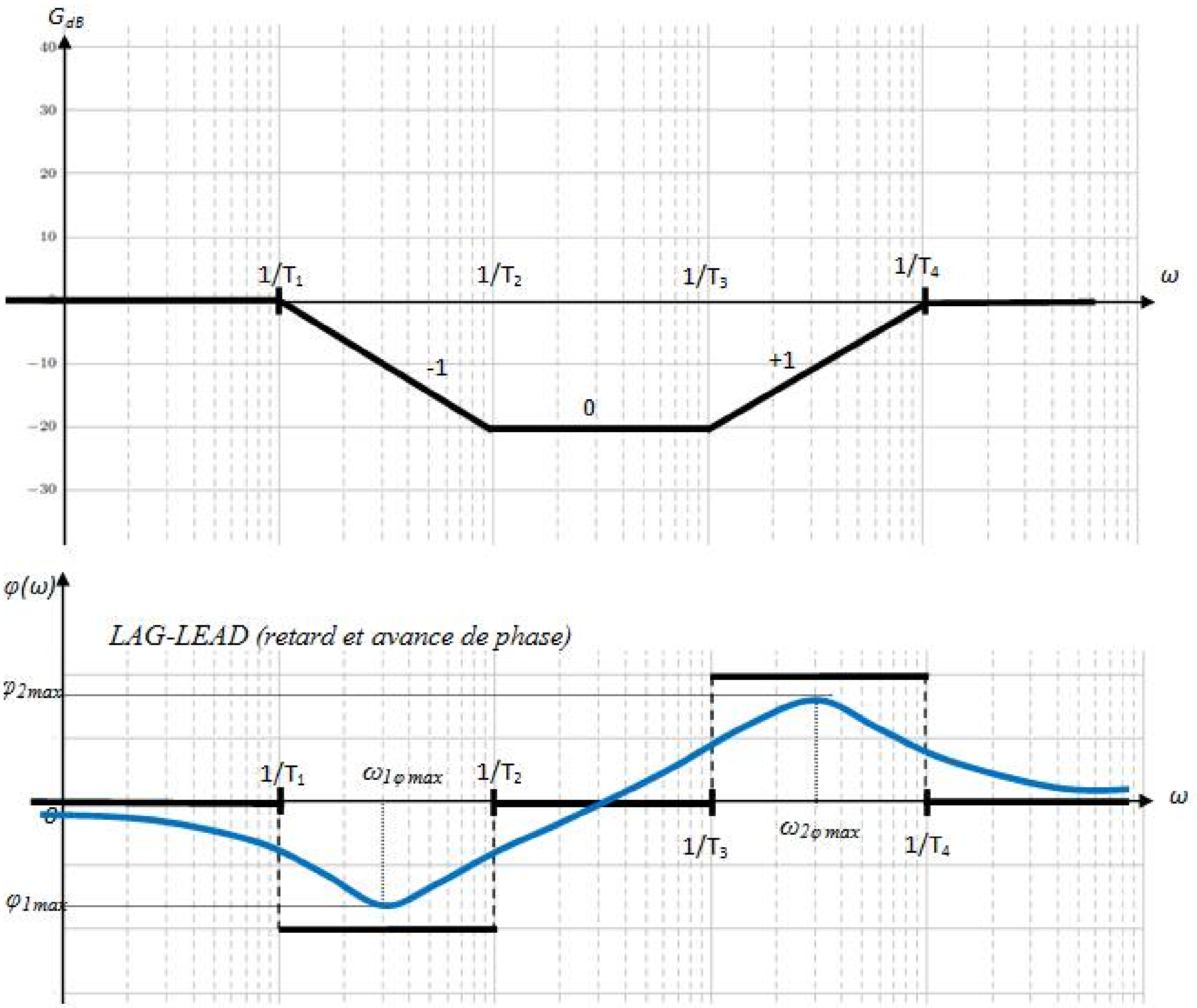
$$G_{RP}(p) = \frac{1+Tp}{1+\alpha Tp},\ \alpha < 1$$



II.6. Compensateur à retard et à avance de phase (LAG-LEAD):

Le compensateur ***R+A*** combine les effets des compensateurs à retard et à avance de phase.

