

Chapitre V

Les méthodes fréquentielles

Généralités

I. introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu la méthode d'EVANS qui peut être considérée comme une méthode **temporelle**, parce qu'on travaille avec les réponses à l'échelon (en particulier).

Dans ce chapitre nous allons présenter les éléments de base de ce qu'on appelle les méthodes fréquentielles :

Dans ce cas l'entrée est un signal sinusoïdal :

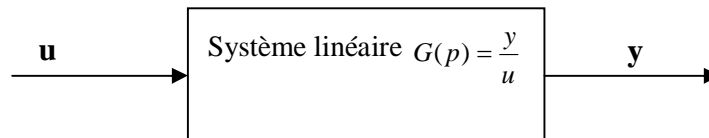
$$U = A \sin \omega t$$

Nous allons tout d'abord nous intéresser à la sortie du système :

Si l'entrée est sinusoïdale *comment est la sortie ?*, en suite nous verrons *les représentations graphiques de la réponse fréquentielles*. Enfin *la stabilité dans le domaine fréquentielle*.

II. Analyse de la sortie

Pour une entrée sinusoïdale, considérons un système linéaire de fonction de transfert : $G(p) = \frac{y}{u}$



Et soit $U = A \sin \omega t$

Calculons $y(t)$

$$y(t) = L^{-1}[G(p)U(p)]$$

$$y(t) = L^{-1}\left[G(p)\frac{A\omega}{p^2 + \omega^2}\right]$$

$$G(p) = \frac{(p - z_1)(p - z_2)\dots(p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n)}$$

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{(p - z_1)(p - z_2)\dots(p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n)} \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2}\right]$$

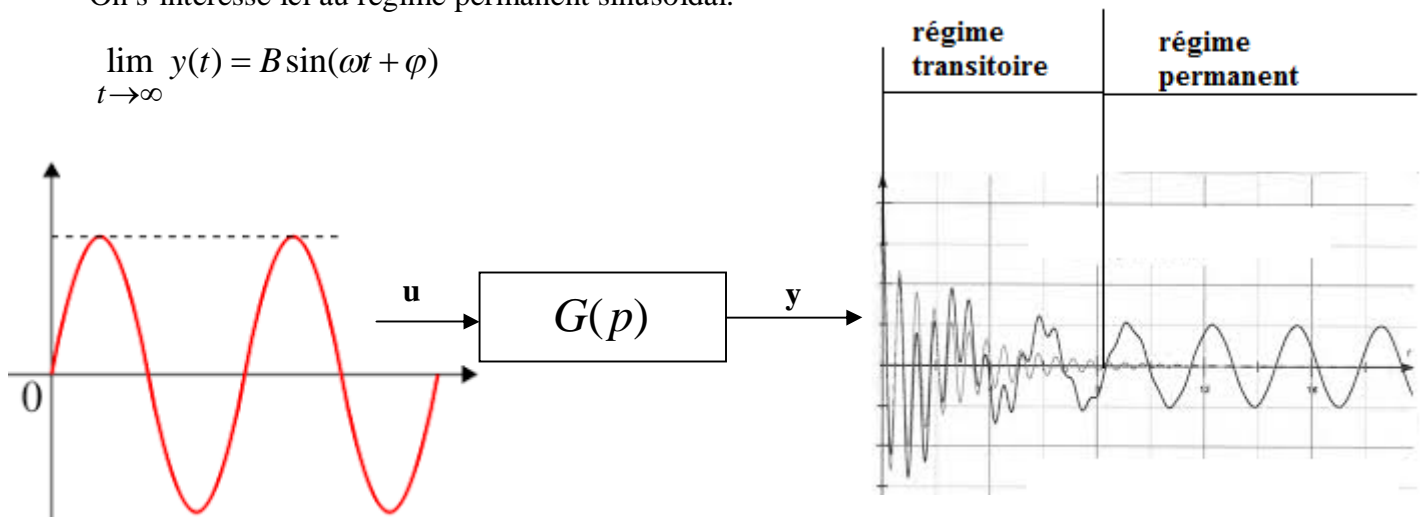
$$y(t) = L^{-1} \left[\sum_i \frac{B_i}{(p - p_i)} + \frac{M(\omega)}{p^2 + \omega^2} \right]$$

$$y(t) = \sum_i B_i e^{-p_i t} + B \sin(\omega t + \varphi)$$

C'est la forme générale.

On s'intéresse ici au régime permanent sinusoïdal.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$$



Dans ce qui suit, nous allons considérer uniquement le régime permanent sinusoïdal c'est-à-dire :

$$\text{Si } U = A \sin \omega t \quad \text{alors } y(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$$

Nous allons calculer B et φ

φ : déphasage.

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p)$$

$$\text{si } u(t) = \delta(t), \quad U(p) = 1$$

$G(p)$: transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-pt} d\tau$$

$$\text{Convolution} \quad y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

Soit $U = A \cos \omega t$

$$u(t) = A \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$u_1(t) = Ae^{j\omega t}$$

Soit $g(t)$ la réponse impulsionnelle, alors $y_1(t)$ la sortie si l'entrée est $u_1(t)$:

$$y_1(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) u_1(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau) A e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = A e^{j\omega t} \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = A e^{j\omega t} G(p)$$

Avec $p=j\omega$

Et : $u_2(t) = Ae^{-j\omega t}$

$$y_2(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) u_2(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau) A e^{-j\omega(t-\tau)} d\tau = A e^{-j\omega t} \int_0^{\infty} g(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = A e^{-j\omega t} G(p)$$

Avec $p=-j\omega$

Alors :

$$y(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2} = \frac{A e^{j\omega t} G(j\omega) + A e^{-j\omega t} G(-j\omega)}{2}$$

Puisque $G(j\omega)$ est un nombre complexe :

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{\angle G(j\omega)} \quad \text{et} \quad G(-j\omega) = |G(j\omega)| e^{\angle G(-j\omega)} = |G(j\omega)| e^{-\angle G(j\omega)}$$

$$y(t) = \frac{A e^{j\omega t} |G(j\omega)| e^{\angle G(j\omega)} + A e^{-j\omega t} |G(j\omega)| e^{-\angle G(j\omega)}}{2}$$

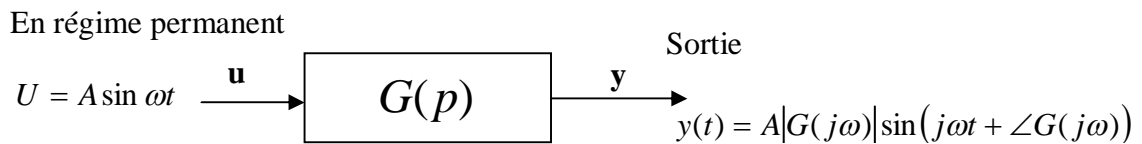
Ce qui donne :

$$y(t) = A |G(j\omega)| \left[\frac{e^{j\omega t + \angle G(j\omega)} + e^{-j\omega t - \angle G(j\omega)}}{2} \right]$$

$$y(t) = A |G(j\omega)| \cos(j\omega t + \angle G(j\omega))$$

On conclut : $B = A |G(j\omega)|$ et $\varphi = \angle G(j\omega)$

Ainsi pour connaître $y(t)$ il suffit de connaître $G(p)$.



Définition : la réponse fréquentielle

On appelle réponse fréquentielle d'un système linéaire, l'ensemble des valeurs de B et φ pour plusieurs valeurs de ω .

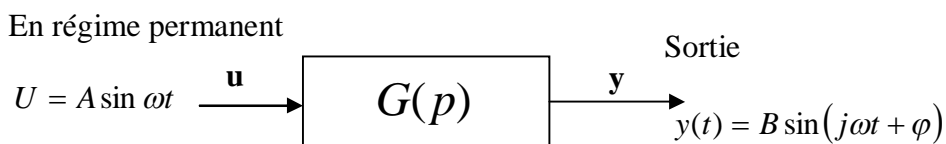
La réponse fréquentielle peut donc être obtenue à partir de $G(p)$ en posant : $p=j\omega$.

Elle est représentée par :

$$B(\omega) = |G(j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$$

III. Représentation graphique de la réponse fréquentielle

Etant donné un système linéaire de fonction de transfert $G(p)$



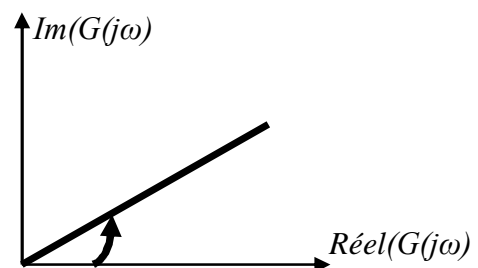
La réponse fréquentielle définie par :

$$B(\omega) = |G(j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$$

Peut être représentée graphiquement fondamentalement (principalement) de deux façons :

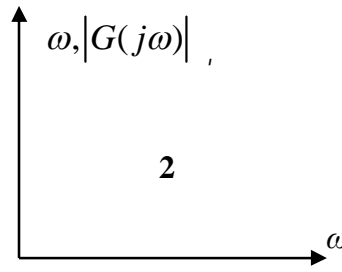
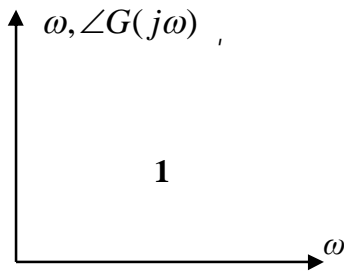
- Dans le plan complexe :

($\text{Réel}(G(j\omega)), \text{Im}(G(j\omega))$)



- Dans un double plan

$$\begin{cases} \omega, \angle G(j\omega) & (1) \\ \omega, |G(j\omega)| & (2) \end{cases}$$



Nous allons développer les deux méthodes.

III.1. Diagramme polaire

- Dans le plan complexe :

$(\text{Réel}(G(j\omega)), \text{Im}(G(j\omega)))$

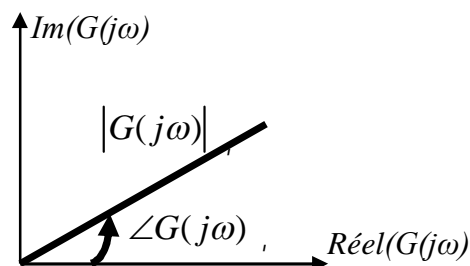
Pour tracer le diagramme polaire on peut :

Soit :

ω	$\text{Réel}(G(j\omega))$	$\text{Im}(G(j\omega))$

ou :

ω	$\angle G(j\omega)$	$ G(j\omega) $



Exemples :

$$G_1(p) = \frac{K}{p+a}, \quad G_2(p) = \frac{K}{p^2 + c_1p + c_2}, \quad G_3(p) = \frac{K}{p(p+a)}, \quad G_4(p) = \frac{K}{p(p^2 + c_1p + c_2)}$$

$$G_1(p); \quad K = 10, a = 2, \quad G_1(p) = \frac{10}{p+2}, \quad p = j\omega$$

Soit :

ω	Réel($G(j\omega)$)	Im($G(j\omega)$)
0	5	0
0.1	4.99	-0.24
1	4	-2
5	0.68	-1.72
10	0.19	-0.96
∞	0	0

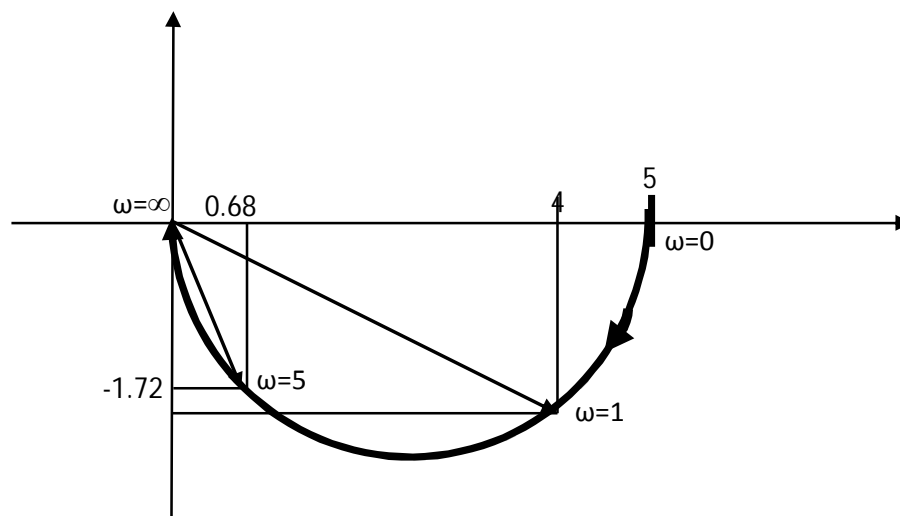
ou :

