Résumé sur les séries numériques :

$\sum_1 U_n$ est une série numérique : c'est la somme de plusieurs termes de suites i.e : $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots$

La nature d'une série numérique :

$\sum_{n \geq 0} U_n = U_0 + U_1 + \cdots$ { nombre ⇒ la série convergente متقاربة ; ∞ ⇒ la série divergente متباعدة }

Exemple :

$\sum_{n \geq 0} 2 = 2 + 2 + 2 + \cdots = +\infty \Rightarrow \sum_1 2$ est une série divergente.

$\sum_{n \geq 0} -5 = -5 -5 -5 \cdots = -\infty \Rightarrow \sum_1 -5$ // // //

$\sum_{n \geq 0} 0 = 0 + 0 + \cdots = 0 \Rightarrow \sum_1 0$ // // convergente.

Le théorème de l'hospital :

pour calculer une limite difficile tq : " $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$ " d'après l'hospital on a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{f}{g} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'}{g'}$

La somme de deux série numérique : $\sum_1 (U_n + V_n) = \sum_1 V_n + \sum_1 U_n$

- $\sum_1 U_n$ est convergente + $\sum_1 V_n$ convergente ⇒ $\sum_1 (U_n + V_n)$ est convergente.
- $\sum_1 U_n$ est divergente et $\sum_1 V_n$ est convergente ⇒ $\sum_1 (U_n + V_n)$ est divergente.
- $\sum_1 U_n$ est divergente et $\sum_1 V_n$ est divergente ⇒ on peut pas dire ([illegible])

Exemples: $\sum_1 \left(n^2 + \frac{1}{n^3}\right)$

• $\sum_1 n^2$ est une Série de Rimène avec $\left(\sum_1 \frac{1}{n^{-2}}\right)$ tq : $\alpha = -2 < 1$

donc : $\sum_1 n^2$ divergente. — (1)

• $\sum_1 \frac{1}{n^3}$ est Série de Rimène avec : $\alpha = 3 > 1$ donc : $\sum_1 \frac{1}{n^3}$ est

convergente — (2)

d'après (1) et (2) : $\sum_1 \left(n^2 + \frac{1}{n^3}\right)$ est divergente.

la nature des Séries Rimène et les séries geométriques :

Séries geométrique :	Série de Rimène :
$\sum_1 (q)^n$: مثال	$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$: مثال
si : $q \in]-1, 1[\Rightarrow \sum_1 (q)^n$ est convergente	si : $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_1 \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.
si : $q \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[\Rightarrow \sum_1 (q)^n$ est divergente.	si : $\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum_1 \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

Exemples:

• $\sum_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n$: est une Série géométrique avec : $q = \frac{1}{2} \in [-1, 1] \Rightarrow \sum_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente.

• $\sum_1 \frac{(5)^n}{(2)^n} = \sum_1 \left(\frac{5}{2}\right)^n$ est série géométrique avec : $q = \frac{5}{2}$ donc : divergente

Exemples :

• $\sum_1 \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = +\infty$.

$\sum_1 \frac{1}{n}$ est Série de Rimène avec $\alpha = 1 \leq 1$ donc : $\sum_1 \frac{1}{n}$ est divergente.

• $\sum_1 n^4 = \sum_1 \frac{1}{n^{-4}}$ Série de Rimène $(\alpha < 1) \Rightarrow$ divergente.

2

La condition nécessaire de la convergence (CNC) :

si : $\lim_{n \to +\infty} U_n \neq 0 \Rightarrow \sum U_n$ est divergente et : $\sum U_n = \infty$

<u>Remarque</u> : si $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0 \Rightarrow$ on peut dire rien ($g \to$ تديك)

<u>Exemple</u> :

$\sum_{n \geq 1} \ln n$

$\lim_{n \to +\infty} \ln n = +\infty \neq 0 \Rightarrow$ d'après CNC est divergente.