$$G_{RA}(p) = G_R(p) \times G_A(p)$$

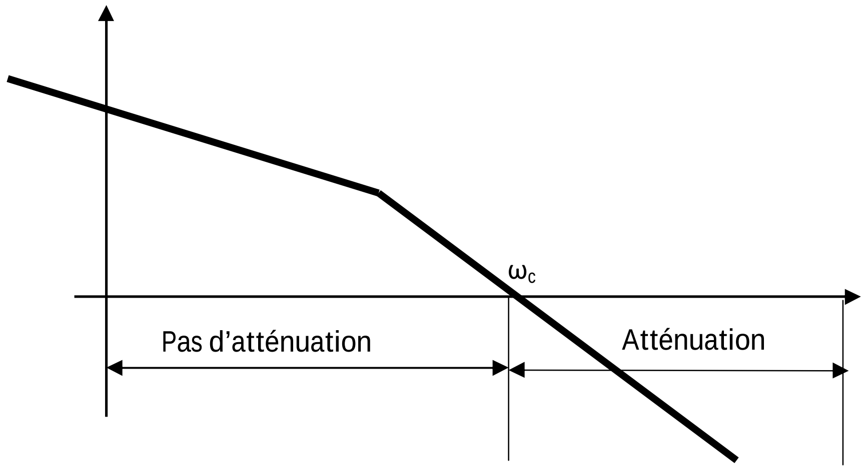


III. Calcul des contrôleurs

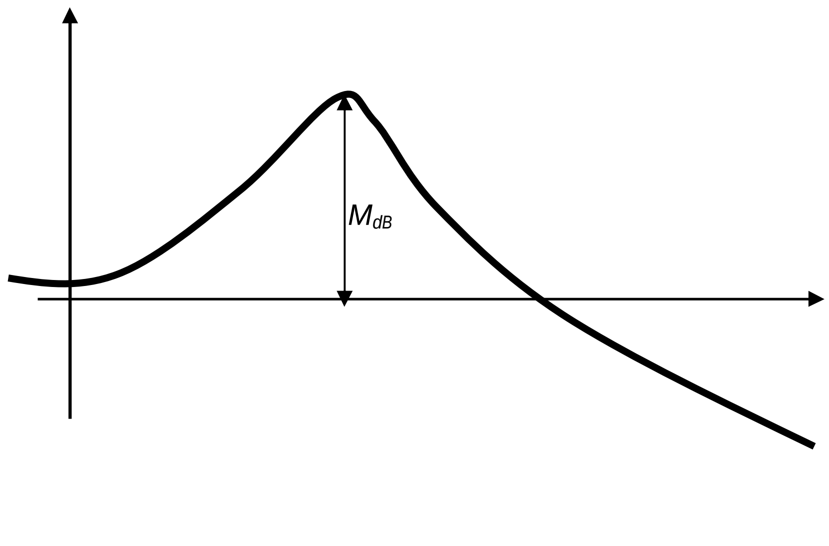
Dans le domaine fréquentiel, les spécifications sont données en terme de :

- Marge de stabilité :
    1. Marge de gain.
    2. Marge de phase.
- Rapidité de réponse :
    1. Bande passante.

à -3dB :



- Overshoot : résonance



Dans ce qui suit, nous allons étudier la synthèse des contrôleurs sur des exemples.

IV. Exemples de Calcul de contrôleurs

Exemple 01 :

Soit le système suivant :

$$G(p)=\frac{1}{p(1+0.25p)(1+0.1p)}$$

Calculer un compensateur $G_c(p)$ qui permet au système en boucle fermée à retour unitaire de satisfaire : $k_v = \lim pG(p)=4s^{-1}$

$M\varphi \geq 40°$

$MG \geq 12dB$

Solution :

$$k_v = \lim_{p\to 0} pG(p)=\frac{1}{(1+0.25p)(1+0.1p)}=1s^{-1}$$

Pour avoir $k_v=4s^{-1}$ il suffit d'ajouter un gain K=4 : première correction.

$$G(p)=\frac{4}{p(1+0.25p)(1+0.1p)}$$

C'est système de type 1, alors :

$$k_p = \lim_{p\to 0}\frac{4}{p(1+0.25p)(1+0.1p)}=\infty \Rightarrow \varepsilon_p = \lim_{p\to 0}\frac{1}{1+k_p}=0,\quad \varepsilon_v=\frac{1}{k_v}=\frac{1}{4}=0.25,$$

$$\Rightarrow \varepsilon_p=0,\quad \varepsilon_v=0.25,$$

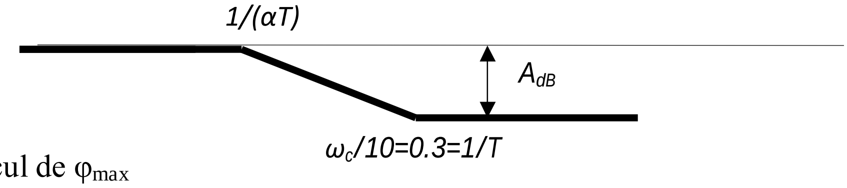
Pour voir si Mφ et MG sont satisfaisantes, on trace le diagramme de Bode de KG(p).

$$\varphi(\omega))=-\frac{\pi}{2}-arctg(0.25\omega)-arctg(0.1\omega)$$

$$M\varphi = 44°,\quad MG=10dB$$

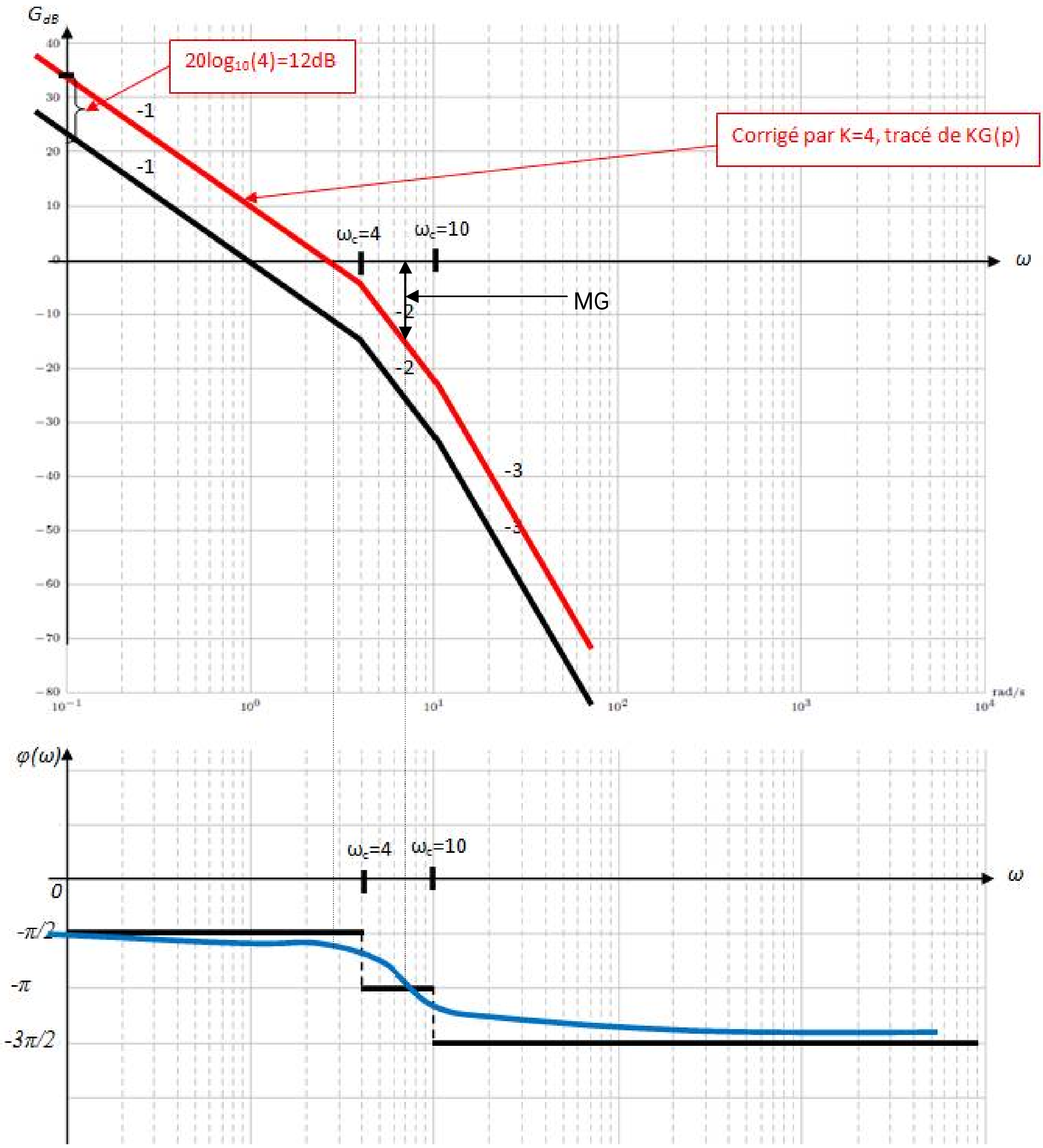
Système stable, mais la marge de stabilité est insuffisante. Il faut augmenter cette marge, comment ?

