Série de TD n° 03 :
" développement en série de Fourier de signaux périodiques "

Exo1 : on la fonction f périodique <u>paire</u>, de la période $T = 2\pi$, définie par : $\forall x \in [-\pi, \pi]$ $f(x) = \pi^2 - x^2$.

① trouver la Série de fourier associer à f sur $[-\pi, \pi]$.

② f est de classe C^1 par morceaux, calculer la sommes (suivant) de cet Serie.

③ déduire les sommes suivantes : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

Solution

f paire, $T = 2\pi$ alors : $\omega = \frac{\quad}{} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

$f = \pi^2 - x^2$. $\forall x \in [-\pi, \pi]$.

① la Série de fourier associer a f : $SF(f)$??

0,75 contrôl

$$\begin{cases} \cancel{b_n}\ f \text{ est paire donc :} \\ b_n = 0 \ , \forall n \geq 1 \\ a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x)\, dx. \\ a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(n\omega x)\, dx. \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x)\, dx = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right) - 0)$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{4}{3}\pi^2$$

donc : $\boxed{a_0 = \frac{4}{3}\pi^2}$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)\,dx \quad ; \text{ on a : } \omega = 1.$$

$$= \frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos(nx)\,dx}_{I \text{ نسميه}} = \frac{2}{\pi}\cdot I.$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{\pi} I} \cdots (1)$$

on calcule I en utilisant l'intégration par partie : التكامل بالتجزئة

$$\boxed{\int_a^b U.V' = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V}$$

$$I = \int_0^{\pi}\underbrace{(\pi^2 - x^2)}_{U}\underbrace{\cos(nx)}_{V'}\,dx \; ; \text{ on prendra : } \begin{cases} U = \pi^2 - x^2 ; \\ U' = -2x . \\ V' = \cos(nx) \\ V = \frac{1}{n}\sin(nx). \end{cases}$$

$$I = \left[(\pi^2 - x^2)\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{2}{\pi} x \sin(nx)\,dx.$$

(car : $\sin(n\pi) = \sin 0 = 0$)

$$I = \frac{2}{n}\underbrace{\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx}_{J \text{ نسميه}} \Rightarrow \boxed{I = \frac{2}{n} J} \cdots (2)$$

$$J = \int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$$

$$\begin{cases} U = x & ; U' = 1 \\ V' = \sin(nx) & ; V = -\frac{1}{n}\cos(nx). \end{cases}$$

$$J = \left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n}\cos(nx)\,dx.$$

$$= -\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = -\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi}$$

car ($\sin(n\pi) = \sin 0 = 0$)

$$\boxed{J = -\frac{\pi}{n}(-1)^n} \cdots (3)$$

de 1 et 2 et 3 on a : $a_n = \frac{2}{\pi} I$

$$I = \frac{2}{n} J$$

$$J = -\frac{\pi}{n}(-1)^n$$

donc : $I = \frac{2}{n} J = \frac{2}{n}\left(-\frac{\pi}{n}\right)(-1)^n = -\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n$

$$a_n = \frac{2}{\pi} I = \frac{2}{\pi} \cdot -\frac{2\pi}{n^2}(-1)^n = -\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

نعوضها: $\boxed{(-1)^1 = -}$ نضع:

$$\boxed{a_n = \frac{(-1)^1 \, 4(-1)^n}{n^2} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}}$$

alors : $SF(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\omega x)$

$$SF(f) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n \geq 1} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx). \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

2 on a $f \in C^1$ par morceaux.

f est continue sur $]-\pi, \pi[$ car : f est polynôme.

donc d'après Dirichlet la Série de fourier $SF(f)$ est convergente

et : $SF(f) = f(x_0)$ càd :

$$\frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n \geq 1} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx) = \pi^2 - x^2 \quad \ldots (*)$$

3 Calculer les Sommes :

Pour $x_0 = 0$ on applique $(*)$

Pour $x_0 = 0$:

$$\frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(0) = \pi^2 - 0^2$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \left(+\pi^2 - \frac{2}{3}\pi^2\right)\frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{12}$$

Scanné avec CamScanner

alors :

$$\boxed{\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

Pour : $x_0 = \pi$ on a :

$$\frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(n\pi) = \pi^2 - \pi^2$$

on a : $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n^2} = -\frac{2}{3}\pi^2$$

$$\Rightarrow 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{2n+1}}{n^2} = -\frac{2}{3}\pi^2$$

$$\Rightarrow -4\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = -\frac{2}{3}\pi^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\pi^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

$\boxed{C}$ on applique Parseval :

$$\underbrace{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n^2}_{\boxed{A}} = \underbrace{\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f^2\,dx}_{\boxed{B}}$$

on calcule $\boxed{A}$:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum a_n^2 = \frac{16}{9\times 2}\pi^4 + \sum \frac{16}{n^4} = \frac{8}{9}\pi^4 + 16\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

on calcule $\boxed{B}$: $B = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi^4 - 2\pi^2 x^2 + x^4)\,dx$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi^4 x - 2\pi^2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{8}{15}\pi^5$$

$$B = \frac{16}{15}\pi^4.$$

donc : A = B alors :

$$\Rightarrow 16\sum \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15}\pi^4 - \frac{8}{9}\pi^4$$

$$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^4} = \frac{8}{9}\times\frac{1}{16}\pi^4$$

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

EXO 2 : on a f periodique de Periode $T = 2\pi$ et f est impaire

$$f = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,\pi[\\ -1 & \text{si } x \in]-\pi,0[\end{cases}$$

① calculer les coefficients de Fourier

② trouver $SF(f)$.