ω	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
0	5	0
∞	0	$-\pi/2$

$$G_1(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 2} = \frac{10(-j\omega + 2)}{(j\omega + 2)(-j\omega + 2)} = \frac{20 - 10j\omega}{\omega^2 + 4} = \frac{20}{\omega^2 + 4} - j \frac{10\omega}{\omega^2 + 4}$$

$$\text{Réel}(G_1(j\omega)) = \frac{20}{\omega^2 + 4}, \quad \text{Im}(G_1(j\omega)) = -\frac{10\omega}{\omega^2 + 4}$$

$$|G_1(j\omega)| = \left| \frac{10}{j\omega + 2} \right|, \quad \angle(G_1(j\omega)) = -\angle(p+2) = -\angle(j\omega + 2) = -\text{artg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

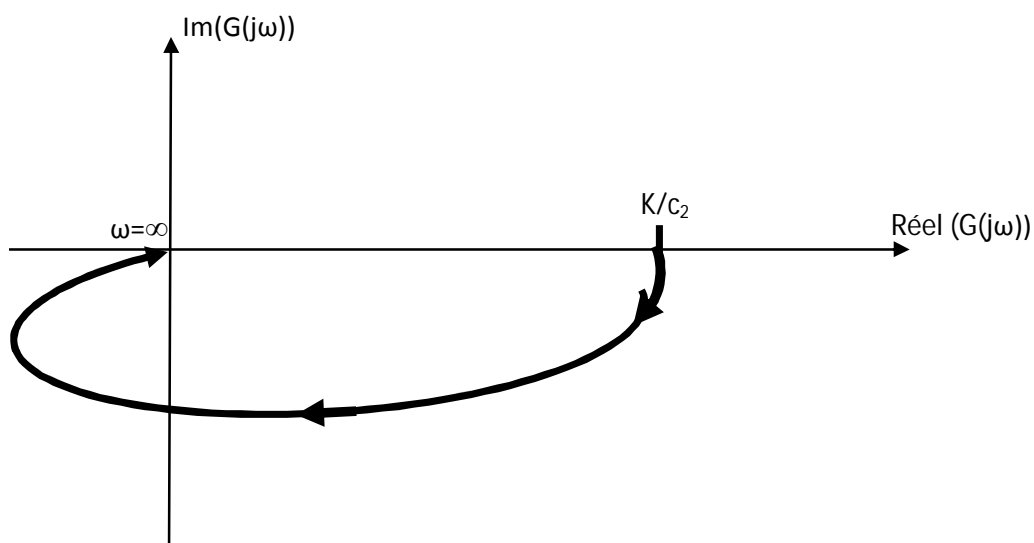


$$G_2(p) = \frac{K}{p^2 + c_1 p + c_2} = \frac{K}{(p + p_1)(p + p_2)} \Rightarrow G_2(j\omega) = \frac{K}{-\omega^2 + jc_1\omega + c_2}$$

ω	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
0	K/c_2	0
∞	0	$-\pi$

$$|G_2(j\omega)| = \left| \frac{K}{-\omega^2 + jc_1\omega + c_2} \right|$$

$$\angle(G_2(j\omega)) = -\angle(p + p_1) - \angle(p + p_2) = -\angle(j\omega + p_1) - \angle(j\omega + p_2)$$



$$\angle(j\omega + a) \Rightarrow \text{artg} \frac{\omega}{a}, 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\angle(j\omega + a + jb) \Rightarrow \text{artg} \frac{\omega + b}{a}, \frac{b}{a} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \angle G_2(j\omega) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

Soit :

$$G_n(p) = \frac{K}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}$$

ω	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
0	K/a_0	0
∞	0	$-n\pi/2$

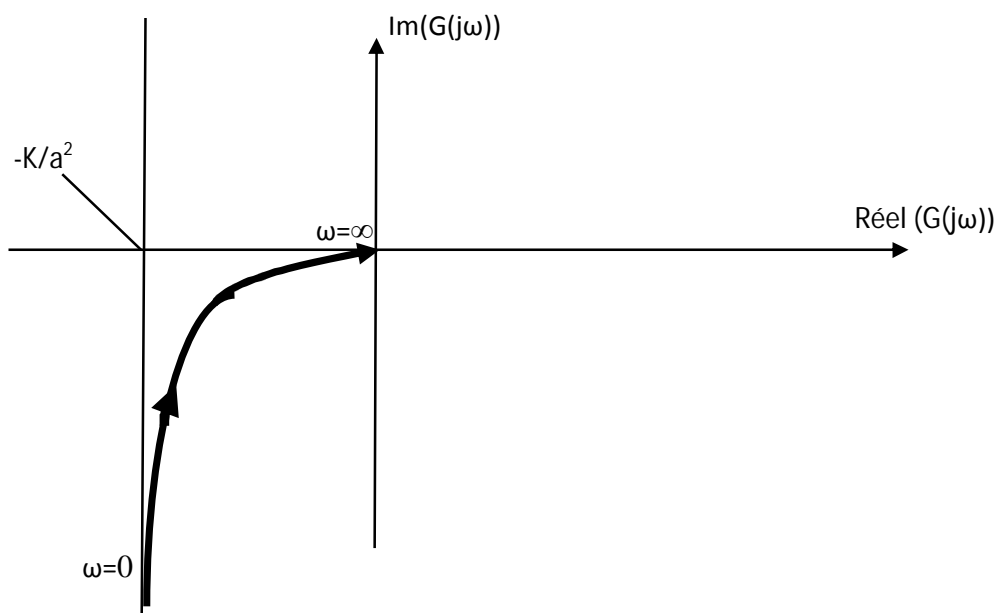
$$G_3(p) = \frac{K}{p(p+a)} \Rightarrow G_3(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+a)}$$

$$|G_3(j\omega)| = \left| \frac{K}{j\omega(j\omega+a)} \right|$$

ω	$ G(j\omega) $	$\angle G(j\omega)$
0	∞	$-\pi/2$
∞	0	$-\pi$

$$\angle(G_3(j\omega)) = \angle\left(\frac{K}{j\omega(j\omega+a)}\right) = -\angle(j\omega) - \angle(j\omega+a)$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \angle(G_3(j\omega)) = \angle\left(\frac{K}{j\omega(j\omega+a)}\right) = -\angle(j\omega) - \angle(j\omega+a) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$$



$$G_3(p) = A + jB$$

$$G_3(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + a)} = \frac{K(-j\omega + a)}{(-\omega^2 + aj\omega)} = \frac{K(-\omega^2 - aj\omega)}{(-\omega^2 + aj\omega)(-\omega^2 - aj\omega)}$$

$$\Rightarrow G_3(j\omega)G_3(j\omega) = \frac{-K\omega^2 - jKa\omega}{(-\omega^2 + aj\omega)(-\omega^2 - aj\omega)} = \frac{-K\omega^2 - jKa\omega}{(\omega^4 + aj\omega^3 - aj\omega^3 + a^2\omega^2)}$$

$$\Rightarrow G_3(j\omega) = \frac{-K\omega^2 - jKa\omega}{(\omega^4 + a^2\omega^2)}$$

$$\Rightarrow G_3(j\omega) = \frac{-K\omega^2}{(\omega^4 + a^2\omega^2)} - j\frac{Ka\omega}{(\omega^4 + a^2\omega^2)}$$

$$\Rightarrow G_3(j\omega) = \frac{-K}{(\omega^2 + a^2)} - j\frac{Ka}{(\omega^3 + a^2\omega)}$$

III.2. Diagramme de Bode

Nous avons vu une représentation de la réponse fréquentielle dans un plan unique, nous allons voir maintenant la représentation dans deux plans.

- Dans un double plan

$$\begin{cases} \text{plan 1: } \omega, |G(j\omega)| \\ \text{plan 2: } \omega, \angle G(j\omega) \end{cases}$$

Exemple 01 :

$$G(p) = \frac{1}{(p+a)} \Rightarrow G(p) = \frac{1}{a\left(\frac{p}{a} + 1\right)}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + a)}, \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}, \quad \angle G(j\omega) = -\text{artg}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

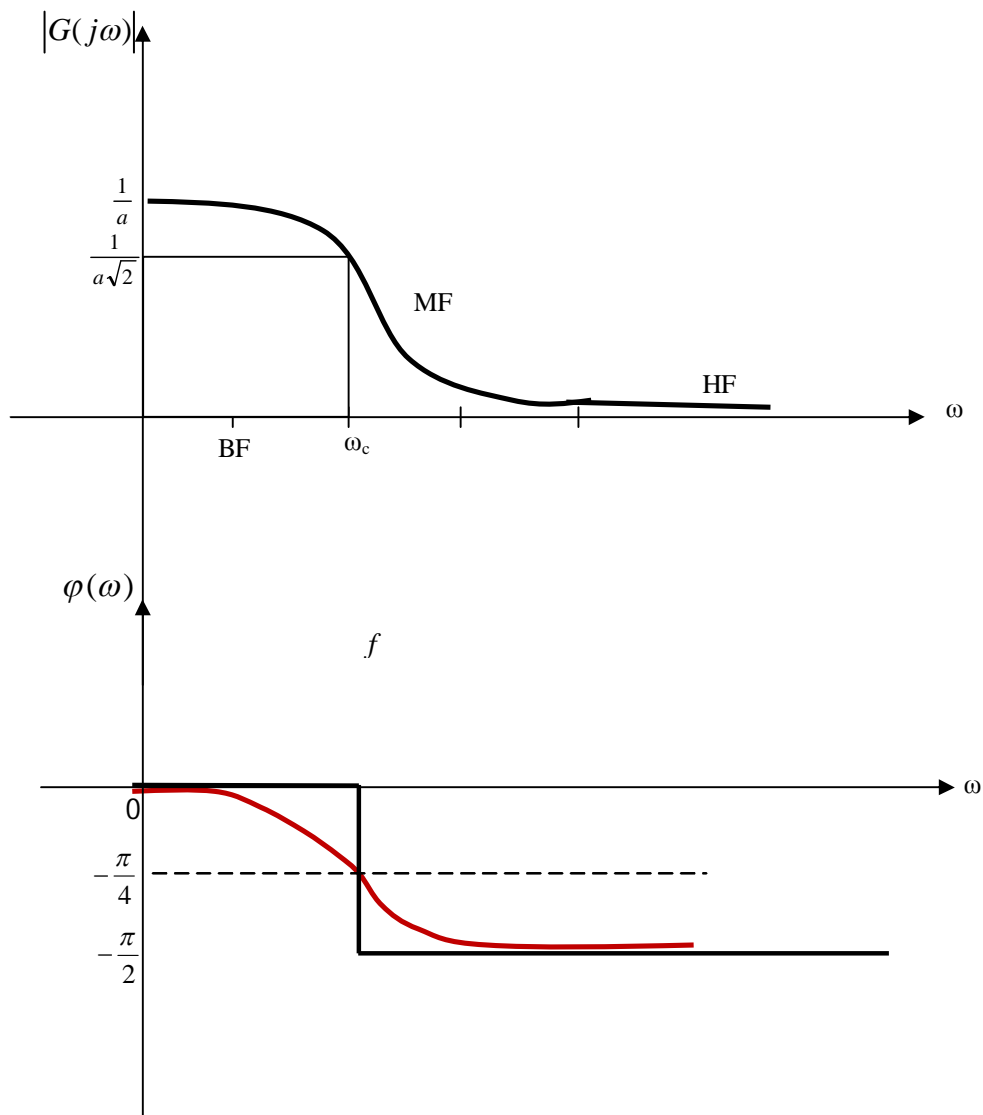


Fig. Tracé de Bode

$$\frac{1}{a} : \max de |G(j\omega)|$$

Par convention les basses fréquences s'arrêtent à peu près à :

$$\frac{\max(|G(j\omega)|)}{\sqrt{2}}$$

Remarque 01:

En général on trace la réponse fréquentielle sur une large plage de fréquences, pour cela il faut trouver un moyen pour réduire l'échelle des abscisses.

Exemple 02 :

$$G(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)} \Rightarrow G(p) = \frac{1}{ab} \frac{1}{\left(\frac{p}{a}+1\right)\left(\frac{p}{b}+1\right)}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+a)(j\omega+b)}, \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{ab} \left| \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{a}+1\right)} \times \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{b}+1\right)} \right|,$$

$$\angle G(j\omega) = -\angle\left(\frac{j\omega}{a}+1\right) - \angle\left(\frac{j\omega}{b}+1\right)$$

Exemple 03 :

$$G(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)} \Rightarrow G(p) = \frac{1}{abc} \frac{1}{\left(\frac{p}{a}+1\right)\left(\frac{p}{b}+1\right)\left(\frac{p}{c}+1\right)}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+a)(j\omega+b)(j\omega+c)}, \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{abc} \left| \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{a}+1\right)} \times \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{b}+1\right)} \times \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{c}+1\right)} \right|,$$

$$\angle G(j\omega) = -\angle\left(\frac{j\omega}{a}+1\right) - \angle\left(\frac{j\omega}{b}+1\right) - \angle\left(\frac{j\omega}{c}+1\right)$$

Ainsi à chaque fois il faut recalculer les modules $|G(j\omega)|$

Remarque 02:

Il faut alors trouver une méthode qui nous permet de tracer $|G(j\omega)|$ sans recalculer cette valeur.