<u>Définition</u> :

si : le terme général $U_n \geq 0$ on dit que : $\sum U_n$ est à termes positives.

si : le terme général U_n (   ) on dit que : $\sum U_n$ est une série quelconque

(I) les séries à termes positives :

Pour étudier les natures (la convergence) d'une série à termes positives, il y a quelque méthodes :

- l'équivalence (تكافؤ)
- la comparaison (مقارنة)
- d'Alembert (!) نستعملها في حالة العاملي
- cauchy (نستعمله كي نشوف الحالات أسية : $\ldots\ \frac{1}{x^n}, n^n, 2^n$)

Si $\sum_1 U_n$ est série à termes positives

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to+\infty} (U_n)^{1/n} = K$$

si : $K < 1 \Rightarrow \sum_1 U_n$ est convergente.

si : $K > 1 \Rightarrow \sum_1 U_n$ divergente

si : $K = 1$: on peut dire rien

(لا يمكن الحكم)

Exemple : $\sum_1 \frac{1}{5^n + n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5^n + n}\right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(5^n\left(1+\frac{n}{5^n}\right)\right)^{1/n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5\left(1+\frac{n}{5^n}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

on calcule :

$$\lim \frac{n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n\ln 5}} \overset{\text{l'hospital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\ln 5)\, e^{n\ln 5}}$$

donc : $\lim \left(1 + \frac{n}{5^n}\right)^{1/n} = 1^0 = 1$

$\lim \sqrt[n]{U_n} = 1/5 < 1 \Rightarrow \sum U_n$ Convergente

D'Alembert (!)

Si $\sum_1 U_n$ série à termes positives

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = K.$$

si : $K < 1 \Rightarrow \sum_1 U_n$ est convergente.

si : $K > 1 \Rightarrow$ // // divergente

$K = 1 \Rightarrow$ on peut dire rien.

(لا يمكن الحكم على طبيعة السلسلة)

Exemple : étudier la nature de :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{(2n)!}.$$

on a : la série est à termes positives

on applique D'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{n^n}.$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \times \frac{(2n)!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n (2n+2)(2n+1)}$$

$$= \lim \frac{(n+1)^n (n+1)}{n^n \cdot 2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{}$$

suite de D'Alembert

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{2(2n+1)}$$

$$\lim \frac{2n+1}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e^1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2(2n+1)}}_{0}$$

$$\boxed{\text{car : } \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a}$$

$$= e^1 \cdot 0 = 0 < 1$$

donc : $\sum \frac{n^n}{(2n)!}$ est convergente.

نهاية شهيرة $\rightarrow$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a}$

• U_n و V_n سلسلتين موجبتين (à termes positives)

التكافؤ ← équivalence

حالات خاصة نستعمل فيها:

• $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}$

• $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n}$

• $\frac{\text{كثير حدود}}{\text{كثير حدود}} \approx \frac{\text{الأكبر أس}}{\text{الأكبر أس}}$

كمحدد:

$U_n \simeq V_n$

نحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n} = K$

$K \in]0, \infty[$ ← U_n لها نفس طبيعة V_n

كذلك $K = 0$ و V_n متقاربة
⇓
$\sum U_n$ متقاربة

① كذلك $K = \infty$
② $\sum V_n$ متباعدة
⇓
$\sum U_n$ متباعدة

مقارنة ← comparison

حالات عادة نستعمل فيها:

$\ln n \le n$ ، $e^{-n} = \frac{1}{e^n} \le 1$

$\cos^2 n$ و $\sin^2 n$ ، $|\cos n| \le 1$

$|\sin n| \le 1$

حالة ①

$\begin{cases} U_n \le V_n \\ + \\ V_n \text{ متقاربة} \end{cases}$

⇓

$\sum U_n$ متقاربة

حالة ②

$\begin{cases} U_n \ge V_n \\ + \\ V_n \text{ متباعدة} \end{cases}$

⇓

$\sum U_n$ متباعدة

ملاحظة مهمة: V_n عادة ما تكون سلاسل مرجعية:

$\sum V_n$

هندسية $\sum q^n$ ؛ ريمان $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

متقاربة إذا $q \in]-1, 1[$ ؛ متباعدة إذا ...

متقاربة إذا $\alpha > 1$ ...

II les séries numériques quelconque

1 Les séries alternatives : (alg (n))

qui sont cas spécialiser des séries numériques quelconque.

On dit que $\sum_1 U_n$ est alternative si elle est sur la forme suivantes

$$\boxed{\sum_1 U_n = (-1)^n v_n}$$

$$\sum_1 U_n = \sum_1 (-1)^n \cdot v_n = v_0 - v_1 + v_2 - v_3 \dots$$

pour étudier une série alternative, il y a une methode s'appelée :

"Liebinz" : on a : $\sum (-1)^n v_n$ série alternative si :

① $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$

et

② v_n suit décroissante ↘ i.e : $v_{n+1} - v_n \leq 0$

si ① et ② sont vérifier on dit que :

$\sum_1 (-1)^n v_n$ est convergente

• Exemple étudier : $\sum_1 \frac{(-1)^n}{n}$.

la série $\sum_1 \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternative

tq : $v_n = \frac{1}{n}$

(قابلة)

donc : on peut appliqué "Liebinz"

① $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$.