$$G_{RP}(p)=\frac{1+Tp}{1+\alpha Tp},\ \alpha>1,\quad \frac{1}{T}=0.3=\frac{\omega_c}{10}$$



Calcul de φ_{max}

$$\omega_{\varphi_{\max}} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}},\ \alpha = \frac{1-\sin\varphi_{\max}}{1+\sin\varphi_{\max}}$$



La marge de gain:

$$MG_{dB} = -G_{dB}(\omega_0), \quad \left(\omega_0 / \angle G(j\omega_0) = -180°\right)$$

Pour $\left(\omega_0 / \angle G(j\omega_0) = -180°\right) \Rightarrow \omega_0 = 6.3rd/s$ on a du diagramme la marge du gain :

$$MG_{dB} = -G_{dB}(\omega_0) \Rightarrow MG_{dB} = 10dB$$

Et la marge de phase :

$$M\varphi = 180° + \angle G(j\omega_0'), \quad \left(\omega_0' / 20\log_{10}\left|G(j\omega_0')\right| = 0\right)$$

Pour $\left(\omega_0' / 20\log_{10}\left|G(j\omega_0')\right| = 0\right) \Rightarrow \omega_0' = 3rd/s$ on a du diagramme la marge de phase :

$$\varphi(\omega)) = -\frac{\pi}{2} - arctg(0.25\omega) - arctg(0.1\omega)$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = -\frac{\pi}{2} - arctg(0.25 * 2.5) - arctg(0.1 * 2.5)$$

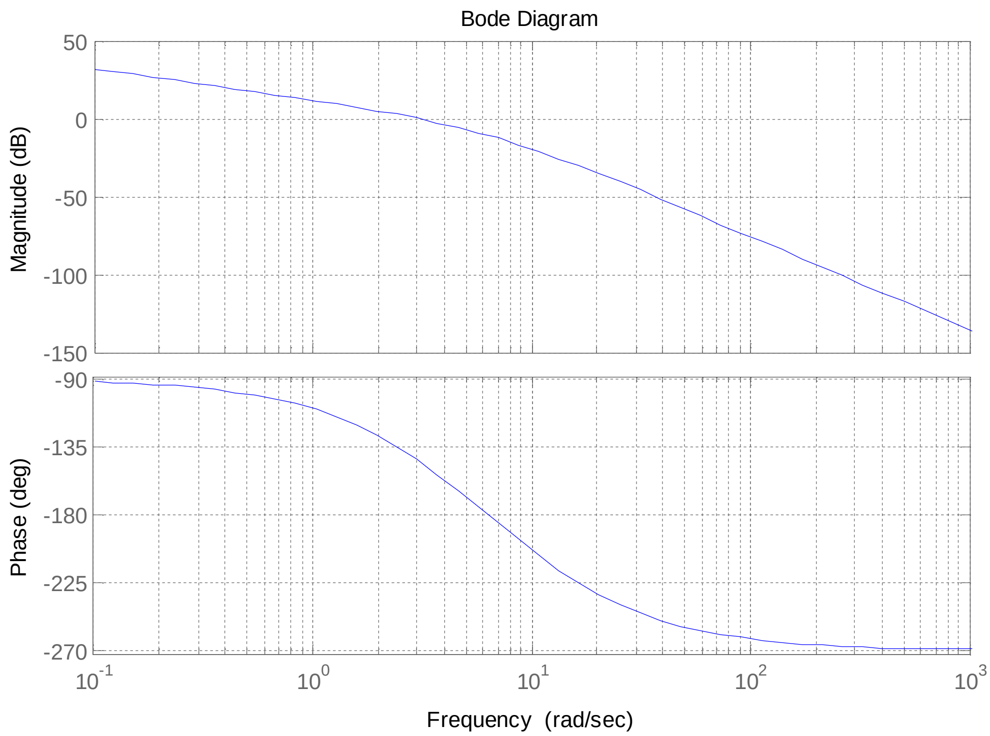
$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = -\frac{\pi}{2} - arctg(0.625) - arctg(0.25)$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = -90 - 32 - 14$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = -90 - 32 - 14$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = -136°$$

$$M\varphi = 180° - 136 \Rightarrow M\varphi = 44°$$



$$G_{RP}(p) = \frac{1+Tp}{1+\alpha Tp}, \ \alpha > 1, \quad \frac{1}{T} = 0.3 = \frac{\omega_c}{10}, \quad la \quad fréquence \quad de \quad coupure \ \omega_c = 3rd/s$$

