Probabilité : Lois normales :

I] Loi normale centrée réduite :

Déf : on dit que variable aléatoire X, suit la loi normale centrée réduite sur $\mathbb{R}$ (noté $\mathcal{N}(0,1)$) si sa densité de probabilité f est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Cela signifie que, pour tous réels a et b tels que : $a \leq b$

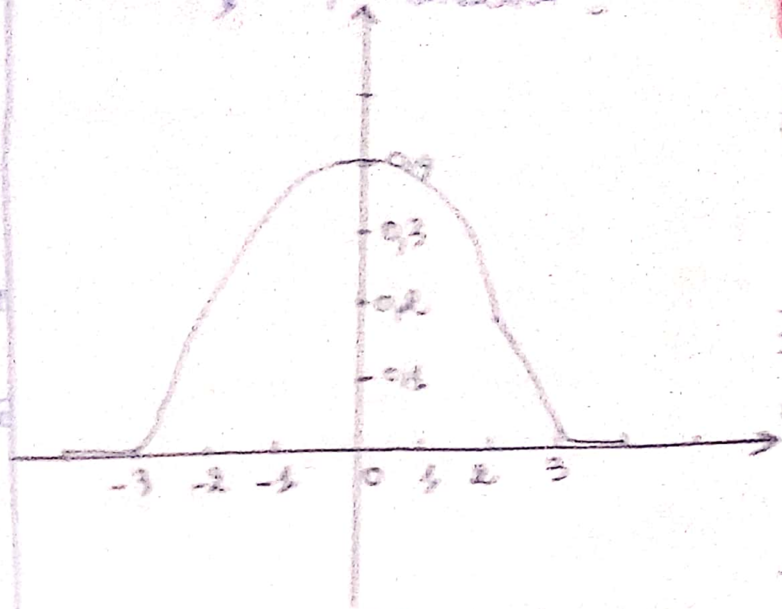
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

Remarque :

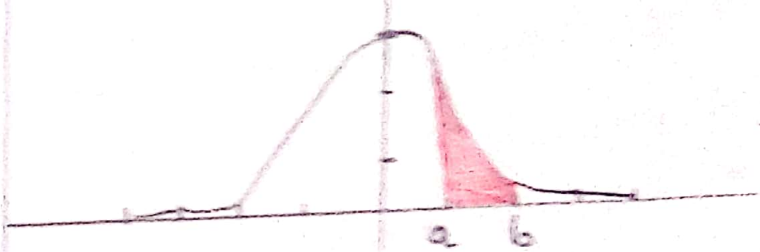
- On admet que f définit bien une densité, c'est à dire que l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f est égale à 1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\searrow$	0

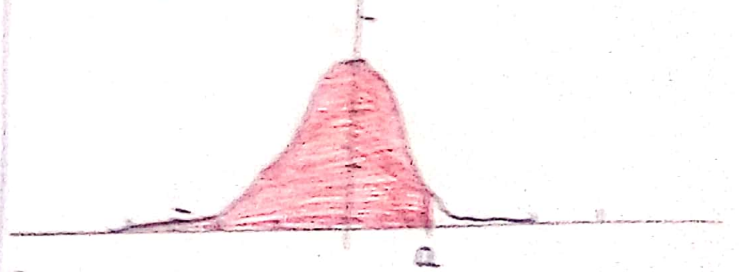
- et sa courbe représentative :



- $P(a \leq X \leq b)$ est l'aire du domaine coloré ci-dessous :



- $P(X \leq a)$ est l'aire du domaine coloré



Propriétés :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite :

① L'espérance mathématique de X, est $E(X) = 0$ (loi centrée)

② La (variance) variance de X, est $\sigma^2(X) = 1$ (loi réduite)

Propriétés:

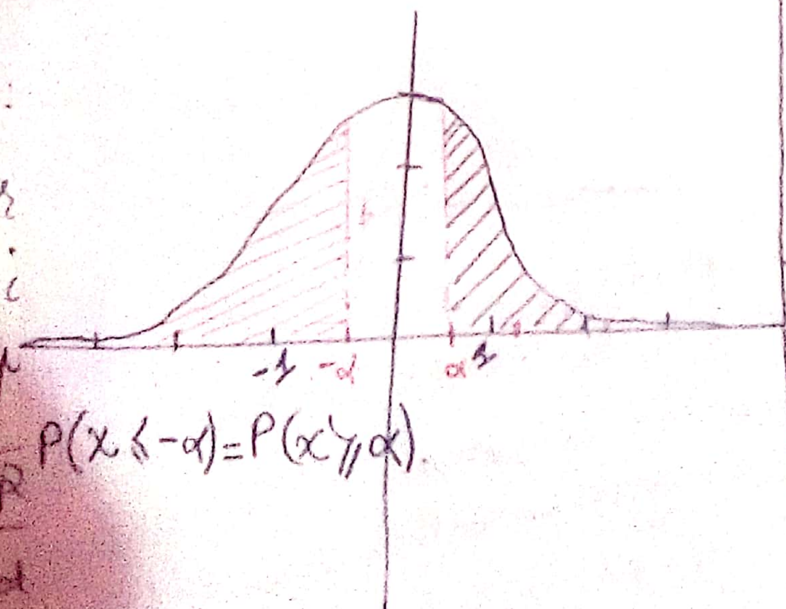
Soit X, une variable qui suit la loi normale centrée réduite et a un réel quelconque :

- $P(X \leq 0) = P(X \geq 0) = 0{,}5$.
- $P(X \leq -a) = P(X \geq a)$.
- $P(-a \leq X \leq a) = 1 - 2.P(X \geq a)$
  $= 2P(X \leq a) - 1$.