Pour répondre à ces remarques 1 et 2 Bode à proposer de tracer $20\log_{10}|G(j\omega)|$ au lieu de $|G(j\omega)|$ et d'utiliser **une échelle logarithmique**.

Rappelons d'abord que $|G(j\omega)| = \frac{B}{A}$ sans unité.

Par convention les radioélectroniciens ont donné une unité : le décibel qui est : $20\log_{10}|G(j\omega)|$

Pour introduire le diagramme de Bode, nous allons raisonner sur des exemples.

Exemple :

$$G(p) = \frac{1}{(p+a)} \Rightarrow G(p) = \frac{1}{a\left(\frac{p}{a}+1\right)} = \frac{1}{a(\tau p+1)}, \tau = \frac{1}{a}$$

$$G(p) = \frac{K}{(\tau p+1)}$$

Forme générale d'un système du 1^{er} ordre, pour l'analyse fréquentielle.

Posons pour commencer $K=1$, alors :

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+j\omega\tau} \right|$$

III.2.1. Définition du diagramme de Bode :

Le diagramme de Bode consiste à tracer la réponse fréquentielle en deux graphes.

- 1) $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ sur une échelle semi-logarithmique, c.à.d. en abscisse on utilise $\log_{10}\omega$ au lieu de ω , par convention $20 \log_{10} |G(j\omega)| = G_{dB}$



- 2) $\angle G(j\omega)$ sur une échelle semi-logarithmique.



Revenons à notre exemple :

$$G(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

$$G_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{1}{1 + j\omega\tau}\right| = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}\right) = 20\log_{10}\left(1 + \omega^2\tau^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow G_{dB} = -10\log_{10}\left(1 + \omega^2\tau^2\right)$$

Analyse asymptotique :

Définissons : $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

$$\Rightarrow G_{dB} = -10\log_{10}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)$$

De plus, définissons les basses fréquences par : $\omega \ll \omega_c$ **BF**

Les hautes fréquences par : $\omega \gg \omega_c$ **HF**

Etudions G_{dB} aux BF et aux HF

BF :

$$\Rightarrow G_{dB} = -10\log_{10}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) = -10\log_{10}(1) \Rightarrow G_{dB} = 0dB$$

HF :

$$\Rightarrow G_{dB} = -10\log_{10}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) = -10\log_{10}\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) \Rightarrow G_{dB} = -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\Rightarrow G_{dB} = -20[\log_{10}(\omega) - \log_{10}(\omega_c)]$$

Si nous traçons G_{dB} en fonction de $\log_{10}\omega$, on peut poser : $X = \log_{10}\omega$

$$G_{dB} = -20X + A, \text{ avec } A = +20\log_{10}(\omega_c) = cte$$

C'est l'équation d'une droite.

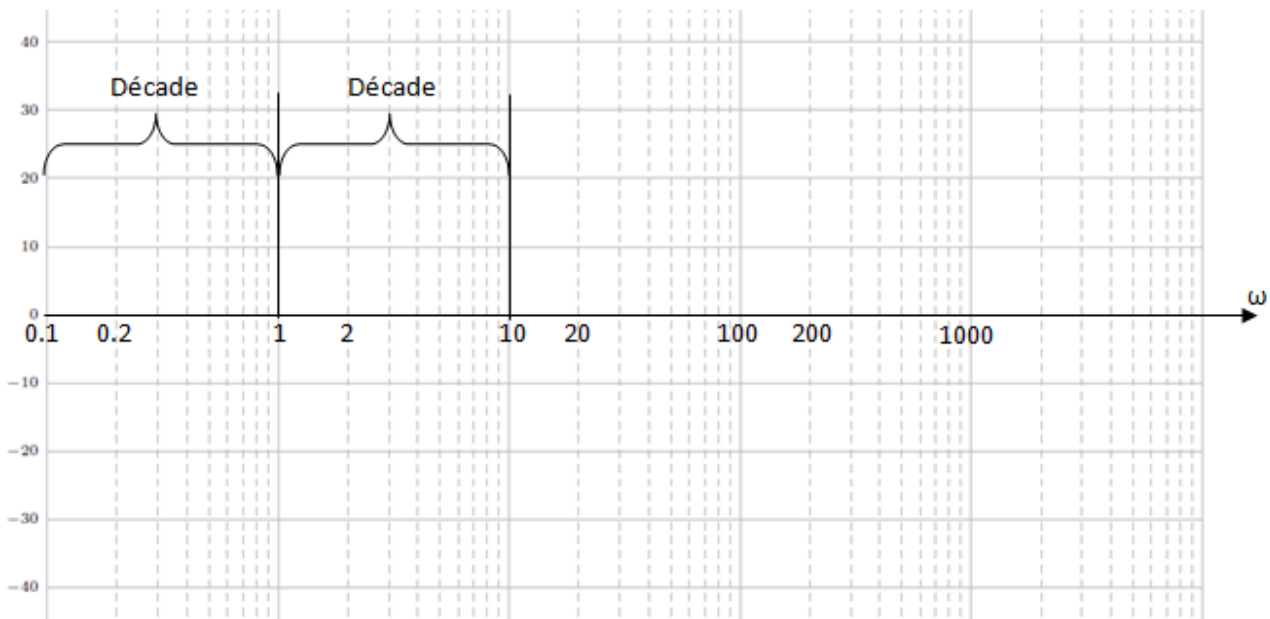
Calculons la pente de cette droite :

$$G_{dB_{HF}} = -20\log_{10}(\omega) + 20\log_{10}(\omega_c)$$

Nous allons calculer G_{dB} pour : $\omega = 10\omega_c$ (décade)

$$\begin{aligned}
 G_{dB_{HF}} &= -20\log_{10}(\omega) + 20\log_{10}(\omega_c) \\
 \Rightarrow G_{dB_{HF}} &= -20\log_{10}(10\omega_c) + 20\log_{10}(\omega_c) \\
 \Rightarrow G_{dB_{HF}} &= -20\log_{10}(10) - 20\log_{10}(\omega_c) + 20\log_{10}(\omega_c) \\
 \Rightarrow G_{dB_{HF}} &= -20\log_{10}(10) \\
 \Rightarrow G_{dB_{HF}} &= -20\text{dB}
 \end{aligned}$$

L'asymptote aux HF ($\omega \gg \omega_c$) est une droite de pente : **-20dB par décade**.



On a :

$$G(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

Asymptotes :

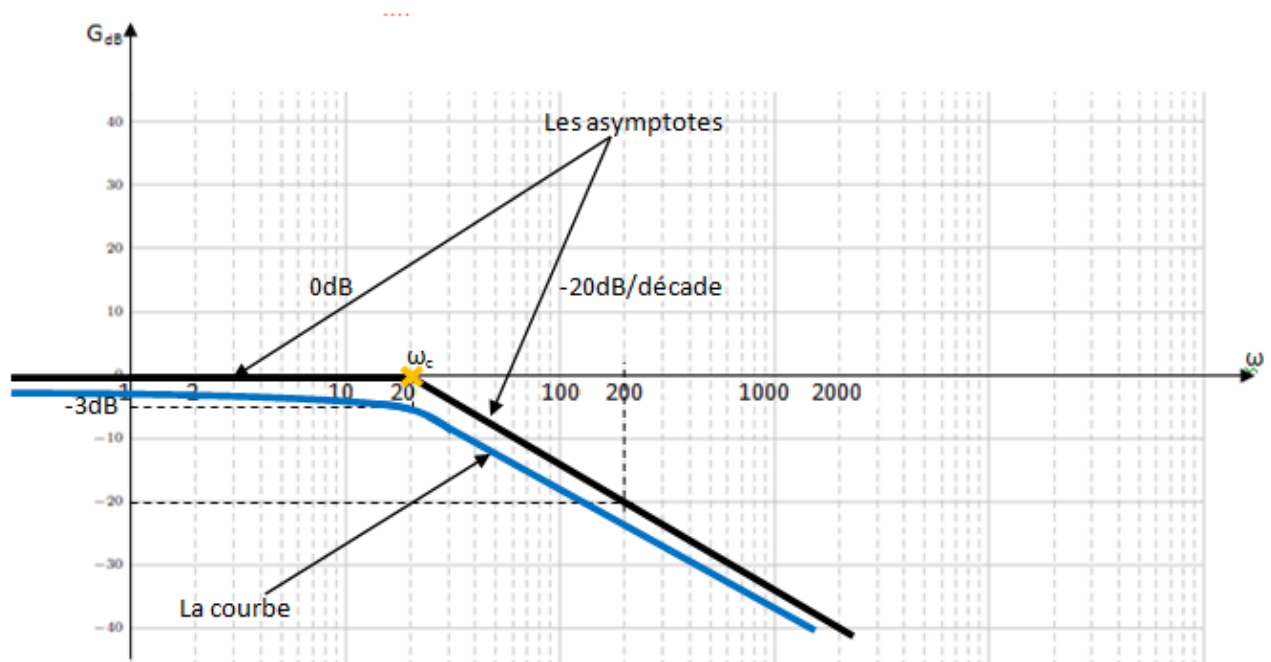
BF=0

HF=-20dB/décade.

Soit : $\tau=0.05 \Rightarrow \omega_c=1/\tau=20\text{rd/s}$

Pour $\omega=\omega_c \Rightarrow G_{dB}=-10\log_{10}(1 + \omega/\omega_c) \Rightarrow G_{dB}=-3\text{dB}$.

ω_c : fréquence de coupure à -3dB



La courbe réelle est très proche de l'asymptote, pour cela, pour les systèmes du 1^{er} ordre, on trace que les asymptotes.

$$G(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

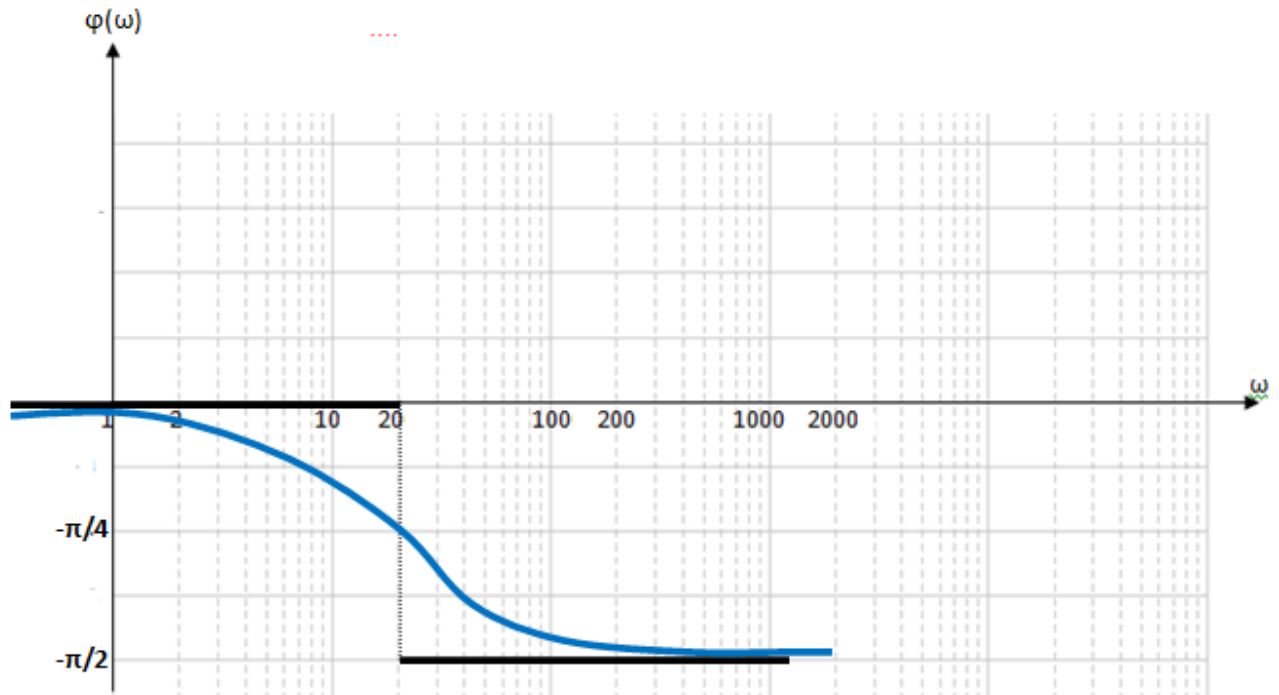
$$\angle G(j\omega) = -\angle(1 + j\omega\tau) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = -\arctg(\omega\tau)$$

Asymptotes :

$$\text{BF : } \omega \ll \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \rightarrow 0$$

$$\text{HF : } \omega \gg \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Pour : } \omega = \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{4}$$



La courbe des phases est assez éloignée, il faut tracer les asymptotes et la courbe réelle.