③ déduire les sommes suivants : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2k+1)}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Solution : f impaire alors : $\begin{cases} a_n = a_0 = 0 & \forall n \geq 1. \\ b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(n\omega x)\, dx. \end{cases}$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(n\omega x)\, dx = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nx)\, dx$$

(اخترنا $f = 1$ خاطر f تاعو في $]0,\pi[$ ب 1)

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} = \frac{-2}{n\pi} (\cos(n\pi) - \cos 0).$$

$$= \frac{-2}{\pi n} ((-1)^n - 1) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n).$$

ملاحظة: باه نعرف قيمة $(1-(-1)^n)$ كي نتساوى لازم علينا نديرو هنا قيمة حسب قيم n (زوجي أم فردي).

n est paire $\Rightarrow n = 2K \Rightarrow b_n = a_{2K} = 0.$

n est impaire $\Rightarrow n = 2K+1 \Rightarrow b_n = a_{2K+1} = \frac{4}{n\pi} = \frac{4}{(2K+1)\pi}$

(عوضنا n ب $2K+1$ تاع n فردي)

$$SF(f) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(n\omega x)$$

$$\boxed{Sf = \underbrace{\sum b_n \sin}_{\text{لـ } n \text{ زوجي}} + \underbrace{\sum b_n \sin}_{\text{لـ } n \text{ فردي}}}$$

$$= \sum_{n\geq 1} b_n \sin(n\omega x) + \sum_{n\geq 1} b_n \sin(n\omega x)$$

(تاع $b_n = 0$ لأن n est paire)

$$b_n = \sum_{k\geq 0} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x).$$

$$\boxed{SF(f) = \frac{4}{\pi} \sum_{k\geq 0} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}}$$

3] la somme de $SF(f)$.

d'après Dirichelet : on a : f est périodique de C^1 par morceaux sur $]-\pi,\pi[$ ~~donc~~ et f est continue sur $]-\pi,\pi[$

donc : $SF(f)$ est convergente et :

$$\boxed{SF(f(x_0)) = f(x_0)}$$

4] calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = ?$ et : $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = ??$:

A]

$$SF(f) = \frac{4}{\pi} \sum \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

on choisit : $x_0 = \frac{\pi}{2}$ donc $\sin((2k+1)\pi/2)) = (-1)^k$

($x_0 = \frac{\pi}{2}$ نقطة استمرارية) إذن :

$$SF(f(x_0)) = f(x_0).$$

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 \Rightarrow \boxed{\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$$

B] $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = ?$

on applique parseval : f impaire donc :

$$\underbrace{\sum b_n^2}_{A} = \underbrace{\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f^2(x)\, dx}_{B}.$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est paire } (n = 2k) \\ \dfrac{4}{(2k+1)\pi} & \text{si } n \text{ est impaire } (n = 2k+1) \end{cases}$$

On calcule $\boxed{A}$:

$$\sum_{n \geq 1} b_n^2 = \underbrace{\sum_{n \geq 1} b_n^2}_{(n \text{ pair})} + \underbrace{\sum_{n \geq 1} b_n^2}_{(n \text{ impair})} = \sum_{k \geq 0} \frac{16}{\pi^2 (2k+1)^2}$$

$$= \frac{16}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

On calcule maintenant $\boxed{B}$:

$$\frac{4}{T} \int_0^{T/2} f^2(x)\, dx = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} 1\, dx = \frac{4}{2\pi} [x]_0^{\pi} = 2.$$

$$\frac{16}{\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = 2.$$

alors : $$\boxed{\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

EXO 3 : Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par : $f(x) = |x|$. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

Solution : on f est paire donc :

$$\begin{cases} b_n = 0 \quad \forall n \geq 0 \\ a_0 = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_0^{T/2} f(x)\, dx \\ a_n = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_0^{T/2} f(x) \cos(n\omega x)\, dx \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} - 0\right] = \pi/2.$$

$$\boxed{a_0 = \frac{\pi}{2}}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{n^2\pi}(\cos(n\pi) - 1)$$

باستعمال تكامل بالتجزئة

on a: $\boxed{\cos(n\pi) = (-1)^n}$ donc:

si: n est paire $\Rightarrow n = 2k$ alors: $\cos(n\pi) = (-1)^{2k} = 1$ alors:

$a_n = 0$.

si: n est impaire $\Rightarrow n = 2k+1$ alors: $\cos(n\pi) = (-1)^{2k+1} = -1$.

donc: $a_n = \frac{2}{(2k+1)^2\pi} \times (-2). = \frac{-4}{(2k+1)^2\pi}$.

et la Série de Fourier est:

$$SF(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(n\omega x).$$

$$\boxed{SF(f) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{\cos((2n+1))x)}{(2n+1)^2}} \ldots (*).$$

on a: f est de C^1 par morceaux et f est continue sur $]-\pi,\pi[$.

donc $SF(f)$ est convergente et $\boxed{SF(f(x_0)) = f(x_0)}$ d'après dirichlet. $(*)$

on calcule $\sum \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} = ??$:

on choisir $x_0 = 0$ donc on remplace dans $(*)$ on trouve :

$SF(f(0)) = f(0)$ $\qquad f(0)=0.$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{\cos((2n+1)0)}{(2n+1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{-4}{\pi}\sum \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{-\pi}{2}.$$

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

calcule $\sum \frac{1}{(2n+1)^4} = ?$: on applique parseval on trouve :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum a_n^2(x) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)^2\,dx.$$

$$\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)^2\,dx = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum a_n^2 = \frac{\pi^2}{4} + \sum \frac{-4}{(2k+1)^4\pi} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{1}{(2k+1)^4} \quad (2)$$

de (1) et (2) on a : $\frac{\pi^2}{4} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{1}{(2k+1)^4} = \pi/2.$

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$$