Remarque:

Ces propriétés résultent du fait que:

- La courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- L'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe est égale à 1



$P(X \leq -\alpha) = P(X \geq \alpha)$.

Propriété (Loi normale inverse):

Soit X, une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite ($X \sim N(0,1)$); un réel $K \in]0,1[$.

il existe un unique réel m_K tel que:

$P(X \leq m_K) = K$.

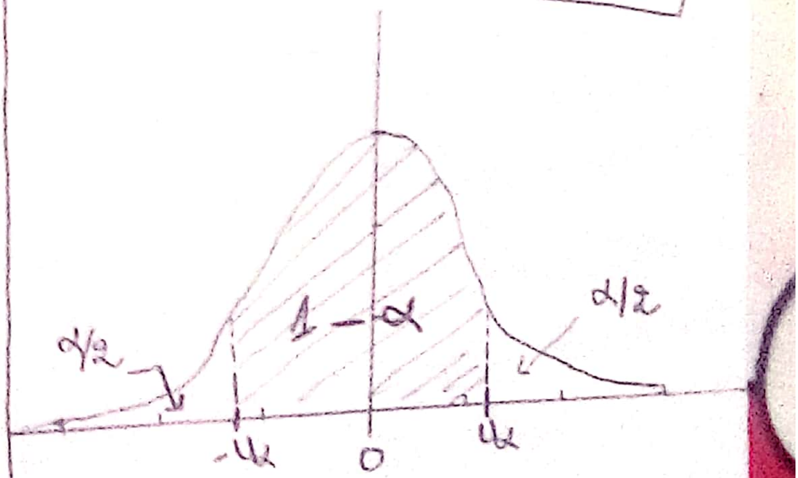
Théorème:

Soit X, une variable a. qui suit la loi normale centrée réduite ($X \sim N(0,1)$) et $\alpha \in]0,1[$.

donc:

il Existe un unique réel U_α tq:

$P(-U_\alpha \leq X \leq U_\alpha) = 1 - \alpha$.



$P(-U_\alpha \leq X \leq U_\alpha) = 1 - \alpha$.

Remarque:

En utilisant la formule:

$P(-\alpha \leq X \leq \alpha) = 2P(X \leq \alpha) - 1$

et la loi normale inverse, on peut calculer les valeurs de U_α à la calculatrice.

• Deux valeurs à retenir :

$U_{0,05} = 1,96$ (le tableau de la loi normale).

C'est à dire que : $P(-1,96 \leq X \leq 1,96) = \boxed{0,96}$

$U_{0,01} = 2,58$ c.a.d : $P(-2,58 \leq X \leq 2,58) = \boxed{0,99}$

II Loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ :

$$X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$$

Espérance $\rightarrow E(X) = \mu$

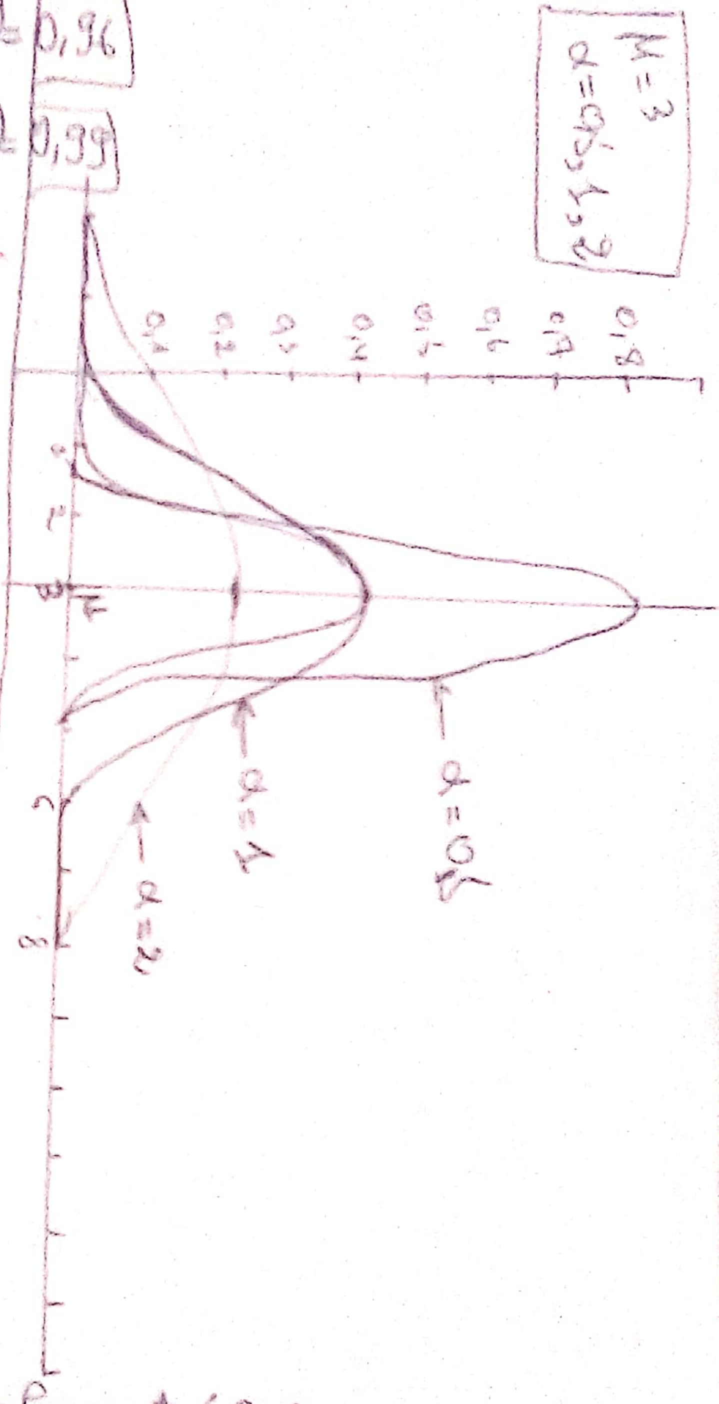
Variance $\rightarrow Var(X) = \sigma^2$