② $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$= \frac{n - n - 1}{(n+1)(n)}$

$= \frac{-1}{(n+1)(n)} < 0$

donc : v_n est décroissante.

d'après ① et ② :

$\sum_1 \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

• la série quelconque :

est une série n'est ~~pas~~ positive, n'est négative.

Exemples sur les séries qlq :

$\sum_1 \frac{\sin}{n\sqrt{n}}$, $\sum_1 \frac{\cos n}{n^2}$

$\sum_1 \frac{(-1)^n}{(n+1)}$, $\sum_1 \frac{\cos(n\pi)}{n}$

pour étudier une série qlq, on peut appliquer : le Théorème de la convergence absolue

Critère de la convergence absolue.

si : $\sum |U_n|$ est convergente $\Rightarrow$ $\sum U_n$ est convergente.

Rq : si $\sum U_n$ est convergente $\not\Rightarrow$ $\sum |U_n|$ est convergente

"العكس غير صحيح"

Ex : étudier $\sum \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$.

$\sin(n) \rightarrow$ le signe de $\sin$ est quelconque.

donc : $\sum \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ est qlq.

on applique la convergence absolue :

$\left|\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right| = \frac{|\sin(n)|}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^{3/2}} = V_n$

$\sum V_n$ est S. de Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ convergente alors :

$\left|\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right|$ est convergente et d'après la convergence absolue : $\sum \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ est convergente.

Ce cas est nous utilisons la convergence absolue si on trouve dans la série : $\cos n$, $\sin n$, $\cos n\pi$, $(-1)^n$

END

Critère de la convergence absolue :

si : $\sum |U_n|$ est convergente $\Rightarrow$ $\sum U_n$ est convergente.

Les cas qui nous utilisons la convergence absolue :

si on : trouve dans la série : $\cos n$, $\sin n$, $\cos n\pi$, $(-1)^n$

Rq : si $\sum U_n$ est convergente $\not\Rightarrow$ $\sum |U_n|$ est convergente.

"الشرط غير كافي"

Ex : étudier $\sum \dfrac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$

$\sin(n) \rightarrow$ le signe de $\sin$ est quelconque.

donc : $\sum \dfrac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ est qlq.

on applique la convergence absolue

$$\left|\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right| = \frac{|\sin(n)|}{n\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}} = V_n$$

$\sum V_n$ est S de Riemann $\alpha = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ convergente abs :

$\left|\dfrac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right|$ est convergente et d'après la convergence absolue : $\sum \dfrac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ est convergente abs [illegible]

END

Ex 1 : Etudier les séries (la nature) suivantes :

a) En utilisant la condition nécessaire de convergence : CNC.

① $\sum_{n\geq 1} \ln(n)$ ② $\sum_{n\geq 1} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ ③ $\sum_{n\geq 1} \left(n e^{1/n} - n\right)$.

b) En utilisant la comparaison ou l'équivalence :

① $\sum \frac{2n-1}{n(n^2+4)}$

③ $\sum_{n\geq 2} \ln\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)$

④ $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$

② $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{\left(\sqrt{n+3}\right)^3}$ conv

⑤ $\sum_{n\geq 0} \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

c) En utilisant D'Alembert ou Cauchy :

① $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(2n)!}$ ③ $\sum_{n\geq 0} n e^{-n}$ conv

② $\sum_{n\geq 1} \frac{1+n^2}{n!}$ conv

④ $\sum_{n\geq 2} \frac{n^{1/n}}{(\ln n)^n}$ Cauchy $= 0 \to$ conv.