Exemple 02 :

$$G(p) = 1 + \tau p$$

$$G(j\omega) = 1 + j\omega\tau, \quad \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

$$G_{dB} = 20 \log \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$G_{dB} = 10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right)$$

Analyse asymptotique :

$$\text{Définissons : } \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

$$\Rightarrow G_{dB} = 10 \log_{10} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right)$$

De plus, définissons les basses fréquences par : $\omega \ll \omega_c$ **BF**

Les hautes fréquences par : $\omega \gg \omega_c$ **HF**

Etudions G_{dB} aux BF et aux HF

BF :

$$\Rightarrow G_{dB} = 10 \log_{10} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right) = 10 \log_{10}(1) \Rightarrow G_{dB} = 0 \text{ dB}$$

HF :

$$\Rightarrow G_{dB} = 10 \log_{10} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right) \Rightarrow G_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)$$

$$\Rightarrow G_{dB} = 20 [\log_{10}(\omega) - \log_{10}(\omega_c)]$$

Si nous traçons G_{dB} en fonction de $\log_{10}\omega$, on peut poser : $X = \log_{10}\omega$

$$G_{dB} = 20X + A, \text{ avec } A = -20 \log_{10}(\omega_c) = \text{cte}$$

C'est l'équation d'une droite.

Calculons la pente de cette droite :

$$G_{dB_{HF}} = 20 \log_{10}(\omega) - 20 \log_{10}(\omega_c)$$

Nous allons calculer G_{dB} pour : $\omega = 10\omega_c$ (décade)

$$G_{dB_{HF}} = 20 \log_{10}(\omega) - 20 \log_{10}(\omega_c)$$

$$\Rightarrow G_{dB_{HF}} = 20 \log_{10}(10\omega_c) - 20 \log_{10}(\omega_c)$$

$$\Rightarrow G_{dB_{HF}} = 20 \log_{10}(10) + 20 \log_{10}(\omega_c) - 20 \log_{10}(\omega_c)$$

$$\Rightarrow G_{dB_{HF}} = 20 \log_{10}(10)$$

$$\Rightarrow G_{dB_{HF}} = 20 \text{ dB}$$

L'asymptote aux HF ($\omega \gg \omega_c$) est une droite de pente : **20dB par décade.**

On a :

$$G(p) = 1 + \tau p$$

Asymptotes :

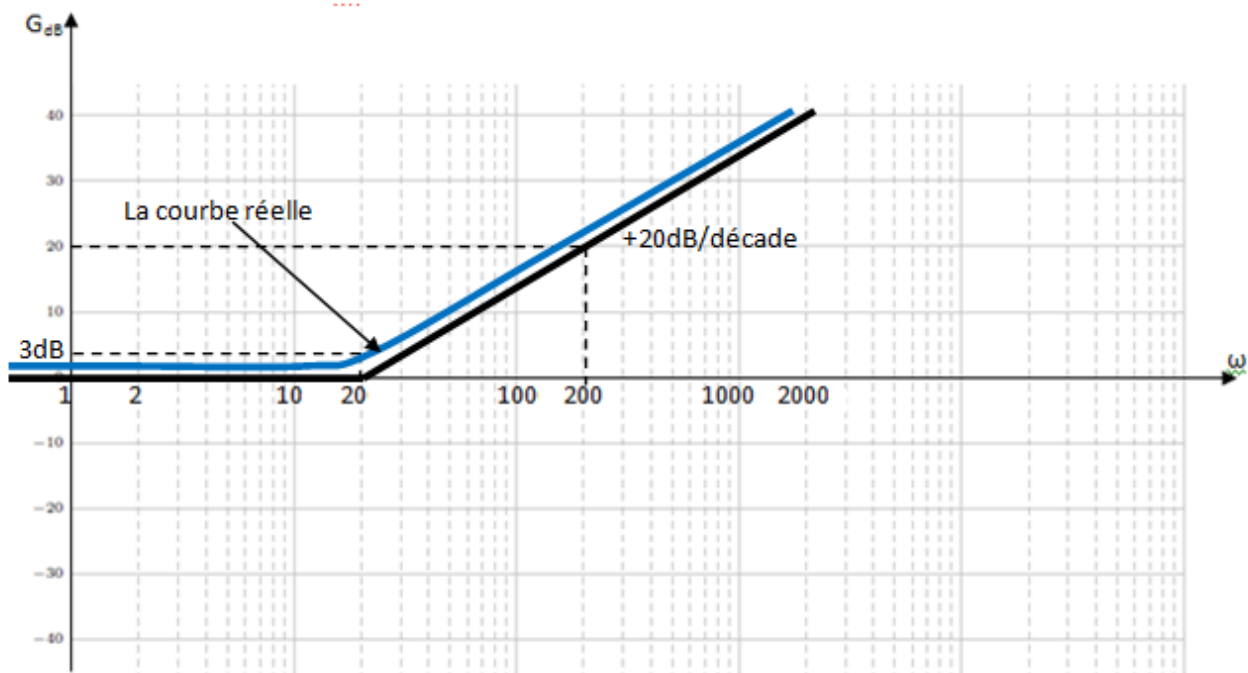
BF=0

HF=20dB/décade.

Soit : $\tau = 0.05 \Rightarrow \omega_c = 1/\tau = 20 \text{ rd/s}$

Pour $\omega = \omega_c \Rightarrow G_{dB} = 10 \log_{10}(1 + \omega/\omega_c) \Rightarrow G_{dB} = 3dB$.

ω_c : fréquence de coupure à 3dB



La courbe réelle est très proche de l'asymptote, pour cela, pour les systèmes du 1^{er} ordre, on trace que les asymptotes.

$$G(p) = 1 + \tau p$$

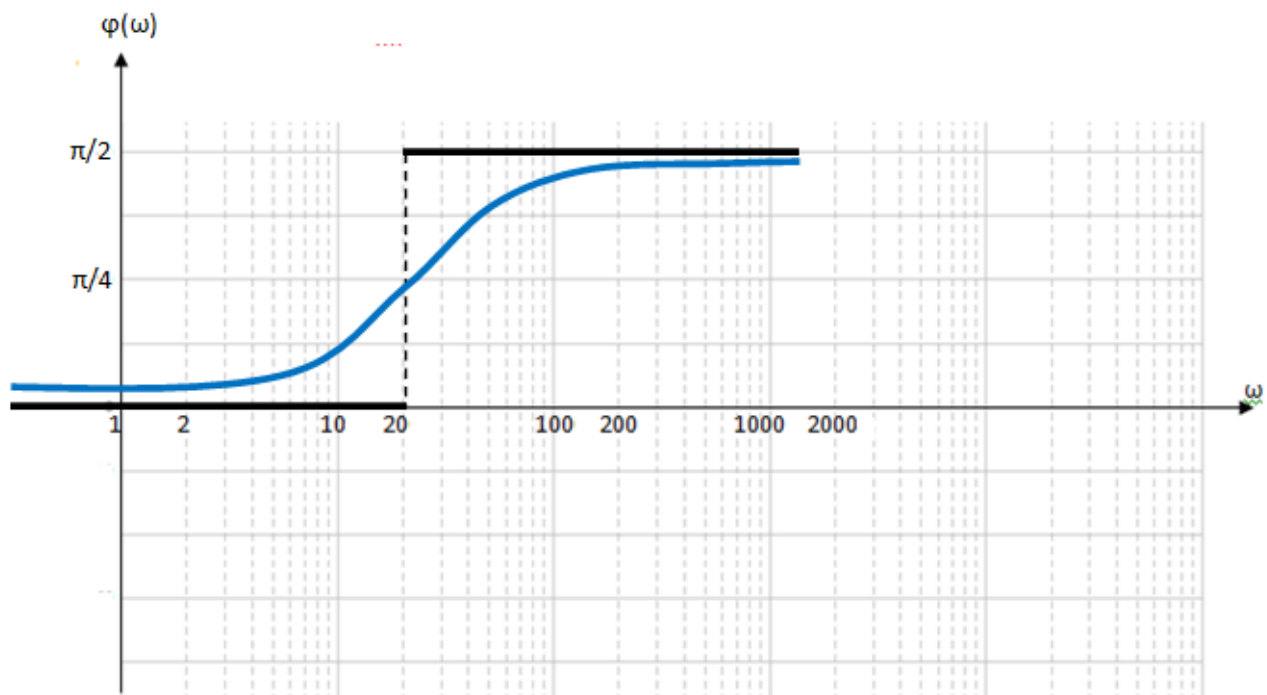
$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega\tau) = \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \arctg(\omega\tau)$$

Asymptotes :

$$\text{BF : } \omega \ll \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \rightarrow 0$$

$$\text{HF : } \omega \gg \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Pour : } \omega = \omega_c \Rightarrow \angle G(j\omega) \rightarrow \frac{\pi}{4}$$



La courbe des phases est assez éloignée, il faut tracer les asymptotes et la courbe réelle.

Exemple 03 :

$$G(p) = \frac{1}{\tau p}$$

Exemple 04 :

$$G(p) = \tau p$$

Exemple 05 :

$$G(p) = \frac{1}{(\tau p)^m}$$

Exemple 06 :

$$G(p) = (\tau p)^m$$

Exemple 03 :

$$G(p) = \frac{1}{\tau p} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau}, \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

$$G_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)| = 20\log_{10}\left|\frac{1}{j\omega\tau}\right| = 20\log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2}}\right) = 20\log_{10}\left(\omega^2\tau^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow G_{dB} = -10\log_{10}\left(\omega^2\tau^2\right)$$

Analyse asymptotique :

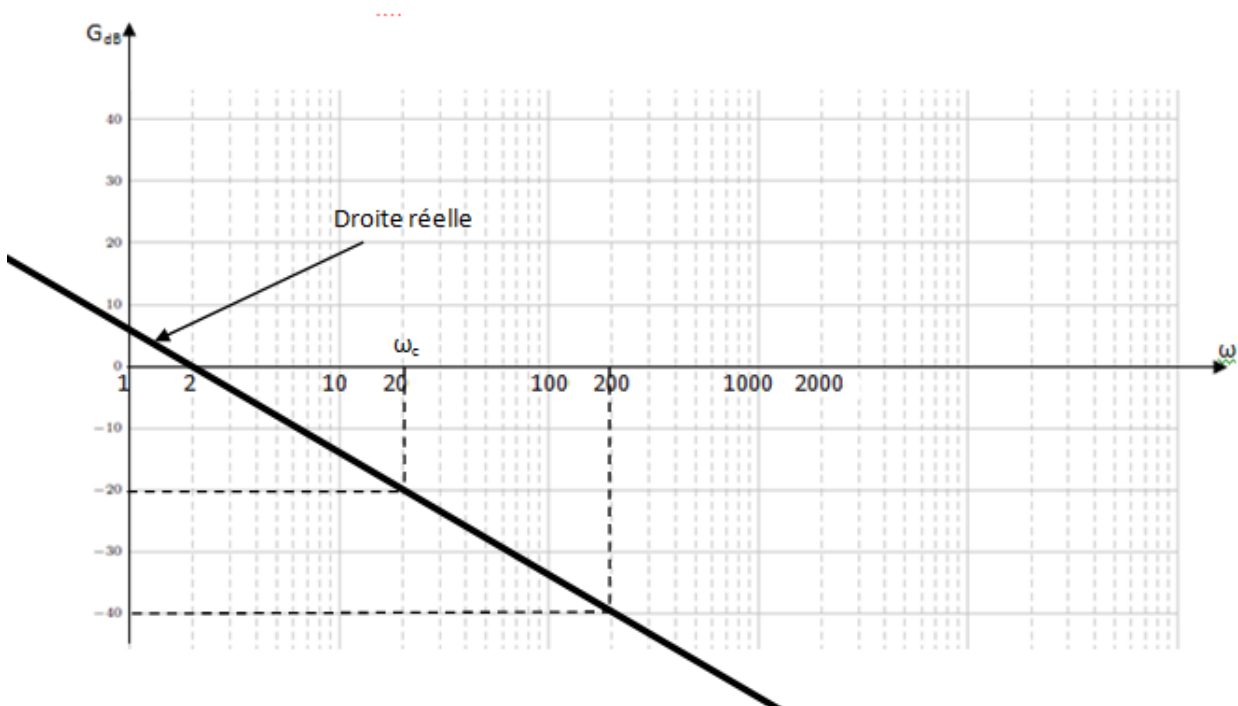
$$\text{Définissons : } \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

$$\Rightarrow G_{dB} = -10\log_{10}\left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)$$

$$\Rightarrow G_{dB} = -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \Rightarrow G_{dB} = -20\log_{10}(\omega) + 20\log_{10}(\omega_c)$$

Droite de pente -20dB/décade.