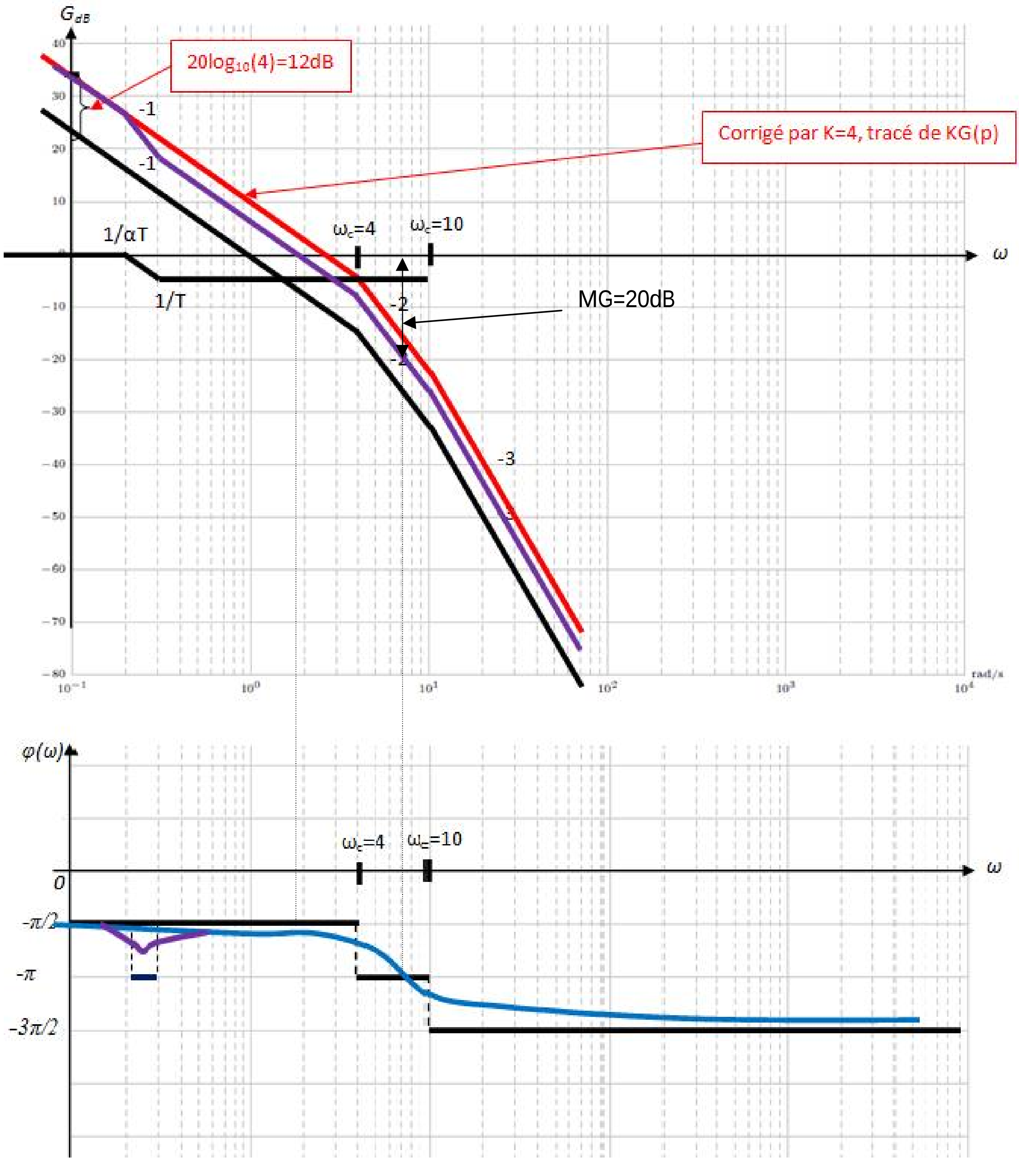
$$\omega_{\varphi_{\max}} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}, \ \alpha = \frac{1-\sin\varphi_{\max}}{1+\sin\varphi_{\max}}$$

$$G_{RP}(p) = \frac{1+3.33p}{1+\alpha 3.33p}, \ \alpha > 1,$$

On met :

α=1.1

$$G_{RP}(p) = \frac{1+3.33p}{1+1.1*3.33p} \Rightarrow G_{RP}(p) = \frac{1+3.33p}{1+4.32p} = G_{RP}(p) = \frac{1+\frac{p}{0.3}}{1+\frac{p}{0.23}}$$



G_{dB}
20log10(4)=12dB
Corrigé par K=4, tracé de KG(p)
-1
-1
1/αT
1/T
ωc=4
ωc=10
ω
MG=20dB
-2
-2
-3
rad/s
$\varphi(\omega)$
0
-π/2
-π
-3π/2

Pour $\left(\omega_0' / 20\log_{10}\left|G(j\omega_0')\right| = 0\right) \Rightarrow \omega_0' = 1.8rd/s$ on a du diagramme la marge de phase :

$$\varphi(\omega)) = -\frac{\pi}{2} - arctg\,(0.25\omega) - arctg\,(0.1\omega)$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = -\frac{\pi}{2} - arctg\,(0.25 * 1.8) - arctg\,(0.1 * 1.8)$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = -\frac{\pi}{2} - arctg\,(0.45) - arctg\,(0.18)$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = -90 - 24 - 10$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = -124°$$

$$M\varphi = 180° - 124 \Rightarrow M\varphi = 56°$$

D'après le tracé on a :

$$MG = 20dB$$

Les spécifications sont satisfaisantes alors :

$$G_{RP}(p) \times KG(p) = \frac{1 + 3.33p}{1 + 4.32p} \times \frac{4}{p(1 + 0.25p)(1 + 0.1p)}$$

Exemple 02 :

Soit le système suivant :

$$G(p)=\frac{1}{p(1+0.5p)(1+0.02p)}$$

Calculer un compensateur $G_c(p)$ qui permet au système en boucle fermée à retour unitaire de satisfaire : $k_v=\lim pG(p)=40s^{-1}$

$M\varphi \geq 45°$

Bande passante > 20rd/s

$$G(p)=\frac{1}{p(1+\frac{p}{2})(1+\frac{p}{50})}$$

Solution :

$$k_v=\lim_{p\to 0} pG(p)=\frac{1}{(1+0.5p)(1+0.02p)}=1s^{-1}$$

Pour avoir $k_v=40s^{-1}$ il suffit d'ajouter un gain K=40 : première correction.