Ex : Etudier la convergence de séries suivantes :

① $\sum \frac{n+1}{n^2+n+1}$ ② $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{(-1)^n}{2^n} + 3n\right)$ ③ $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{1+4^n}$

④ $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}$ ⑤ $\frac{1}{n \cos^2(n)}$; $\frac{3^n}{1+4^n} \leq \frac{3^n}{4^n}$

Ex 2 : Etudier les séries (la convergence) de séries suivantes

① $\frac{\cos(n\pi)}{n^2}$ ② $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^3}{n!}$

③ $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

$f' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}\right)$

Série de TD n° 02

Exo 1 : CNC :

• $\sum \ln(x)$

$u_n = \ln(x)$

$\lim u_n = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \neq 0$

donc d'après CNC la série est divergente

• $\sum n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

$\lim n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ on fait changement de variable pour calculer la limite facilement :

$$\begin{cases} x = 1/n \Rightarrow n = 1/x \\ n \to +\infty \Rightarrow x \to 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \sin x \xrightarrow[\text{de l'hospital}]{\text{Theorème}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \sum n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est divergente

et $\sum n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \infty$

• $\sum \left(n e^{1/n} - n\right)$

on applique CNC :

$\lim\limits_{x \to 0} \left(n e^{1/n} - n\right) = +\infty - \infty$ (F.I)

donc pour calculer la limite facilement on fait changement de variable :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{x} \\ n \to +\infty \Rightarrow x \to 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n e^{1/n} - n\right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

[illegible] hospital

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1 \neq 0$

donc d'après CNC :

$\sum \left(n e^{1/n} - n\right) = \infty$ et la série $\left(n e^{1/n} - n\right)$ est divergente.

Exo 2 : l'équivalence et la comparaison.

$$\boxed{\text{شرط كافي : حالة ما نستعمل [illegible]} \quad \sum u_n > 0 \longrightarrow \text{السلاسل موجبة}}$$

• $\sum \frac{2n - 1}{n(n^2 - 4)} \to$ polynome, donc on utilise l'équivalence

$\sum \frac{2n - 1}{n(n^2 - 4)} > 0$ (positive [illegible])

$u_n = \frac{2n - 1}{n(n^2 - 4)} \sim \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$ [illegible]

[illegible]

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2n-3}{n(n^2+4)}}{2/n^2}$$

$= 1 \in]0, +\infty[$

donc: $\sum_1 U_n$ a la meme nature

de $\sum_1 V_n$

et on a: $\sum_1 V_n = \sum_1 \frac{2}{n^2} = 2 \sum_1 \frac{1}{n^2}$

est Série de Rimmane $\alpha = 2 > 1$

donc $\sum_1 V_n$ est convergente $\Rightarrow$

$\sum_1 U_n$ est convergente

- $\sum_1 \frac{\sin^2}{(\sqrt{n+3})^3} = \sum_1 U_n$

on a la serie est positive on utilise la comparaison

on a: $\sin^2 \leq 1$

$\Rightarrow n+3 > n \Rightarrow \frac{1}{n+3} < \frac{1}{n}$

B $\Rightarrow \boxed{\frac{1}{(n+3)^{3/2}} < \frac{1}{n^{3/2}}}$

donc on a:

- $\sin^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{\sin^2}{(n+3)^{3/2}} \leq \frac{1}{(n+3)^{3/2}}$

et de B on a:

$$\frac{\sin^2}{(n+3)^{3/2}} \leq \frac{1}{(n+3)^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

[illegible] $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ [illegible]

donc: $U_n = \frac{\sin^2}{(n+1)^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}} = V_n$

et on a aussi:

$V_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ est Série de Rimmène

avec: $\alpha = 3/2 > 1$ donc: $\sum_1 V_n$

est convergente donc $\sum_1 U_n$ est

convergente

- $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$

on a: $\sum_1 \frac{1}{\ln(n)}$ est Série positive

et on a d'après le cour:

$\ln n < n$

$U_n = \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} = V_n$

$\sum_1 \frac{1}{n}$ est Série de Rimmène avec

$\alpha = 1$ donc $\sum_1 V_n$ est divergente

donc: $\sum_1 \frac{1}{\ln n}$ est divergente

- $\sum_{n\geq 2} \ln\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)$

on a: $\sum_1 \ln\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right)$ est positive

on utilise l'équivalence.

$U_n = \ln\left(\frac{n^3+1}{n^3}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$

$\simeq \frac{1}{n^3} = V_n$

donc :

$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{1/n^3}$

on fait changement de var :

$\begin{cases} \frac{1}{n^3} = x \\ n \mapsto +\infty \Rightarrow x \mapsto 0 \end{cases}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

<u>hospi</u> $\lim_{x\to 0} \frac{1/1+x}{1} = 1 \in]0,+\infty[$

donc : $\sum_1 U_n$ a la meme nature de $\sum_1 V_n$.