Soit : $\tau=0.05 \Rightarrow \omega_c=1/\tau=20\text{rd/s}$



III.2.2. Tableau des éléments simples non décomposables

$G(p)$	$ G(p) $	φ
$G(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$		
$G(p) = 1 + \tau p$		
$G(p) = \frac{1}{\tau p}$		
$G(p) = \tau p$		
$G(p) = \frac{1}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$ ($\xi < 1$)		

III.2.3. Généralités sur le diagramme de Bode des systèmes composés

Un système composé peut s'écrire comme suit :

$$G(p) = \frac{(1+T_1p)(1+T_2p)\dots(1+T_m p)}{(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)\dots(1+\tau_n p)}$$

Ou :

$$G(p) = \frac{(1+T_1p)(1+T_2p)\dots T_2 p \dots (1+T_m p)}{(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)\dots \tau_i p \dots (p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)}$$

En décibel :

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \left[\frac{(1+T_1p)(1+T_2p)\dots(1+T_m p)}{(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)\dots(1+\tau_n p)} \right]_{p=j\omega}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |(1+j\omega T_1)| + 20 \log_{10} |(1+j\omega T_2)| + \dots + 20 \log_{10} |(1+j\omega T_m)| \\ + 20 \log_{10} \left| \frac{1}{(1+j\omega \tau_1)} \right| + 20 \log_{10} \left| \frac{1}{(1+j\omega \tau_2)} \right| + \dots + 20 \log_{10} \left| \frac{1}{(1+j\omega \tau_n)} \right|$$

Pour tracer G_{dB} on trace d'abord les $G_{i dB}$ puis on fait la somme **géométrique (des asymptotes)**

Pour les phases :

$$\angle G(j\omega) = \angle(1+j\omega T_1) + \angle(1+j\omega T_2) + \dots + \angle(1+j\omega T_m) \\ - \angle(1+j\omega \tau_1) - \angle(1+j\omega \tau_2) - \dots - \angle(1+j\omega \tau_n)$$

$$\angle G(j\omega) = \sum_{i=1} \angle G_i$$

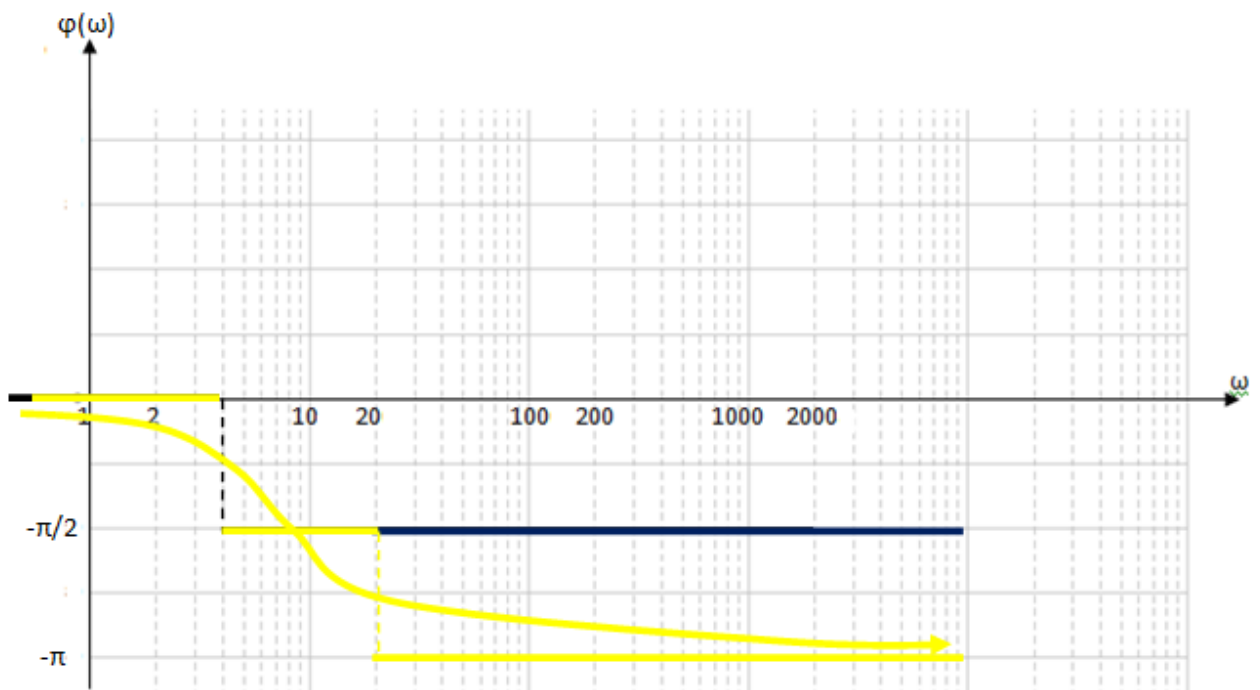
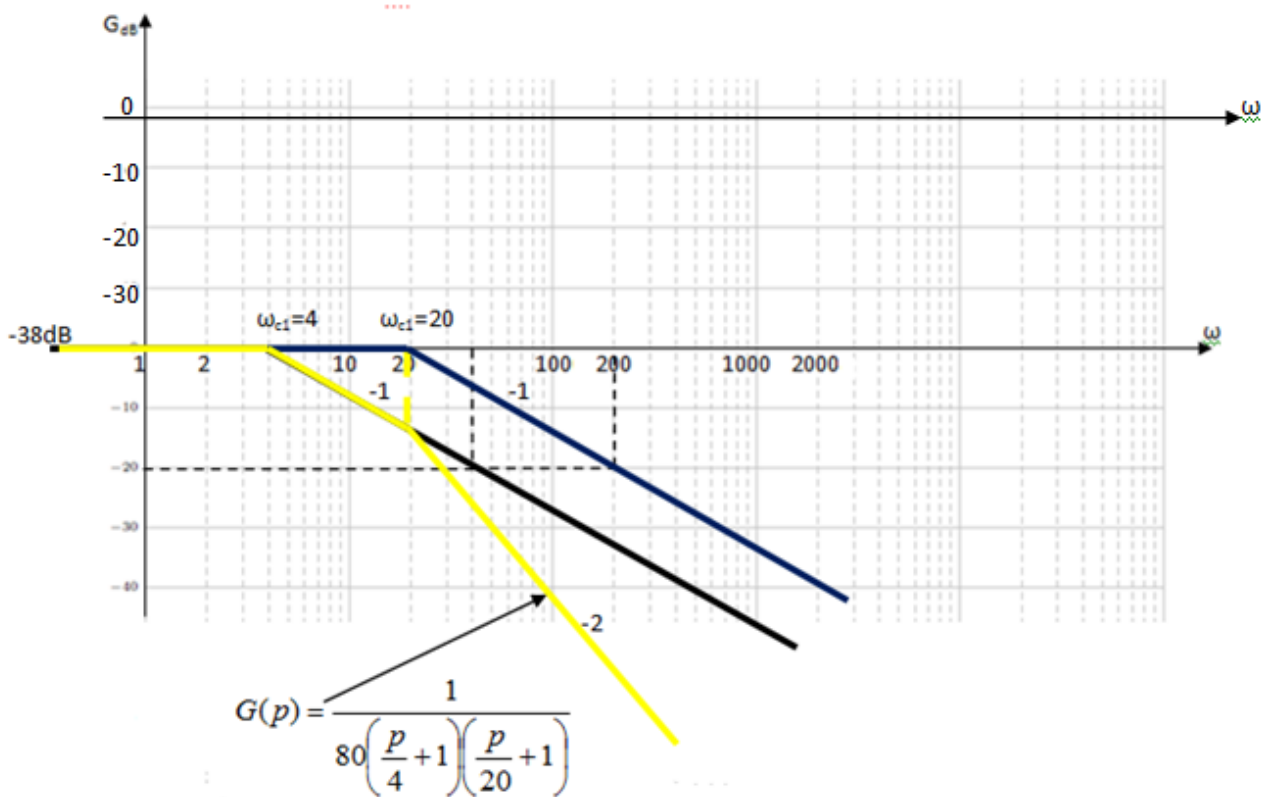
Pour tracer $\angle G(j\omega)$ on trace d'abord les $\angle G_i$ puis on fait la somme géométrique et **on calcul des points pour trouver la courbe réelle.**

Exemple 01 :

$$G(p) = \frac{1}{(p+4)(p+20)}$$

Tout d'abord, on écrit la FT sous forme canonique fréquentielle:

$$G(p) = \frac{1}{80 \left(\frac{p}{4} + 1\right) \left(\frac{p}{20} + 1\right)}, \quad G_1(p) = \frac{1}{80}, \quad G_2(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{4} + 1\right)}, \quad G_3(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{20} + 1\right)}$$



Pour inclure $G_1=1/80$ en dB, on décale l'axe 0dB de la valeur $|G_1(p)|_{dB}$

Vers le haut si $|G_1(p)|_{dB} < 0$

Vers le bas si $|G_1(p)|_{dB} > 0$

$$|G_1(p)|_{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{80}\right) \Rightarrow |G_1(p)|_{dB} = -38.06dB$$

$$\varphi = -\angle\left(1 + j\frac{\omega}{4}\right) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{20}\right) \Rightarrow \varphi = -\arctg\left(\frac{\omega}{4}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{20}\right)$$

ω	φ
4	$-56^\circ.3$
10	-94°
15	-111°
20	-123°

Exemple 02:

$$G(p) = \frac{(p+8)}{(p+0.5)(p+40)}$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{8\left(\frac{p}{8}+1\right)}{20\left(\frac{p}{0.5}+1\right)\left(\frac{p}{40}+1\right)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{2\left(\frac{j\omega}{8}+1\right)}{5\left(\frac{j\omega}{0.5}+1\right)\left(\frac{j\omega}{40}+1\right)}$$

$$\Rightarrow G_1(p) = \frac{2}{5} \Rightarrow G_{1dB} = 20 \log_{10}\left(\frac{2}{5}\right) = -0.4$$

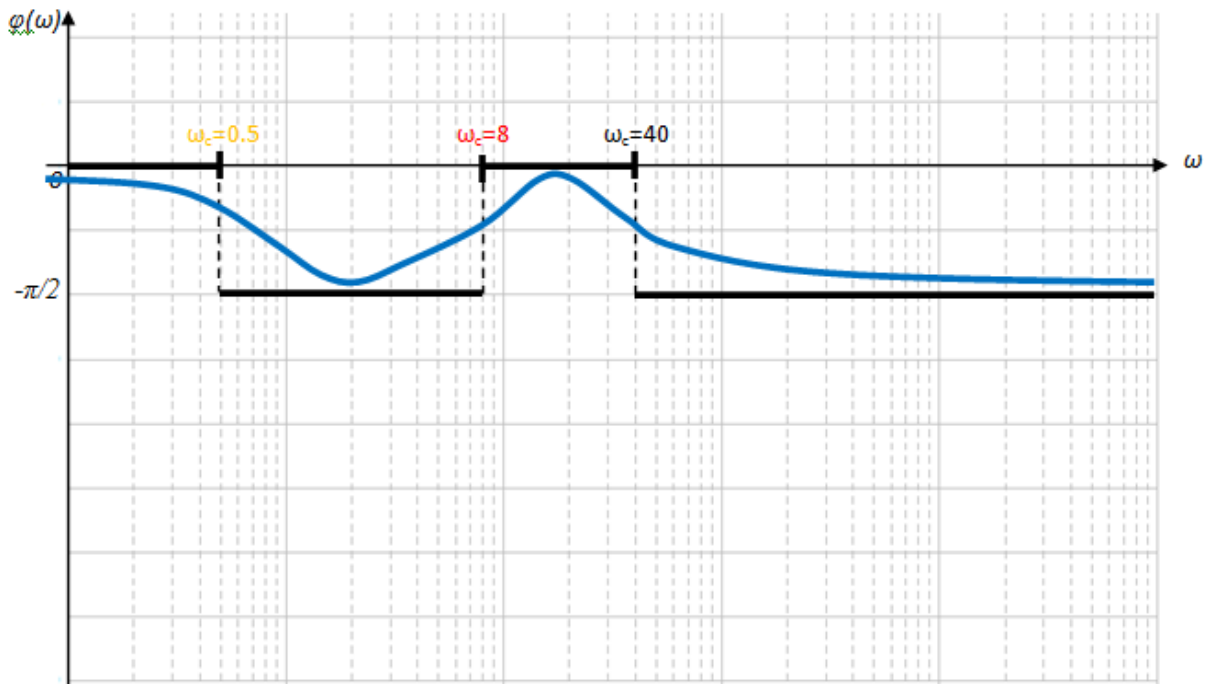
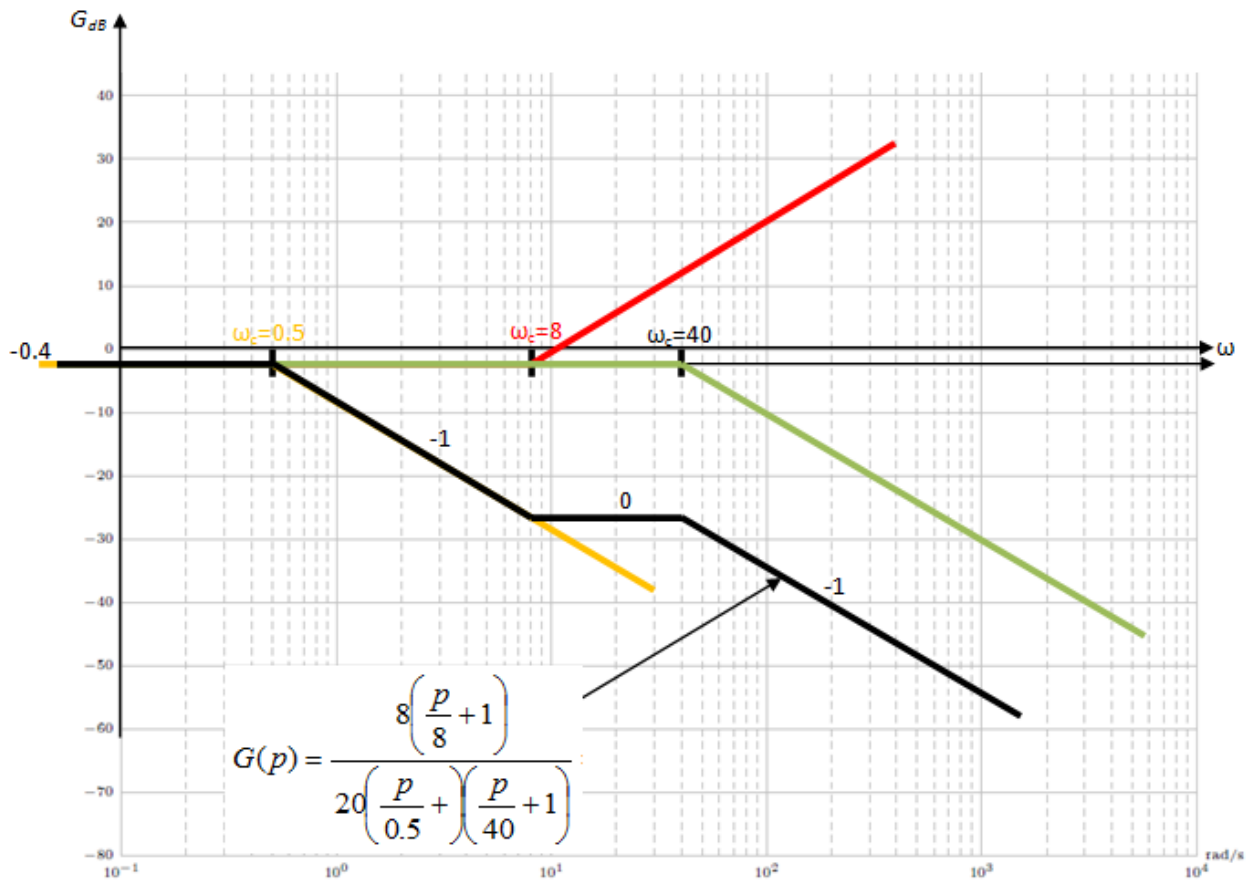
$$G_2(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{8}+1\right), \text{ avec } \omega_c = 8$$