$$G(p)=\frac{40}{p(1+0.5p)(1+0.02p)}$$

C'est système de type 1, alors :

$$k_p=\lim_{p\to 0}\frac{40}{p(1+0.5p)(1+0.02p)}=\infty \Rightarrow \varepsilon_p=\lim_{p\to 0}\frac{1}{1+k_p}=0,\quad \varepsilon_v=\frac{1}{k_v}=\frac{1}{40}=0.025,$$

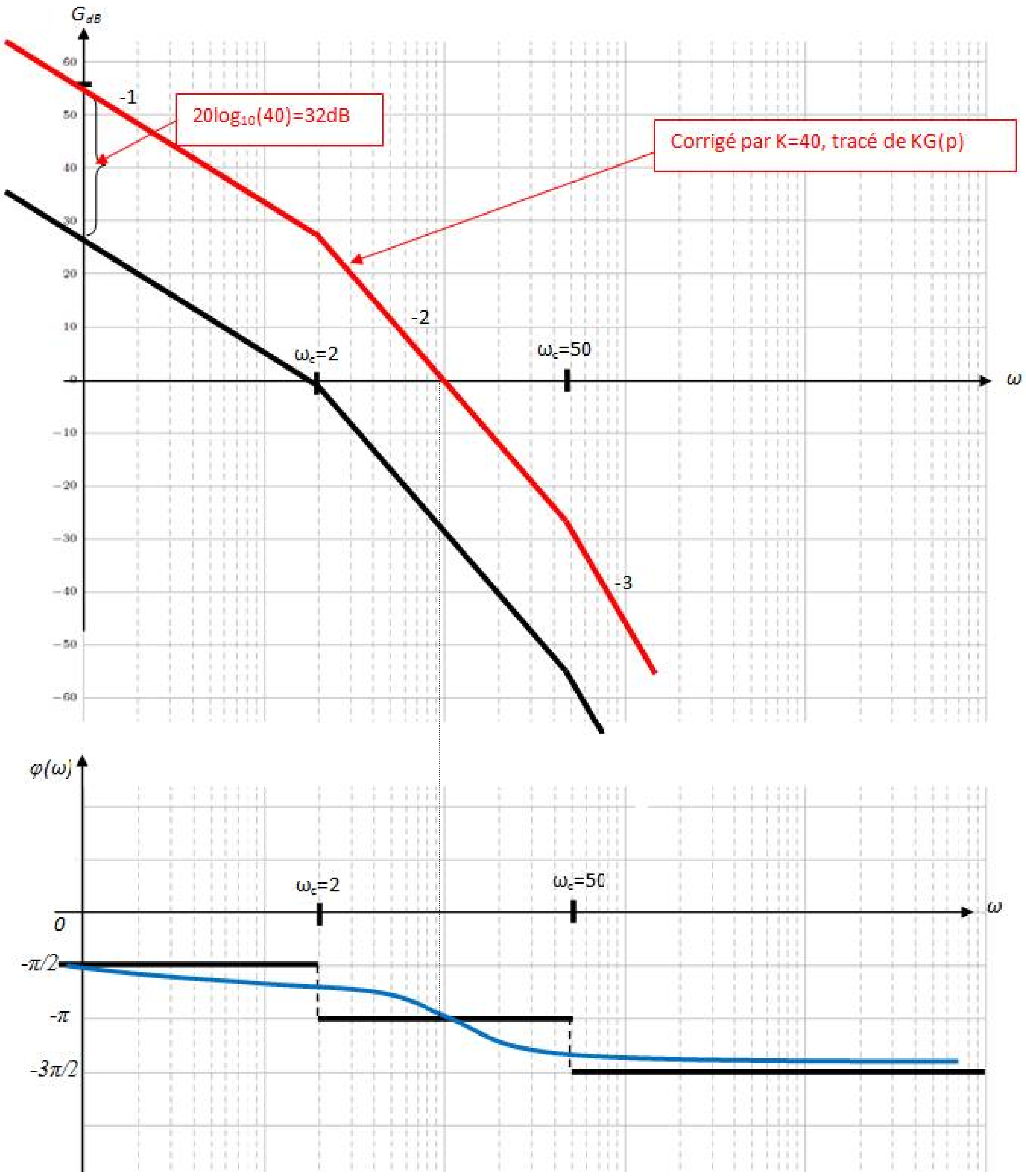
$$\Rightarrow \varepsilon_p=0,\quad \varepsilon_v=0.025,$$

ω_c=*9rd/s*

Pour voir si Mφ et la bande passante sont satisfaisantes, on trace le diagramme de Bode de KG(p).

$$\varphi(\omega))=-\frac{\pi}{2}-arctg(0.5\omega)-arctg(0.02\omega)$$

$$M\varphi=3°,\quad Bp=9rd/s$$



La marge de phase :

$$M\varphi = 180° + \angle G(j\omega_0'), \quad \left(\omega_0' \,/\, 20\log_{10}\left|G(j\omega_0')\right| = 0\right)$$

Pour $\left(\omega_0' \,/\, 20\log_{10}\left|G(j\omega_0')\right| = 0\right) \Rightarrow \omega_0' = 9rd/s$ on a du diagramme la marge de phase :

$$\varphi(\omega)) = -\frac{\pi}{2} - arctg\,(0.5\omega) - arctg\,(0.02\omega)$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = -\frac{\pi}{2} - arctg\,(0.5*9) - arctg\,(0.02*9)$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = -\frac{\pi}{2} - arctg\,(4.5) - arctg\,(0.18)$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = -90 - 77 - 10$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = -177°$$

$$M\varphi = 180° - 177 \Rightarrow M\varphi = 3°$$

La bande passante, on a du graphe:

Bp=9 rd/s

ω(rd/s)	*φ>(°)*
2	-137
4	-158
5	-164
8	-175
9	-177
10	-180
15	-189
20	-196

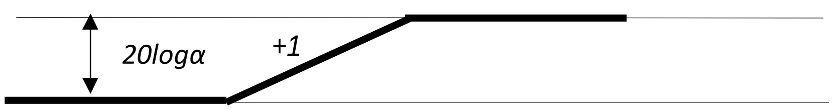
Système stable, mais la marge de stabilité est insuffisante. Il faut augmenter cette marge, comment ?

Utiliser un compensateur à retard de phase ?