$\sum_1 V_n = \sum_1 \frac{1}{n^3}$ est S de Rimène

$\alpha = 3 > 1$ donc $\sum_1 V_n$ convergente

donc $\sum_1 U_n$ est convergente.

• $\sum_1 \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

la Série est positive ($\forall U_n > 0$)

on applique l'equivalence :

$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \simeq \frac{1}{n^2}$ (négligeable)

$\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \simeq \sqrt{n}\,\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{1/2}}\frac{1}{n}$

donc :

$\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \simeq \frac{1}{n^{3/2}} = V_n$

donc :

$\lim \frac{U_n}{V_n} = \frac{\lim \cancel{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n}\,1/n^2}$

$= \lim \frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2}$

$= 1 \in]0,+\infty[$.

$\sum_1 U_n$ a la même nature de $\sum_1 V_n$.

$\sum_1 V_n = \sum_1 \frac{1}{n^{3/2}}$ est une S de Rimène $\alpha = 3/2 > 1$ donc : $\sum_1 V_n$ convergente alors :

$\sum_1 U_n$ est convergente.

Exo 3 : D'Alembert et Cauchy

• $\sum_1 \frac{n^3}{n!}$

Série à terme positive donc

on applique D'Alembert

$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}}$

$\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{n^3}$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{1/n^3}$$

on fait changement de var :

$\begin{cases} \frac{1}{n^3} = x \\ n \to +\infty \Rightarrow x \to 0 \end{cases}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Hôpital $\lim_{x\to 0} \frac{1/1+x}{1} = 1 \in]0,+\infty[$

donc : $\sum_1 U_n$ a la meme nature de $\sum_1 V_n$.

$\sum_1 V_n = \sum_1 \frac{1}{n^3}$ est S de Riemann

$\alpha = 3 > 1$ donc : $\sum_1 V_n$ convergente

donc : $\sum_1 U_n$ est convergente.

• $\sum_1 \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

La Série est positive ($U_n > 0$)

on applique l'equivalence :

$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$

$\sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \sqrt{n}\,\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$

donc :

$\sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \simeq \frac{1}{n^{3/2}} = V_n$

donc :

$$\lim \frac{U_n}{V_n} = \lim \frac{\sqrt{n} \sin(1/n^2)}{\sqrt{n}\; 1/n^2}$$

$$= \lim \frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2}$$

$= 1 \in]0,+\infty[$.

$\sum_1 U_n$ a la même nature de $\sum_1 V_n$.

$\sum_1 V_n = \sum_1 \frac{1}{n^{3/2}}$ est une S de Riemann $\alpha = 3/2 > 1$ donc : $\sum_1 V_n$ convergente alors :

$\sum_1 U_n$ est convergente.

Exo 3 : D'Alembert et Cauchy :

• $\sum_1 \frac{n^2}{n!}$

Serie à terme positive donc

Critère 0,25

on applique : D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}$$

$(n+1)!$

on a : $(n+1)! = (n+1)n!$

$$= \frac{(n+1)^3}{(n+1)n!} \times \frac{n!}{n^3} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)n^3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1+2n}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty}$$

$$= 0 < 1$$

donc : $\sum_1 \frac{n^3}{n!}$ est convergente d'après D'Alembert.

EXO3 D'Alembert et cauchy :

- $\sum_1 \frac{n!}{(2n)!}$

$\sum_1 \frac{n!}{(2n)!}$ est une série positive

on applique D'Alembert :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{n!}{(2n)!}}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{n!}$$

$(n+1)! = (n+1)n!$

$(n+2)! = (n+2)\cdot(n+1)!$

$(n+2)! = (n+2)(n+1)(n)!$

⋮

- $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$
- $(n+1)! = (n+1)n!$

donc :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)n!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \times \frac{(2n)!}{n!}$$

$$= \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \frac{n+1}{4n^2+2n+4n+2}$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n^2+2n+4n+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} = \frac{1}{\infty}$$

$$= 0 < 1$$

$\sum_1 U_n$ est convergente d'après d'Alembert.