1) Définition et Théorème :

Soient deux réels μ et $\sigma > 0$.
On dit que variable aléatoire X, suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 (noté $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$) si la variable aléatoire : $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

• L'espérance mathématique de X, est μ et son écart-type σ (variance σ^2)

__Remarque__ : la courbe représentative de la distribution d'une loi $N(\mu, \sigma^2)$ est une courbe « en cloche » qui admet la droite d'équation $x = \mu$ comme axe de symétrie. Elle est plus ou moins « étirée » selon les valeurs de σ.



• Propriété (Règle des trois sigmas)
Si X suit une loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ alors :

* $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0,68$

Scanné avec CamScanner

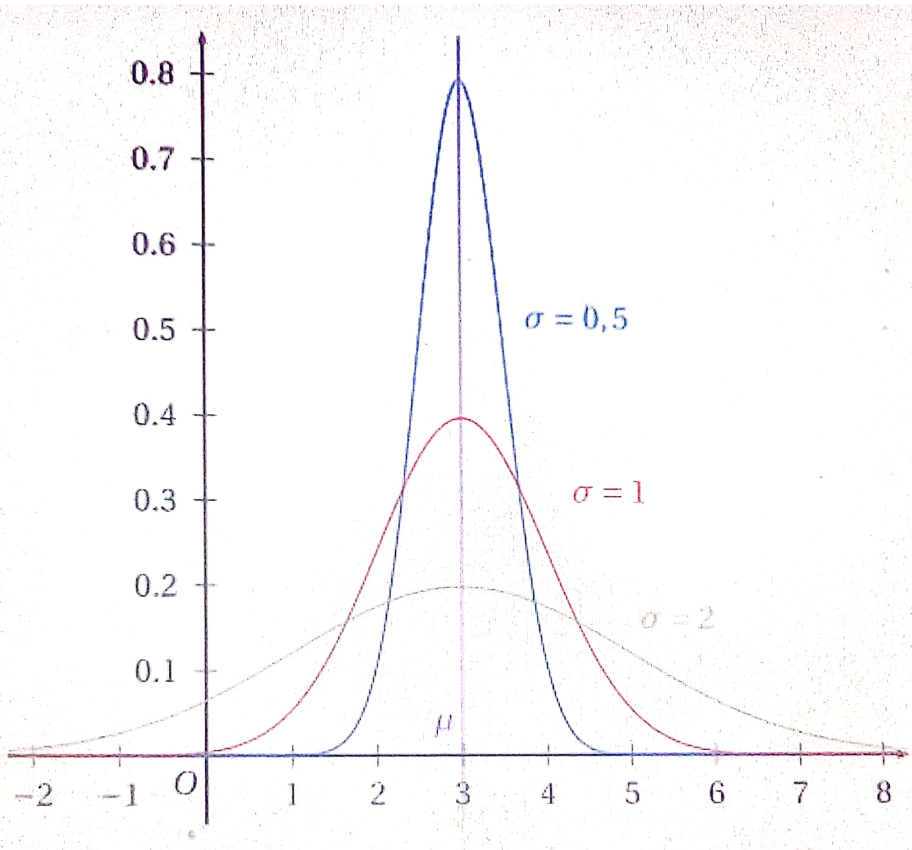
* $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \simeq 0{,}95$.

* $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \simeq 0{,}997$.

<u>Exemple:</u>

Si $X \leadsto \mathcal{N}(11, 3^2)$ alors:

$P(5 \leq X \leq 17) \simeq 0{,}95$.



$\mu = 3$ et $\sigma = 0,5 ; 1 ; 2$