Non, parce qu'on a une mauvaise bande passante 9rd/s inférieure à celle voulue 20rd/s

Alors on essaie un compensateur à avance de phase

$$G_{RP}(p) = A\alpha \frac{1+Tp}{1+\alpha Tp},\ \alpha < 1$$



On fixe φ_{max}=55°

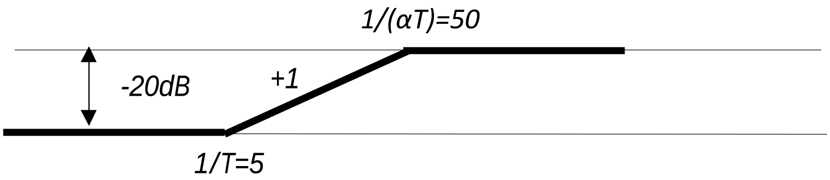
$$\alpha = \frac{1-\sin\varphi_{max}}{1+\sin\varphi_{max}} = \frac{1-\sin 55°}{1+\sin 55°} \Rightarrow \alpha = 0.1$$

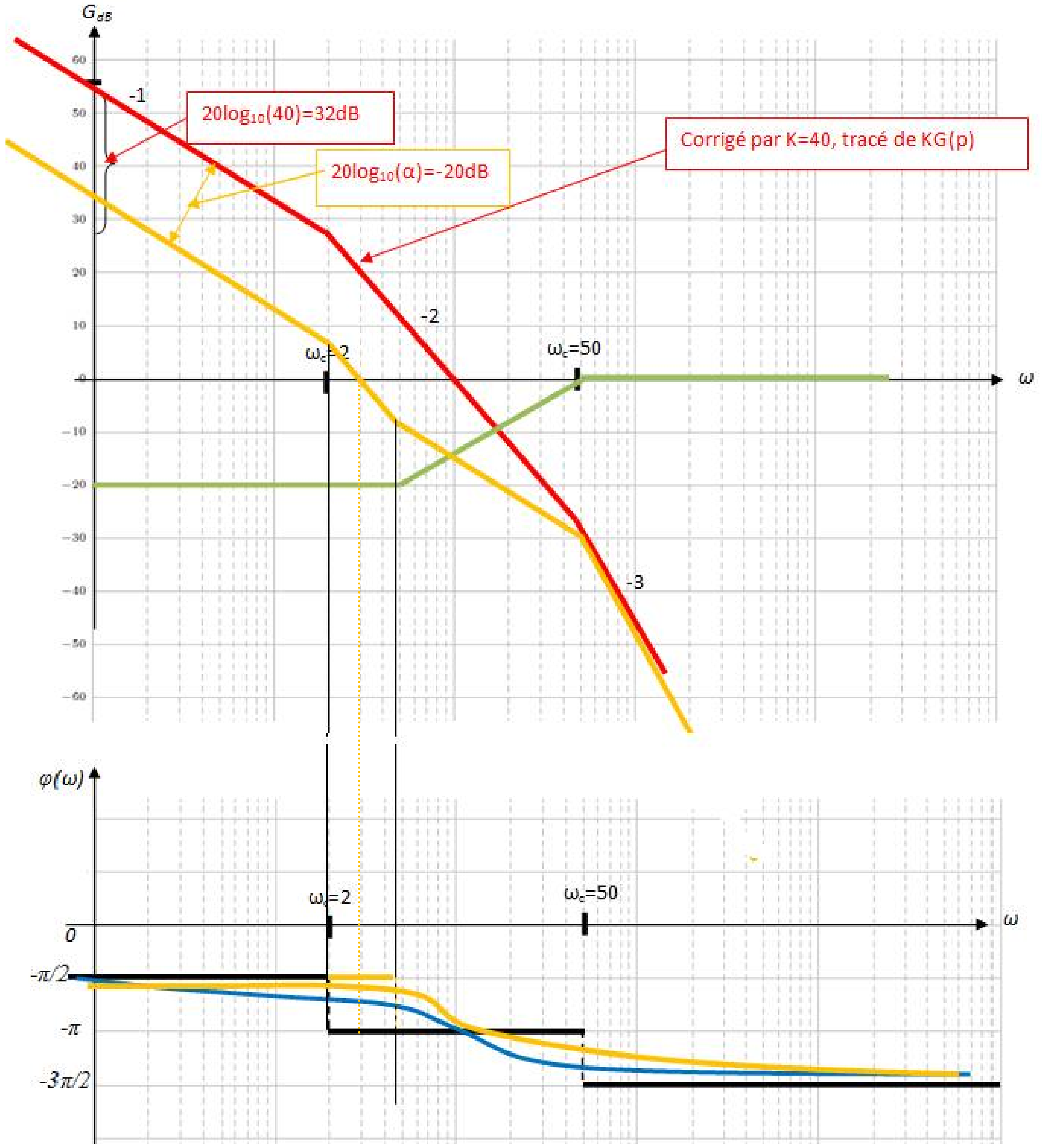
On place $\varphi_{\max}$ *dans* $\omega_0 1|\varphi(\omega_0) = -190°$

$$\omega_{\varphi_{\max}} = \omega_0 = 16 rd/s \Rightarrow \omega_{\varphi_{\max}} = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_{\varphi_{\max}}\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{16\sqrt{0.1}} \Rightarrow T = 0.2$$

$$G_{RP}(p) = 0.1\frac{1+0.2p}{1+0.02p}$$

$$20\log_{10}(\alpha) = 20\log_{10}(0.1) = -20$$





G_{dB}
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-1
20log₁₀(40)=32dB
20log₁₀(α)=-20dB
Corrigé par K=40, tracé de KG(p)
-2
ωc=2
ωc=50
ω
-3
φ(ω)
ωc=2
ωc=50
ω
0
-π/2
-π
-3π/2

De la courbe orange on a :

La marge de phase :

$$G_{RP}(p) = 0.1\frac{1+0.2p}{1+0.02p}$$

$$M\varphi = 180° + \angle Gc(j\omega_0')G(j\omega_0'), \quad \left(\omega_0' / 20\log_{10}\left|G(j\omega_0')\right| = 0\right)$$