• $\sum_1 n e^{-n}$

• $\sum_1 n e^{-n}$ est une Séries positives (à terme positives)

on applique Cauchy :

$$\sqrt[n]{U_n} = (U_n)^{1/n} = (n e^{-n})^{1/n}$$

$$= n^{1/n} e^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (U_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{-1} \cdot n^{1/n} = ?$$

il faut d'abord calculer :

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{1/n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{0}$$

$$= 1$$

donc : $\lim_{n\to\infty} (U_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{-1} \cdot n^{1/n}$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{-1} \cdot 1$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

donc $\sum_1 U_n$ est convergente

• $\sum_{n\geq 1} \frac{1+n^2}{n!}$

$\sum_1 \frac{1+n^2}{n!}$ est à termes positives.

on applique D'Alembert :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1+(n+1)^2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{1+n^2}$$

$$= \frac{(1+n^2+1+2n) \times \cancel{n!}}{(n+1)\,\cancel{n!}\,(1+n^2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+2}{(n^2+1)(n+1)}$$

donc : $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{n^3+n^2+n+1}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty}$$

$$= 0 < 1$$

donc $\sum_1 U_n$ est convergente

• $\sum_1 \frac{n^{1/n}}{(\ln n)^n}$

$\sum_1 U_n$ est Série à termes positives

on applique Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} (U_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n^2}}{\ln n} = ?$$

On calcule d'abord :

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{1/n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{0} = 1.$$

donc :

$$\lim (U_n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n^2}}{\ln n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0 < 1.$$

donc : $\sum_1 U_n$ est convergente.

Ex 04 : étudier la convergence des séries suivantes :

① $\sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n^3+2n+1}$

la série est positive donc

on applique l'équivalence :

$$U_n = \frac{n+1}{n^3+2n+1} \simeq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} = V_n$$

On a : $\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^3+2n+1}}{1/n^2}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^3+2n+1} \times n^2 = \lim \frac{n^3+n^2}{n^3+2n+1}$$

$$= \lim \frac{n^3}{n^3} = 1$$

$1 \in]0,+\infty[\Rightarrow \sum_1 U_n$ et V_n ont la même nature.

On a : $\sum_1 V_n = \sum_1 1/n^2$ est S de Riemann $\alpha = 2 > 1$

donc : $\sum_1 V_n$ est convergente alors U_n est conv

② $\sum_1 \frac{1}{n \cos^2(n)}$ (la série à termes positives)

on utilise la comparaison :

on a : $\cos^2 n < 1$

donc : $n \cos^2 n < n$

$$U_n = \frac{1}{n \cos^2 n} > \frac{1}{n} = V_n$$

On a : $\sum_1 V_n = \sum_1 \frac{1}{n}$ est série de Riemann avec : $\alpha = 1$ donc est divergente

donc : par Comparaison

$\sum_1 U_n$ est divergente

en termes positives

on applique la d'Alembert:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^3} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)n!} \times \frac{n!}{n^3}$$

$$= \frac{(n+1)^3}{n^3(n+1)}$$

donc: $\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim \frac{n^3}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$0 < 1 \Rightarrow \sum_1 U_n$ est convergente

EX 02 étudier les séries suivantes:

- $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$

méthode 1

$\boxed{\cos(n\pi) = (-1)^n}$

la série est alternative donc:

on utilise Leibniz th:

$v_n = \frac{1}{n^2}$

on a:

(1) $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

(2) on a:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{n^2 - (\cancel{n}+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^2 - n^2 - 1 - 2n}{n^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{-(2n+1)}{\underbrace{n^2}_{>0}\underbrace{(n+1)^2}_{>0}} < 0.$$

alors: v_n est $\searrow$ (décroissante).

méthode 2 on utilise:

la convergence absolue:

$\boxed{\text{si } |\sum_1 U_n| \text{ est cov} \Rightarrow \sum_1 U_n \text{ est cov}}$

- $\cos(n\pi) = (-1)^n$
- $|(-1)^n| = |\cos(n\pi)| = 1$

donc: on va voir esq:

$\left|\sum_1 \frac{\cos(n\pi)}{n^2}\right|$ est convergente??

$$\sum_1 \left|\frac{\cos(n\pi)}{n^2}\right| = \sum_1 \frac{1}{|n^2|} = \sum_1 \frac{1}{n^2}.$$

et on a:

$\sum_1 \frac{1}{n^2}$ est série de Riemann avec

$\alpha = 2 > 1$ donc: $\sum_1 \frac{1}{n^2}$ est

convergente càd: $\left|\sum_1 \frac{\cos(n\pi)}{n^2}\right|$

est convergente

d'après la convergence absolue

$\sum_1 \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$ est convergente

$\bullet \frac{(-1)^n}{n!}$

on applique la convergence absolue:
car la série est quelconque (réel)

$$\left|\sum_1 (-1)^n \frac{n^3}{n!}\right| = \sum_1 \left|(-1)^n \frac{n^3}{n!}\right|$$

$$= \sum_1 \frac{n^3}{n!}$$

donc: la série $\sum_1 \frac{n^3}{n!}$ on a déja étudier dans l'Exo précédent et $\sum_1 \frac{n^3}{n!}$ est convergente donc: $\left|\sum_1 (-1)^n \frac{n^3}{n!}\right|$ est convergente.

