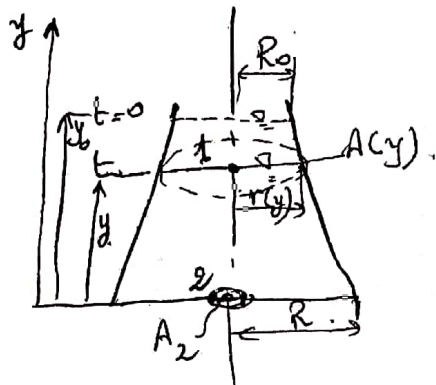


Exo 5:

Trouver l'expression de la durée de vidange complète:



On applique l'éq. de Bernoulli entre la surface libre du liquide et la sortie (2):

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

$$P_1 = P_2 = P_{atm.}$$

$$V_1 = 0 \text{ (grand réservoir)}$$

$$Z_2 = 0$$

$$Z_1 = y$$

$$\text{donc: } V_2 = \sqrt{2gy}$$

L'éq. de continuité donne:

$$A(y) \cdot V(y) = A_2 V_2$$

$$A(y) = \pi \cdot r^2(y)$$

$$r(y) = ?$$

$$V(y) = -\frac{dy}{dt}$$

A_2 = la section de l'orifice:

Trouver $r(y)$:

Le rayon d'une surface du cône $r(y)$ varie linéairement en fonction

$$\text{de } y: \quad r(y) = ay + b \quad \begin{cases} r = R_0 : y = 0 \Rightarrow b = R_0 \\ r = R : y = y_0 \Rightarrow ay_0 + R_0 = R \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{R_0 - R}{y_0}$$

$$r(y) = \frac{R_0 - R}{y_0} \cdot y + R$$

donc:

$$\pi \left(\frac{R_0 - R}{y_0} \cdot y + R \right)^2 \cdot \left(-\frac{dy}{dt} \right) = A_2 \sqrt{2gy}$$

En séparant les variables (y et t) on

trouve:

$$dt = -\frac{\pi}{A_2 \sqrt{2g}} \left(\frac{R_0 - R}{y_0} y + R \right)^2 \frac{1}{\sqrt{y}} dy$$

$$\int_0^t dt = -\frac{\pi}{A_2 \sqrt{2g}} \int_{y_0}^y \left(\frac{R_0 - R}{y_0} \cdot y + R \right)^2 \cdot y^{-1/2} dy$$

après calcul on trouve:

$$t = \frac{\pi}{A_2 \sqrt{2g}} \left[\left(\frac{R_0 - R}{y_0} \right)^2 \cdot \frac{y^{5/2}}{5/2} + \frac{2R}{3/2} \left(\frac{R_0 - R}{y_0} \right) \cdot y^{3/2} + \frac{R^2}{1/2} \cdot y^{1/2} \right]_{y_0}^y$$

$$t = \frac{\pi}{A_2 \sqrt{2g}} \left[\left(\frac{R_0 - R}{y_0} \right)^2 \cdot \frac{2}{5} (y_0^{5/2} - y^{5/2}) + \frac{4}{3} \frac{R(R_0 - R)}{y_0} (y_0^{3/2} - y^{3/2}) + \frac{2}{1} R^2 (y_0^{1/2} - y^{1/2}) \right]$$

la durée de vidange complète est telle que $y = 0$

$$t_T = \frac{2\pi}{5 A_2 \sqrt{2g}} \cdot y_0^{1/2} \left[R_0^2 + \frac{4}{3} R_0 R + \frac{8}{3} R^2 \right]$$

(P4)