Pour $\left(\omega_0' / 20\log_{10}\left|G(j\omega_0')\right| = 0\right) \Rightarrow \omega_0' = 3rd / s$ on a du diagramme la marge de phase :

$$\varphi(\omega)) = arctg(0.2\omega) - arctg(0.02\omega) - \frac{\pi}{2} - arctg(0.5\omega) - arctg(0.02\omega)$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = arctg(0.2*3) - arctg(0.02*3) - \frac{\pi}{2} - arctg(0.5*3) - arctg(0.02*3)$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = arctg(0.6) - arctg(0.06) - \frac{\pi}{2} - arctg(1.5) - arctg(0.06)$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = 30 - 3 - 90 - 56 - 3$$

$$\Rightarrow \varphi(\omega)) = -122°$$

$$M\varphi = 180° - 122 \Rightarrow M\varphi = 58°$$

La bande passante, on a du graphe:

Bp=3 rd/s

$$M\varphi = 58° \quad Bp = 3rd / s$$

$$k_v = 40s^{-1}$$

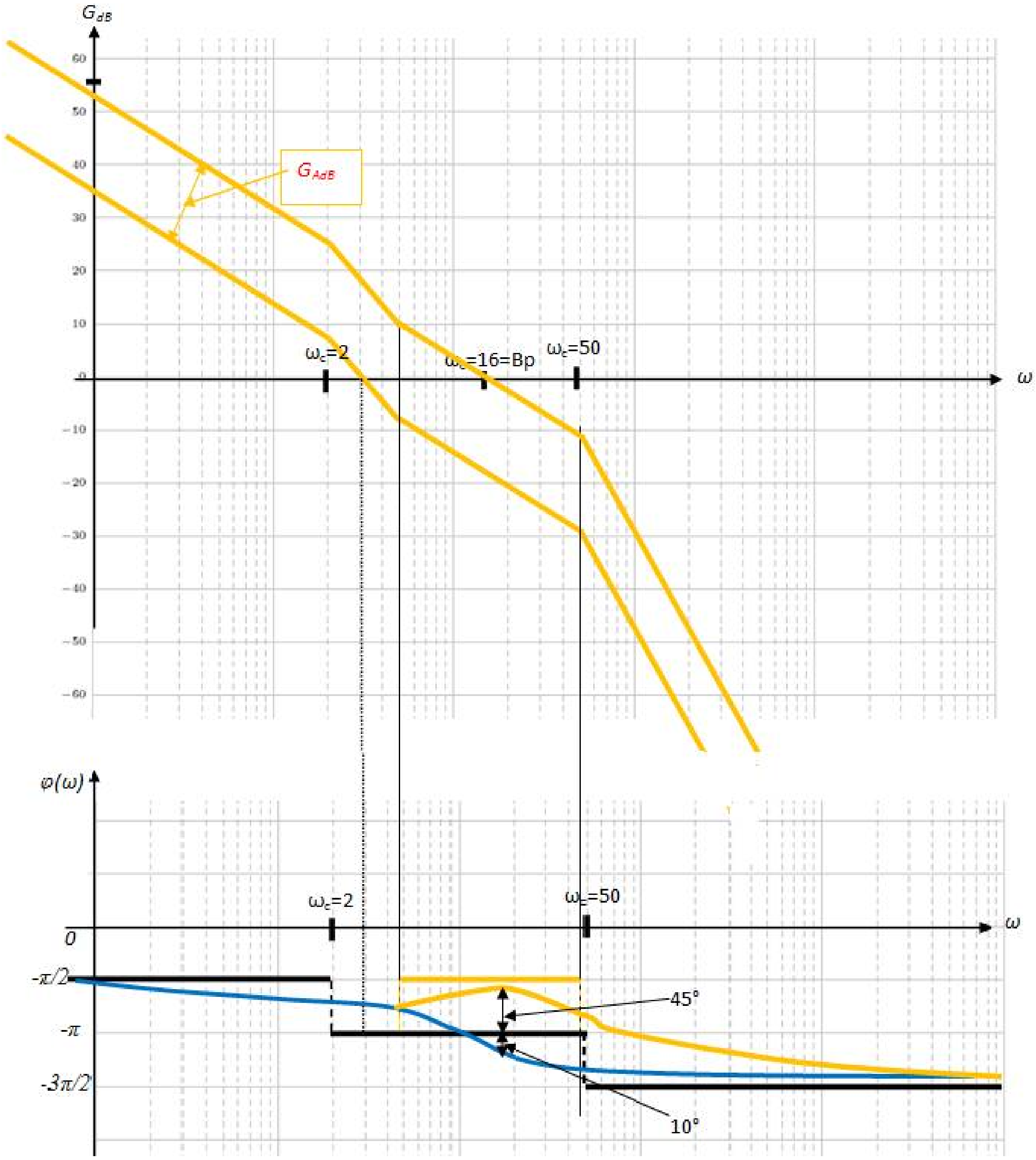
Réglage final : on ajoute un gain A

$$20\log_{10} A = G_A dB = 18dB$$

$$Bp : 20rd / s \;\; pour \;\; H(p)$$

$$Bp_{G(p)} = 16 \Rightarrow Bp_{H(p)} \cong 20rd / s$$

$$Bp_{BO} = \frac{Bp_{BF}}{1.2} = \frac{20}{1.2} \approx 16rd / s$$

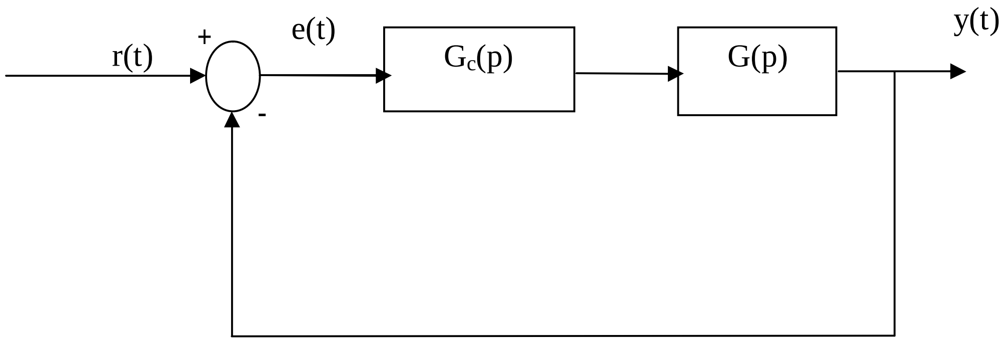

G_{dB}
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
G_{AdB}
ωc=2
ωc=16=Bp
ωc=50
ω
φ(ω)
0
-π/2
-π
-3π/2
45°
10°

V. Calcul des régulateurs par placement des pôles

V.1. principe

Soit un système décrit par G(p). On veut calculer un régulateur de fonction de transfert $G_R(p)$.