d'après la convergence absolue; on déduire que:

$\sum_1 (-1)^n \frac{n^3}{n!}$ est convergente.

$$\sum_1 (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Séries alternative (Leibniz)

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

on applique alors Leibniz:

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

• v_n est $\searrow$??

on a:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}\right)$$

Remarque:

Un est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ pour montrée Un $\searrow$ en formée $f(x)$ que la même expression que Un par Exemple

$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

et on montre que $f \searrow$ par le calcul de dérivée, c'est plus simple.

On a: $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$ (car la fonction $\sqrt{x}$ est croissante)

$\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$ (décroissante) sur $]0, +\infty[$

donc v_n est décroissant $\searrow$

et d'après Leibniz

la Série est convergente

[illegible]

- $\sum_1 \left(\frac{(-1)^n}{2^n} + 3n\right)$

la Somme de 2 Séries

- Conv + Conv $\Rightarrow \sum_1 \to$ Conv
- conv + dive $\Rightarrow \sum_1$ est dive.
- dive + dive $\Rightarrow$ (لا يمكن الحكم) on peut dire rien.

alors:

(1) $\sum_1 3n = 3\sum_1 n = 3\sum_1 \frac{1}{n^{-1}}$

$\sum_1 \frac{1}{n^{-1}}$ est Série de Riemann $\alpha = -1 < 1$

donc: $\sum_1 3n$ est divergente ... (1)

(2) $\sum_1 \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_1 \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ est Une Série géométrique avec: $q = -\frac{1}{2} \in$

$]-1,1[\Rightarrow \sum_1 \frac{(-1)^n}{2^n}$ est convergente (2)

de (1) et (2)

$\sum_1 \left(3n + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)$ est divergente.

- $\sum_1 \frac{3^n}{1+4^n}$ (Série à termes positives)

on Utilise la comparaison:

on sait que:

$$4^n + 1 > 4^n$$

$$\frac{1}{1+4^n} < \frac{1}{4^n}$$

$(3^n > 0)$ alors:

$$U_n = \frac{3^n}{1+4^n} < \frac{3^n}{4^n} = V_n.$$

$\sum_1 V_n = \sum_1 \frac{3^n}{4^n} = \sum_1 \left(\frac{3}{4}\right)^n$ est Une Série géométrique convergente

car: $q = \frac{3}{4} \in]-1,1[$

donc: $\sum_1 U_n$ est convergente

• U_n و V_n موجبتين (à termes positives)

التكافؤ ← équivalence

حالات عادة نستعمل فيها:

• $\sin(\frac{1}{n}) \approx \frac{1}{n}$

• $\ln(1 + 1/n) \approx \frac{1}{n}$

• $\frac{\text{أكبر حدود}}{\text{أكبر حدود}} \simeq \frac{\text{الأكبر أس}}{\text{الأكبر أس}}$

كحد: $U_n \simeq V_n$

نحسب $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = K$

$K \in]0, \infty[$: U_n لها نفس طبيعة V_n

كانت: $K = 0$ و V_n متقاربة

⇓

$\sum U_n$ متقاربة

① كانت: $K = \infty$

② $\sum V_n$ متباعدة

⇓

$\sum U_n$ متباعدة

مقارنة ← comparaison

حالات عادة نستعمل فيها:

$\ln n \leq n$ ، $e^{-n} = \frac{1}{e^n} < 1$

$|\cos^2 n| \leq 1$ ، $|\sin^2 n|$ ، $|\cos n| \leq 1$ ،

$|\sin n| \leq 1$

حالة ①

$U_n \leq V_n$

$+$

V_n متقاربة

⇓

$\sum U_n$ متقاربة

حالة ②

$U_n \geq V_n$

$+$

V_n متباعدة

⇓

$\sum U_n$ متباعدة

ملاحظة: V_n عادة ما تكون

متسلسلة مرجعية في $\sum V_n$

هندسية $\sum q^n$

$\sum$ [illegible]

[illegible]