$$G_3(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{0.5}+1\right)}, \text{ avec } \omega_c = 0.5$$

$$G_4(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{40}+1\right)}, \text{ avec } \omega_c = 40$$

$\angle G(j\omega)$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{8}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{0.5}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{40}\right)$$



Exemple 03:

$$G(p) = \frac{(1-4p)}{p^2(p+3)(p+10)}$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{\left(1 - \frac{p}{0.25}\right)}{30p^2 \left(\frac{p}{3} + 1\right) \left(\frac{p}{10} + 1\right)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{\left(1 - \frac{j\omega}{0.25}\right)}{30(j\omega)^2 \left(\frac{j\omega}{3} + 1\right) \left(\frac{j\omega}{10} + 1\right)}$$

$$\Rightarrow G_1(p) = \frac{1}{30} \Rightarrow G_{1_{dB}} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{30}\right) = -29.5$$

$$G_2(j\omega) = (1 - 4j\omega), \text{ avec } \omega_c = 0.25$$

$$G_3(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}, \text{ avec } \omega_c = 1$$

$$G_4(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}, \text{ avec } \omega_c = 3$$

$$G_5(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{10} + 1\right)}, \text{ avec } \omega_c = 10$$

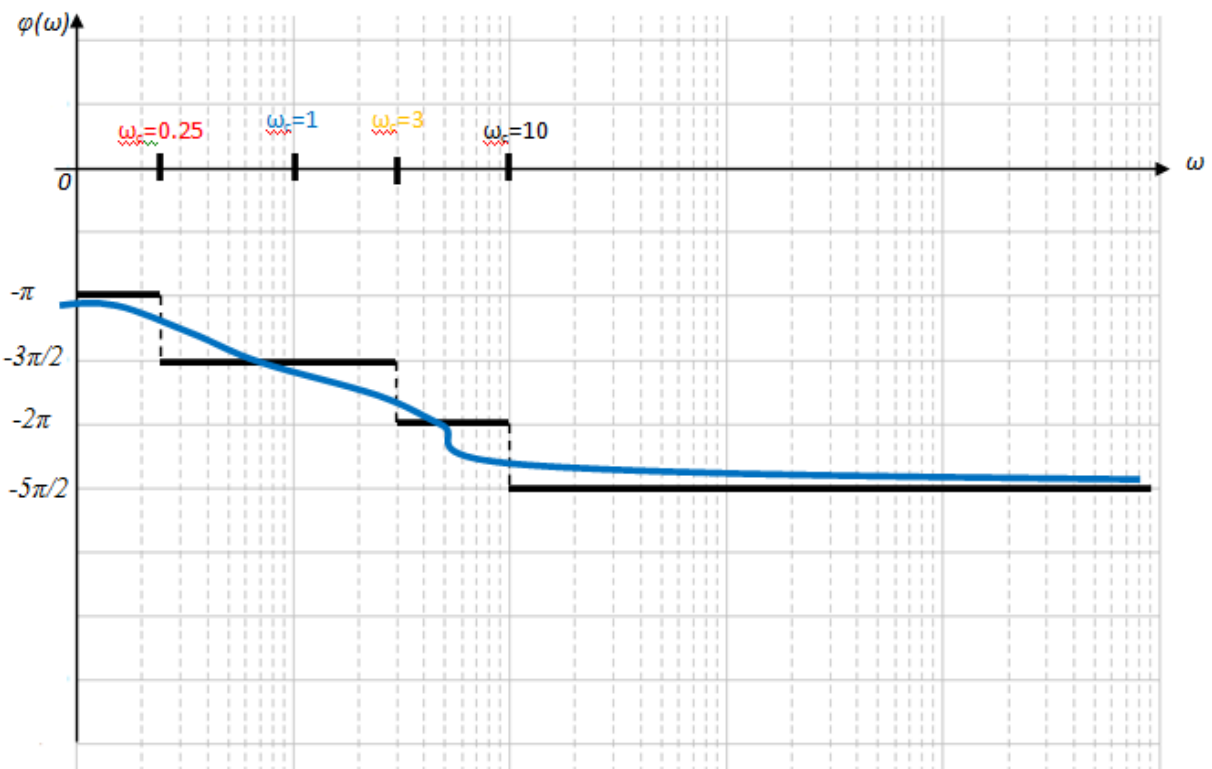
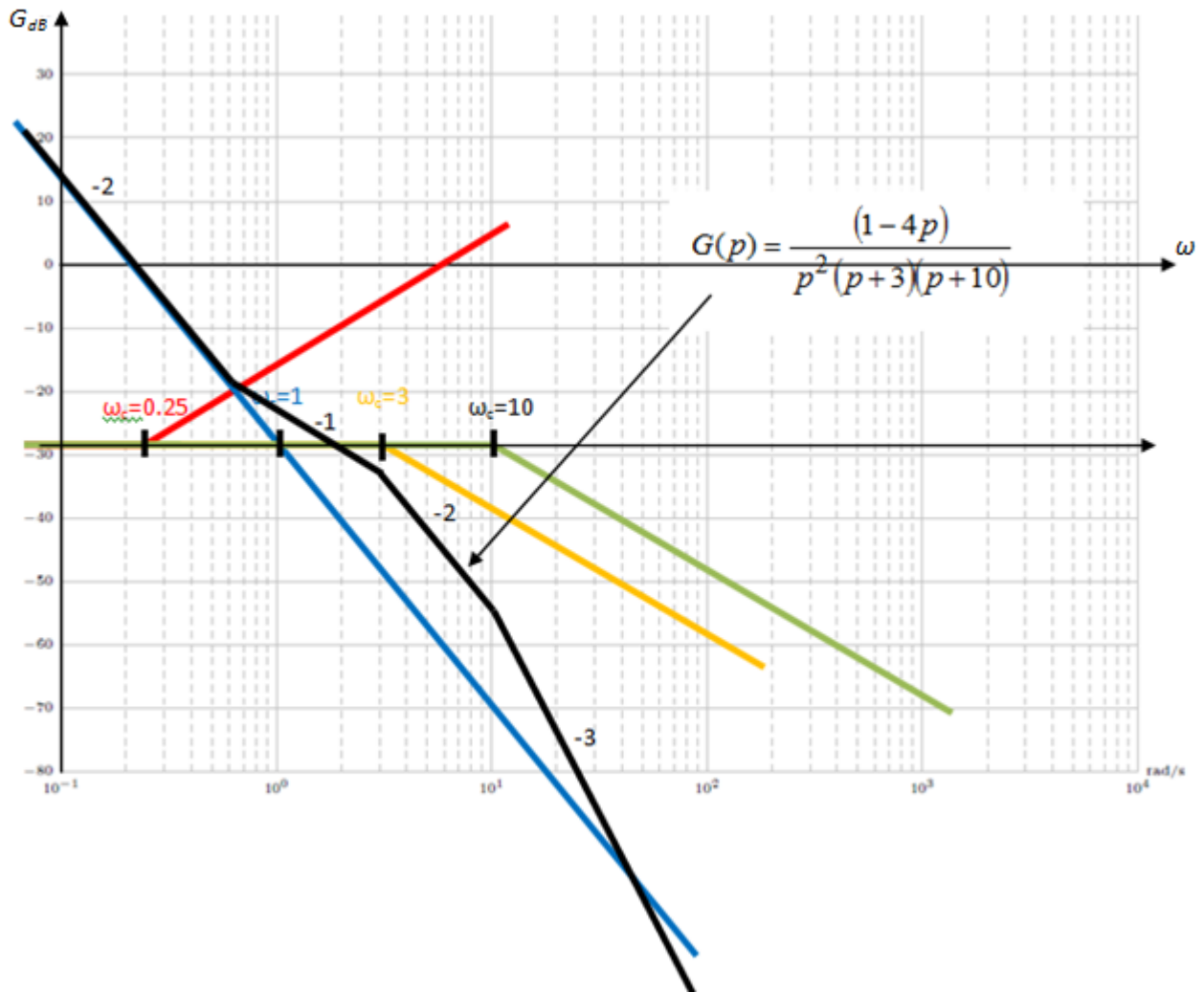
$$\angle G(j\omega)$$

On peut déduire la phase à partir des asymptotes de G_{dB} si on n'a pas de système à non minimum de phase.

