3. Intégration des fonctions trigonométriques du type $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx$

a) Si la puissance du cos est impaire $n = 2k+1$, alors on conserve un seul facteur cos et on utilise $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ pour exprimer le reste de l'intégrale en fonction de sin :

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^m x \cos^{2k+1} x \, dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^m x \, (\cos^2 x)^k \cos x \, dx = \int \sin^m x \, (1 - \sin^2 x)^k \cos x \, dx$$

Maintenant on pose $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx$ d'où

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int t^m \cdot (1 - t^2)^k \, dt$$

b) Si la puissance du sin est impaire $m = 2k+1$, alors on conserve un seul facteur sin et on utilise $\sin^2 = 1 - \cos^2 x$ pour exprimer le reste de l'intégrale en fonction du cos :

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin^{2k+1} x \cos^n x \, dx = \int \sin^{2k} x \sin x \cos^n x \, dx$$

$$= \int (\sin^2 x)^k \sin x \cos^n x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin x \, dx$$

Maintenant on pose $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$

c) Si les deux puissance m et n sont impaires, alors on peut très bien utiliser a) ou b).

d) si les deux puissances m et n sont paires, alors on utilise les relations :

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \begin{cases} \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \end{cases}$

1) $I_1 = \int \cos^3 x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x \, dx = \int (1-\sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$

on pose $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx$ d'où $I_1 = \int (1-t^2)\, dt = t - \frac{1}{3} t^3$

$I_1 = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$

2) $I_2 = \int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^4 x \sin x \cos^2 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$

$= \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \, dx$

On pose $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx$ d'où $I_2 = \int (1-t^2)^2 t^2 \cdot (-dt)$

$I_2 = -\int (1-t^2)^2 t^2 dt = \int -(1-2t^2+t^4) t^2 dt = \int -t^2 + 2t^4 - t^6 \, dt$

$= -\frac{1}{3} t^3 + \frac{2}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + C$

3) $I_3 = \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2} \int 1 - \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\right)$

$I_3 = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

4) $I_4 = \int \sin^4 x = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2 dx =$

$I_4 = \frac{1}{4} \int 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x \, dx$

Afin de traiter le terme $\cos^2 2x$, on utilise $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ d'où

$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$

En injectant la dernière relation dans l'intégrale, il vient :

$I_4 = \frac{1}{4} \int 1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\, dx = \frac{1}{4} \int 1 + \frac{1}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \, dx$

$I_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} x - 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x\right) + C$

$I_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x\right) + C$

5) $I_5 = \int \cos^2 3x . \sin^4 3x \, dx = \int \cos^2 3x \sin^2 3x . \sin^2 3x \, dx$

$I_5 = \int (\cos 3x . \sin 3x)^2 . \sin^2 3x \, dx$

Nous avons $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha \Rightarrow \sin 6x = 2 \sin 3x . \cos 3x$ d'où

$\cos 3x \sin 3x = \frac{1}{2} \sin 6x$ d'où $I_5 = \int \left(\frac{1}{2} \sin 6x\right)^2 . \sin^2 3x \, dx$

$I_5 = \frac{1}{4} \int \sin^2 6x \sin^2 3x \, dx$ , or $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ d'où

$\sin^2 3x = \frac{1}{2}(1 - \cos 6x)$ ainsi

$I_5 = \frac{1}{4} \int \sin^2 6x . \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) \, dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 6x - \sin^2 6x . \cos 6x \, dx$

$I_5 = \frac{1}{8} \Big[ \underbrace{\int \sin^2 6x \, dx}_{I_6} - \underbrace{\int \sin^2 6x . \cos 6x \, dx}_{I_7} \Big]$

$I_6 = \int \sin^2 6x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 12x) \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 12x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} . \frac{1}{12} \sin 12x$

$I_7 = \int \sin^2 6x \cos 6x \, dx$ , on pose $\sin 6x = t \Rightarrow dt = 6 \cos 6x \, dx$ d'où

$\cos 6x \, dx = \frac{1}{6} dt$ , il s'en suit que

$I_7 = \int t^2 . \frac{1}{6} dt = \frac{1}{6} \int t^2 dt = \frac{1}{6} . \frac{1}{3} t^3 = \frac{1}{18} \sin^3 6x$

Finalement:

$I_5 = \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{2} x - \frac{1}{24} \sin 12x - \frac{1}{18} \sin^3 6x \right] + C.$

4. Intégration des fonctions trigonométriques du type :

a) $\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx$, on utilise l'identité

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A-B) + \sin(A+B)\right]$$

b) $\int \sin mx \cdot \sin nx \, dx$, on utilise l'identité

$$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

c) $\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx$, on utilise l'identité

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$

1) $I_1 = \int \sin 4x \cos 5x \, dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(4x-5x) + \sin(4x+5x)\right] dx$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\sin(-x) + \sin(9x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int -\sin x + \sin 9x \, dx = \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{9}\cos 9x\right) + c$$

2) $I_2 = \int \sin 9x \sin x \, dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(9x-x) - \cos(9x+x)\right] dx$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 8x - \cos 10x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin 8x - \frac{1}{10}\sin 10x\right) = \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{20}\sin 10x + c$$

3) $I_3 = \int \cos 3x \cdot \cos 2x \, dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(3x-2x) + \cos(3x+2x)\right] dx$

$$= \int \frac{1}{2}\left[\cos x + \cos 5x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin x + \frac{1}{5}\sin 5x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + c.$$