La méthode du placement des pôles consiste à calculer la fonction de transfert du système en boucle fermée H(p) avec le régulateur et à forcer ses pôles à des positions désirées. Soit donc :



$$H(p) = \frac{G_R(p)G(p)}{1 + G_R(p)G(p)}$$

G(p) connue :

- On choisit $G_R(p)$
- On choisit le polynôme D(p) des pôles désirés.
- On calcul $G_R(p)$ à partir de $D(p)=G_R(p)G(p)$.

Exemple :

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 1}$$

On choisit un régulateur PI :

$$G_{PI}(p) = K + \frac{1}{\tau_i p} = \frac{1 + K\tau_i p}{\tau_i p}$$

Calculer K et τ_i pour que H(p) ait des pôles : (-1, -2, -3)

$$G(p) = \frac{\frac{1 + K\tau_i p}{\tau_i p} \frac{1}{p^2 + 2p + 1}}{1 + \frac{1 + K\tau_i p}{\tau_i p} \frac{1}{p^2 + 2p + 1}} = \frac{1 + K\tau_i p}{\left(p^2 + 2p + 1\right)\tau_i p + 1 + K\tau_i p}$$

L'équation pour calculer K et τ_i est alors :

$$(p+1)(p+2)(p+3)=\left(p^2+2p+1\right)\tau_i p+1+K\tau_i p$$
$$\Rightarrow (p+1)(p+2)(p+3)=\tau_i p^3+2\tau_i p^2+\tau_i p+1+K\tau_i p$$
$$\Rightarrow (p^2+3p+2)(p+3)=\tau_i p^3+2\tau_i p^2+(1+K)\tau_i p+1$$
$$\Rightarrow (p^3+3p^2+2p+3p^2+9p+6)=\tau_i p^3+2\tau_i p^2+(1+K)\tau_i p+1$$
$$\Rightarrow (p^3+6p^2+11p+6)=\tau_i p^3+2\tau_i p^2+(1+K)\tau_i p+1$$

Cette équation a-t-elle des solutions ? Non !

$$K'=\frac{1+K\tau_i p}{\tau_i p}\ ou\, K\left(\frac{\frac{1}{K}+\tau_i p}{\tau_i p}\right)$$

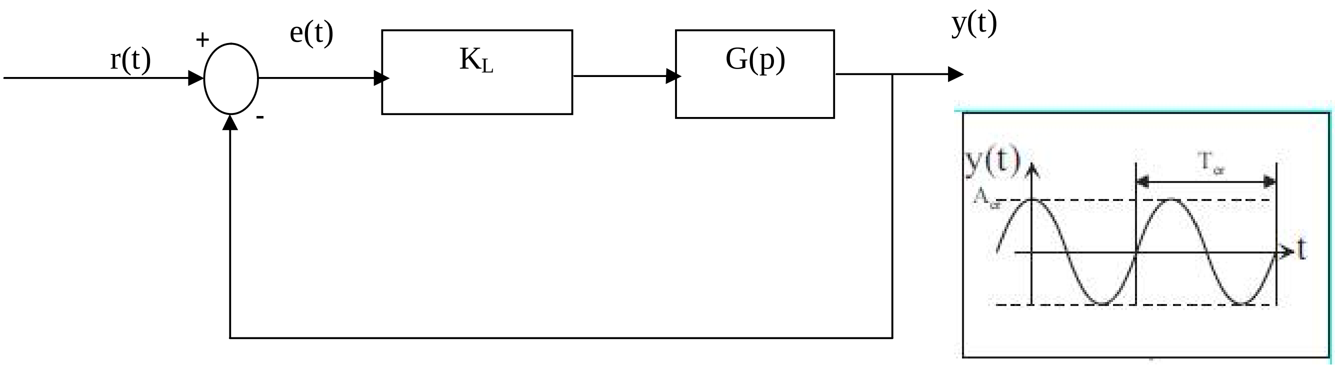
Conclusion :

Il faut choisir le régulateur et les pôles désirés pour que l'équation ait une solution.

VI. Méthode empirique de ZIEGLER-NICHOLS

Les correcteurs PI et P.I.D sont parmi les correcteurs analogiques les plus utilisés. Le problème principal réside dans la détermination des coefficients Kp, τi, τd du correcteur. Plusieurs méthodes expérimentales ont été développées pour déterminer ces coefficients. La méthode développée par Ziegler et Nichols n'est utilisable que si le système étudié supporte les dépassements.

C méthode de Ziegler-Nichols consiste à déterminer en boucle fermée le gain K_L limite de stabilité (système marginalement stable). Cette méthode nécessite de boucler le système sur un simple régulateur proportionnel dont on augmente le gain jusqu'à amener le système à osciller de manière permanente; on se trouve ainsi à la limite de stabilité du système. Après avoir relevé le gain critique K_L et la pulsation d'oscillation ω_c de la réponse, on peut calculer les paramètres du régulateur choisi à l'aide du tableau ci-dessous. Les valeurs proposées par Ziegler et Nichols ont été testées dans de très nombreuses situations et il faut souligner qu'ici également elles conduisent à un temps de montée relativement court assorti d'un dépassement élevé.



Les paramètres du régulateur peuvent être calculés à partir du tableau suivant :

Régulateur	K	τ_i	τ_d
P	$0.5K_L$		
PI	$0.45K_L$	$2\pi/(1.2\omega_c)$	
PID	$0.6K_L$	π/ω_c	$\pi/(4\omega_c)$

ω_c : est la fréquence des oscillations du système marginalement stable.