$$G_2(j\omega) = (1 - 4j\omega), \text{ avec } \omega_c = 0.25$$

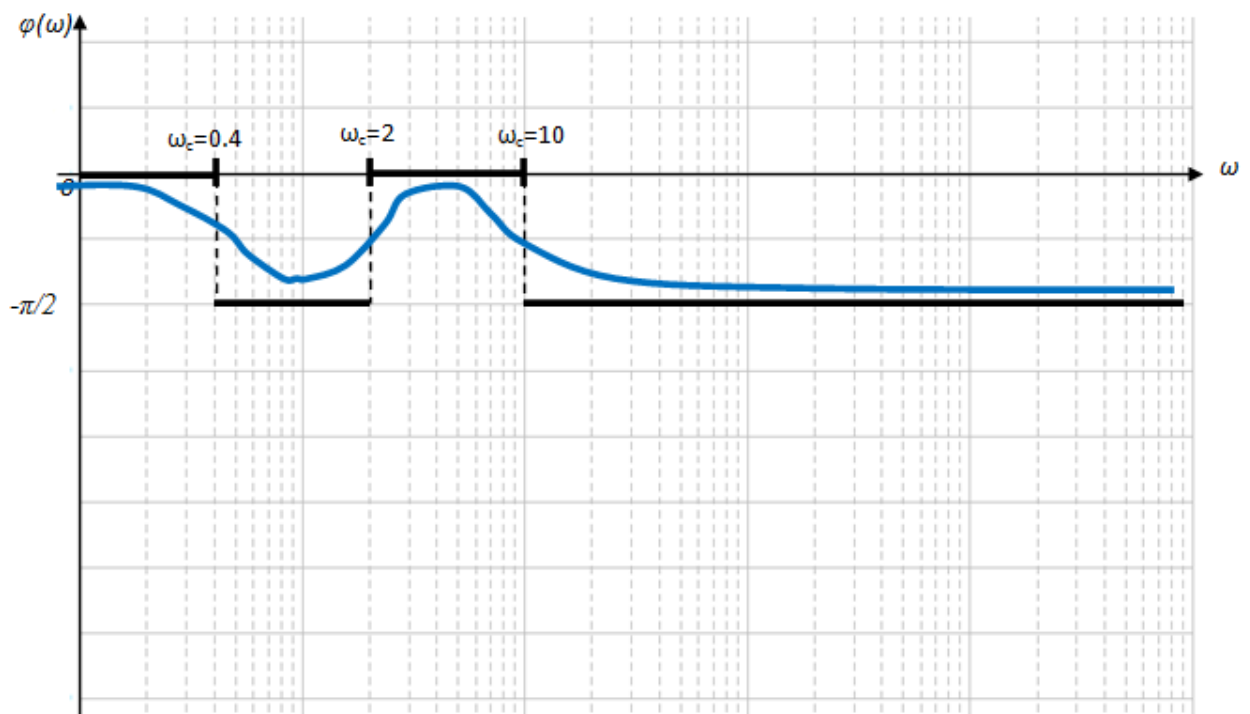
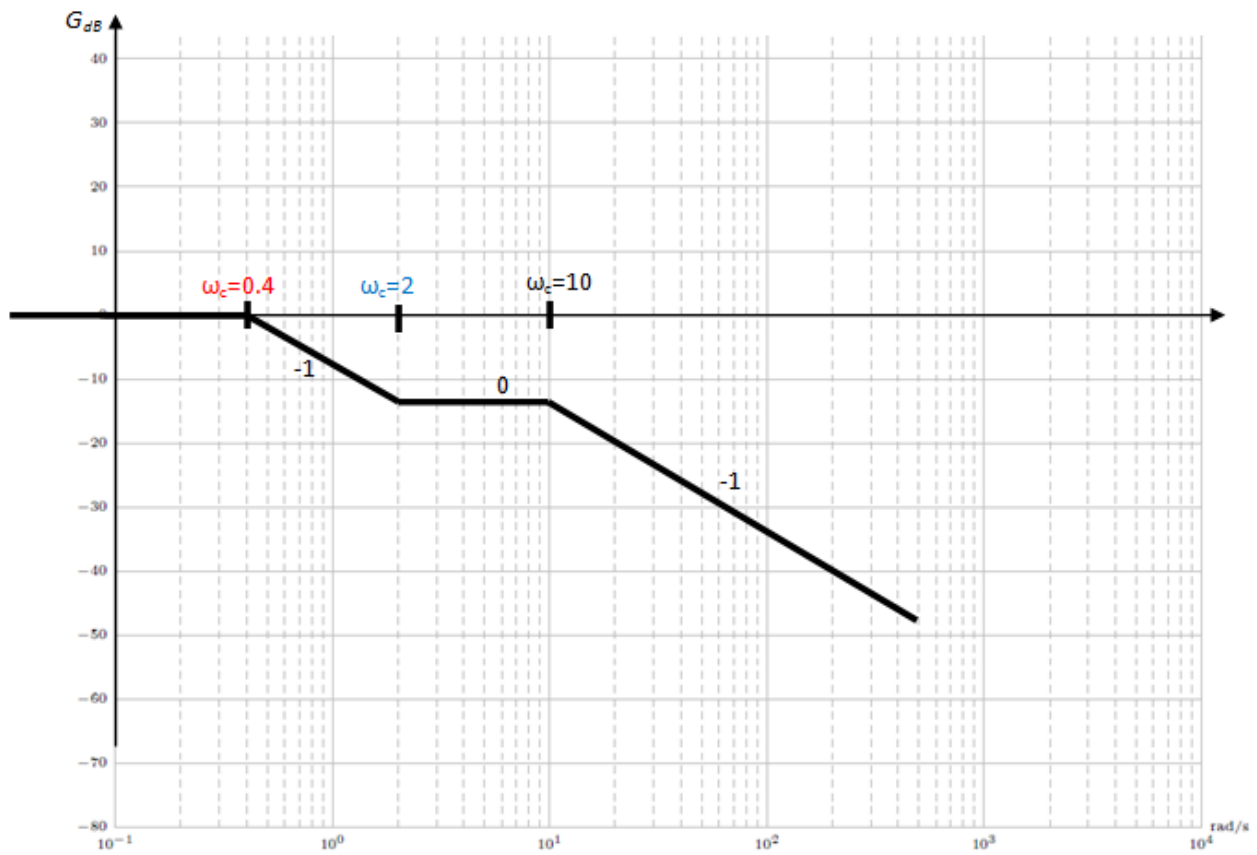
C'est un système à non minimum de phase (pente +1 et phase $-\pi/2$: il inverse la phase)

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \text{arctg}(-4\omega) - \text{arctg}\left(\frac{\omega}{3}\right) - \text{arctg}\left(\frac{\omega}{10}\right) - \pi$$



Exemple 04:

Trouver la fonction de transfert du système de la figure suivante :



$$G(p) = \frac{\left(1 + \frac{p}{2}\right)}{\left(\frac{p}{0.4} + 1\right)\left(\frac{p}{10} + 1\right)}$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{\left(1 + \frac{p}{2}\right)}{\left(\frac{p}{0.4} + 1\right)\left(\frac{p}{10} + 1\right)} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{2}\right)}{\left(\frac{j\omega}{0.4} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{10} + 1\right)}$$

$$G_1(j\omega) = \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right), \text{ avec } \omega_c = 2$$

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{0.4} + 1\right)}, \text{ avec } \omega_c = 0.4$$

$$G_3(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{10} + 1\right)}, \text{ avec } \omega_c = 10$$

$$\angle G(j\omega)$$

$$\varphi = \angle G(j\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{0.4}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

IV. La stabilité dans le domaine fréquentiel

IV.1. le critère de Nyquist

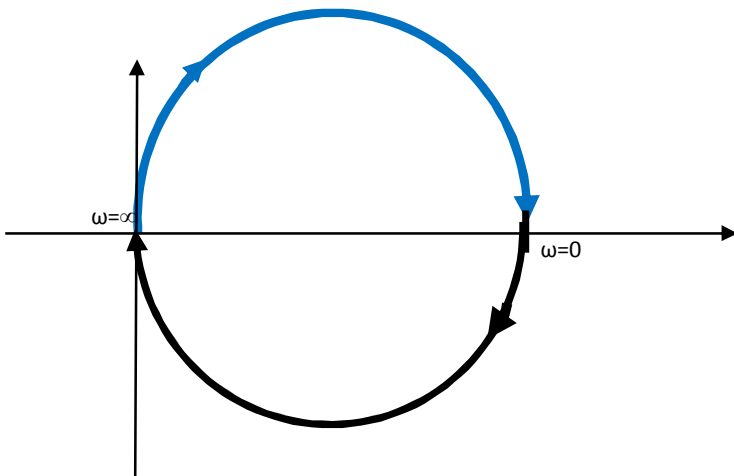
IV.1.1. le diagramme de Nyquist

Le diagramme de Nyquist est représenté par le tracé de $G(j\omega)$ pour $\omega \rightarrow]-\infty 0 +\infty[$ dans le plan $(\operatorname{Réel}G(j\omega), \operatorname{Im}G(j\omega))$. On peut donc voir que pour tracé ce diagramme, on tracera d'abord le diagramme polaire de $G(j\omega)$, $\omega \in]0, +\infty[$ et lui ajouter son symétrique par rapport à l'axe $\operatorname{Réel}(G(j\omega))$.

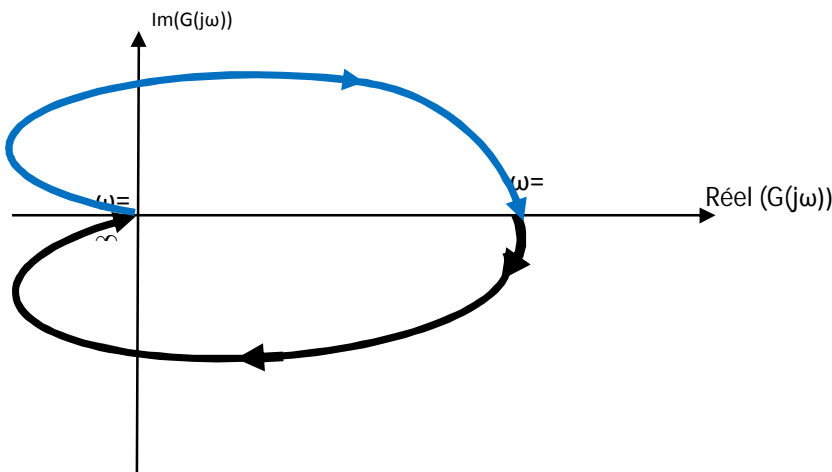
Remarque :

Le diagramme de Nyquist n'a pas d'interprétation physique. On le trace pour les **systèmes stables et instables**.

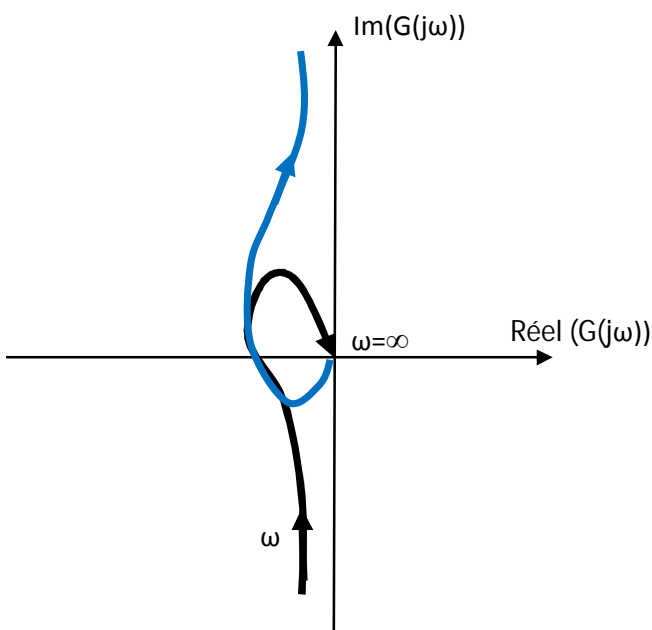
Exemples:



$$\frac{K}{2p+1}$$



$$\frac{K}{p^2 + bp + c}$$

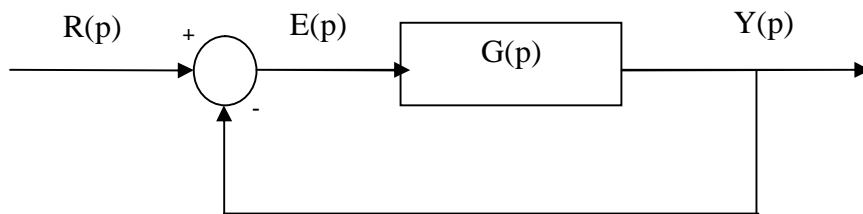


$$\frac{K}{p(p^2 + p + a)}$$

- diagramme polaire
- + diagramme de Nyquist

IV.1.2. le critère de stabilité de Nyquist

Considérons un système en boucle fermée à retour unitaire négatif (Negative feedback)



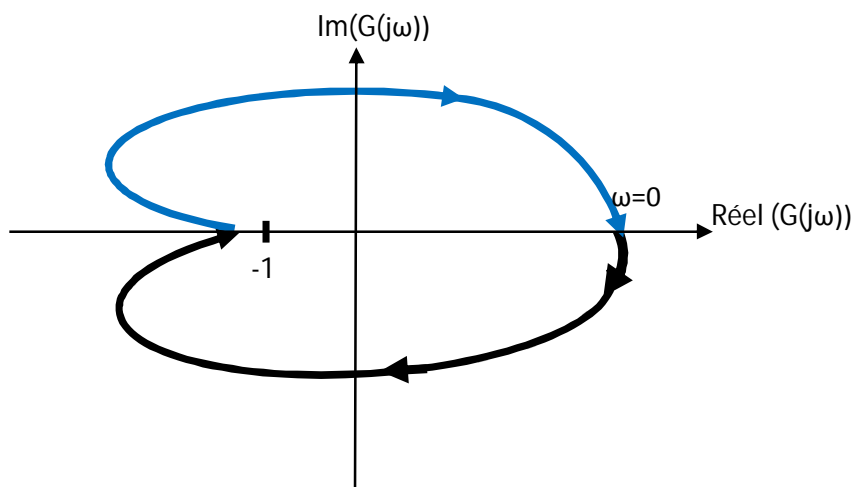
$G(p)$: la fonction de transfert en boucle ouverte.

$$\frac{Y(p)}{R(p)} = H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

Critère de Nyquist :

Soit P le nombre de pôles à partie réelle positive de $G(p)$.

Soit N le nombre de fois que le diagramme de Nyquist de $G(p)$ **encerce le point (-1)** dans le sens de rotation des aiguilles d'une montre. (Im=0, Réel=-1).

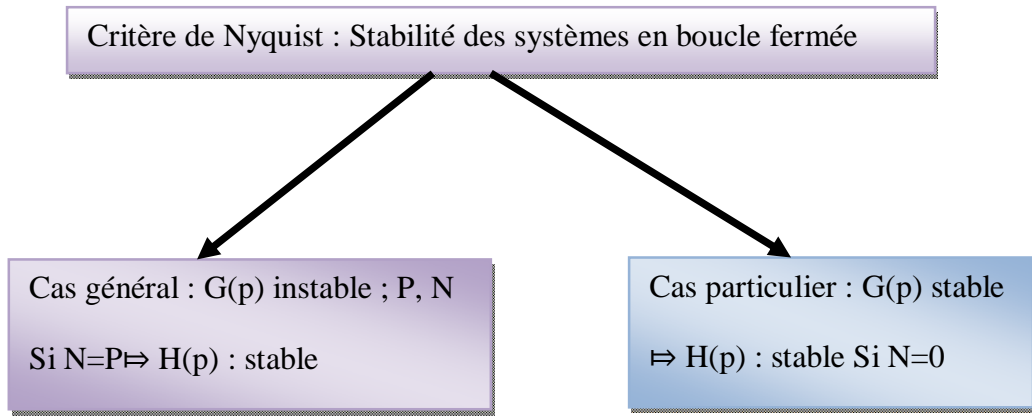


Alors le nombre de pôles à partie réel positive de $H(p)$ est donné par : $Z=N-P$, et pour que le système en boucle fermée soit stable, il faut que : $Z=0 \Rightarrow N=P$

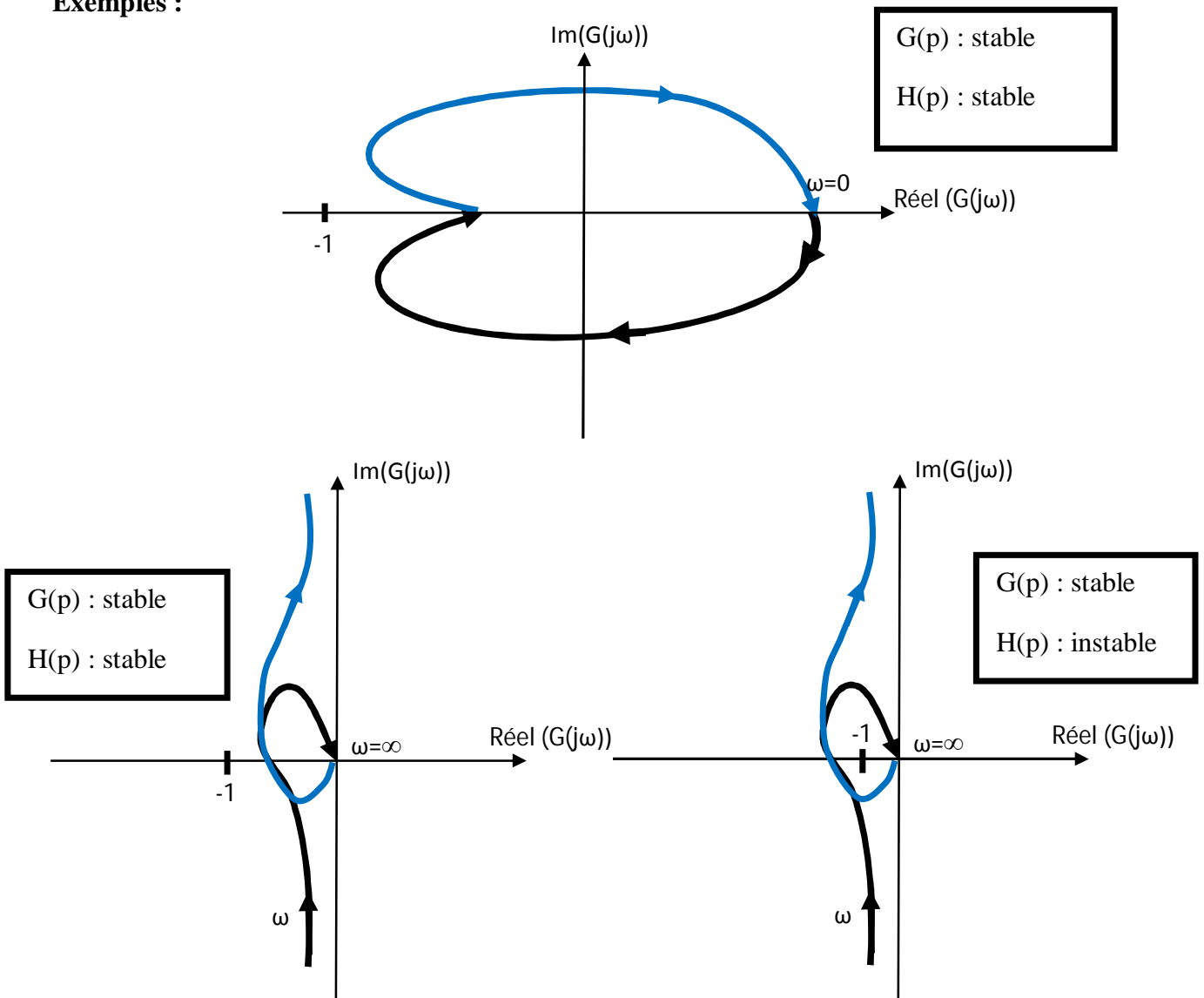
IV.1.3. cas où $G(p)$ est stable

Le critère de Nyquist se simplifie si $G(p)$ est stable. En effet dans ce cas $P=0$ et donc $Z=N=0$, alors on peut dire que pour que $H(p)$ soit stable il faut et il suffit que le diagramme de Nyquist de $G(p)$ n'encerce pas le point (-1).

Résumé :

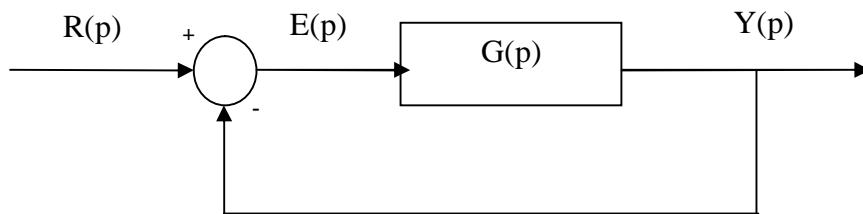


Exemples :



IV.2. la marge de stabilité

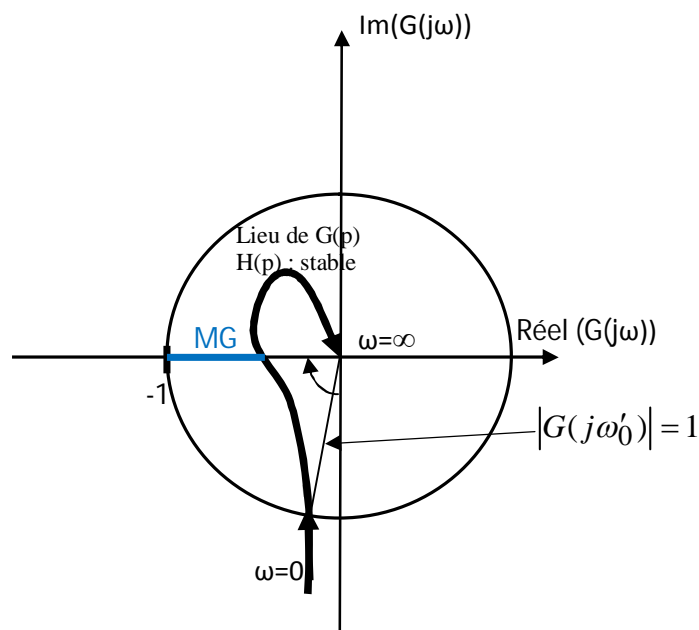
Considérons un système en boucle fermée :



$G(p)$: la fonction de transfert en boucle ouverte.

$$\frac{Y(p)}{R(p)} = H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

Et supposons $G(p)$ stable. Alors pour que $H(p)$ soit stable, nous savons qu'il faut et il suffit que : le diagramme polaire n'encercle pas le point critique (-1) (sens de rotation d'une montre)



Lorsque $H(p)$ est stable, on veut connaître **la marge de stabilité**, c.à.d. **la distance** par rapport au point critique (-1), on mesure cette marge par deux paramètres :

- Marge de gain.
- Marge de phase.

IV.2. la marge de gain (MG)

$$MG = 1 - |G(j\omega_0)| \text{ tel que } \angle G(j\omega_0) = -180^\circ$$

Pour calculer MG :

- Trouver ω_0 tel que : $\angle G(j\omega_0) = -180^\circ$
- $MG = 1 - |G(j\omega_0)|$

IV.2. la marge de phase ($M\phi$)

La marge de phase ($M\phi$) est compté positive pour les systèmes stables alors :

$$M\phi = 180^\circ + \angle G(j\omega'_0)$$

Tel que : $|G(j\omega'_0)| = 1$

On préfère définir ces marges dans le diagramme de Bode. Pour cela il faut **localiser** le point critique (-1) dans le diagramme de Bode :

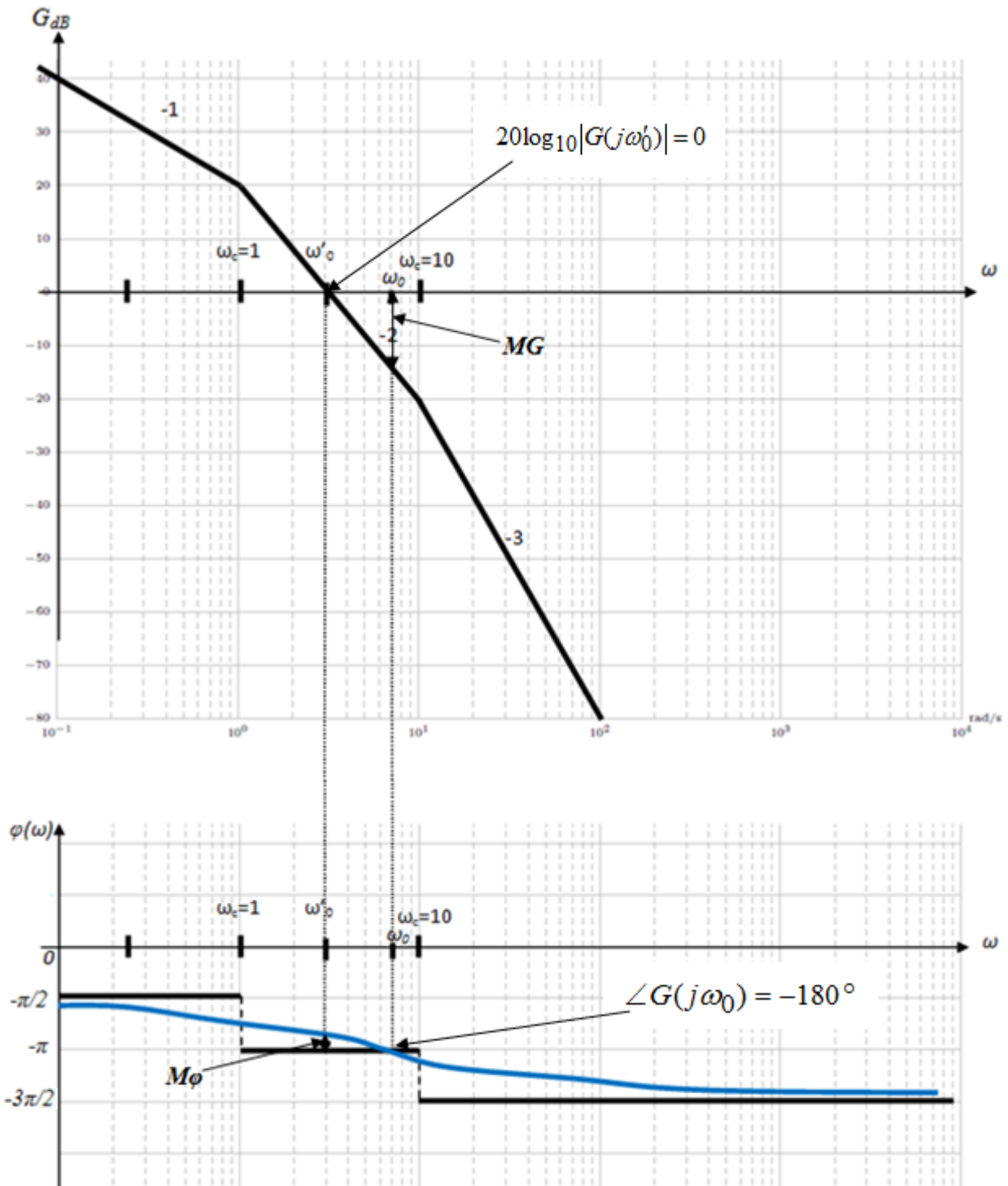
$$A = -1 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \Rightarrow 20 \log_{10} |A| = 0 \\ \angle A = -180^\circ \end{cases}$$

Ainsi la marge de gain devient :

$$MG_{dB} = -G_{dB}(\omega_0), \quad (\omega_0 / \angle G(j\omega_0) = -180^\circ)$$

Et la marge de phase :

$$M\phi = 180^\circ + \angle G(j\omega'_0), \quad (\omega'_0 / 20 \log_{10} |G(j\omega'_0)| = 0)$$



H(p) stable : $MG > 0, M_\varphi > 0$

H(p) instable : $MG < 0, M_\varphi < 0$