Techniques d'intégration :

1. Intégration par partie :

1) $I_1 = \int_0^{\pi/2} x.\sin x \, dx$ on pose $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$

$$I_1 = \left[x.(-\cos x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1.(-\cos x)\,dx = \left[-x.\cos x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$$

$$I_1 = \left[-x.\cos x + \sin x\right]_0^{\pi/2} = \left(-\frac{\pi}{2}.\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(-0.\cos 0 + \sin 0\right) = 1$$

2) $I_2 = \int \ln x \, dx = \int 1.\ln x \, dx$ on pose $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$

$$I_2 = x.\ln x - \int x.\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1.dx = x\ln x - x + C$$

3) $I_3 = \int \arctan x \, dx = \int 1.\arctan x \, dx$ on pose $u(x) = \arctan x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x.$

$$I_3 = x.\arctan x - \int x.\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$I_3 = x.\arctan x - \int \frac{2.x}{2.(1+x^2)}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\boxed{\int \frac{\overbrace{2x}^{f'}}{\underbrace{1+x^2}_{f}}\,dx} \qquad \int \frac{f'}{f} = \ln f$$

$$I_3 = x.\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

4) $I_4 = \int x^2.e^x \, dx$ on pose $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$I_4 = x^2.e^x - \underbrace{\int 2x.e^x\,dx}_{I'_4}$. Pour calculer I'_4, on utilise de nouveau l'intégration par partie :

$I'_4 = \int 2x.e^x\,dx = 2\int x.e^x\,dx$ On pose $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$$I'_4 = 2\left[x.e^x - \int 1.e^x\,dx\right] = 2(x.e^x - e^x) \text{ d'où}$$

$$I_4 = x^2.e^x - 2(xe^x - e^x) \Rightarrow I_4 = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

5) $I_5 = \int e^x . \sin x . dx.$ on pose $u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$I_5 = e^x \sin x - \underbrace{\int e^x . \cos x \, dx}_{I'_5}$. Afin de calculer I'_5, on utilise aussi l'intégration par partie.

$I'_5 = \int e^x . \cos x \, dx$ on pose $u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin x$

$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$I'_5 = e^x . \cos x - \int e^x . (-\sin x) \, dx = e^x . \cos x + \int e^x \sin x \, dx$ d'où

$I_5 = e^x \sin x - \left[e^x . \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right] = e^x \sin x - e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{I_5}$

d'où $I_5 + I_5 = e^x (\sin x - \cos x) \Rightarrow I_5 = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$

6) $I_6 = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{2 \ln x}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$ on pose $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow v(x) = \sqrt{x}$

$I_6 = 2 \left(\sqrt{x} \ln x - \int \frac{1}{x} . \sqrt{x} \, dx \right)$

$I_6 = 2 \left(\sqrt{x} \ln x - \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right) = 2 \left(\sqrt{x} \ln x - \int \frac{2}{2\sqrt{x}} dx \right)$

$I_6 = 2 \left(\sqrt{x} \ln x - 2 \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} \right) = 2 \left(\sqrt{x} \ln x - 2\sqrt{x} \right) = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C$

7) $I_7 = \int \arcsin x \, dx = \int 1 . \arcsin x \, dx$ on pose $u(x) = \arcsin x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$

$I_7 = x . \arcsin x - \int x . \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$I_7 = x \sin x - \int \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = x . \arcsin x + \boxed{\int \frac{\overbrace{-2x}^{f'}}{2\sqrt{\underbrace{1-x^2}_{f}}} dx}$

$\int \frac{f'}{2\sqrt{f}} = \sqrt{f}$

d'où $I_7 = x . \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

2. Intégration par changement de variable : [Integration by substitution]

Si $t = g(x)$ est une fonction continue dérivable sur un intervalle I, et f une fonction continue sur cet intervalle, alors :

$$\int f(g(x)).g'(x).dx = \int f(t).dt$$

1) $I_1 = \int \cos(7x+5).dx$

1ère étape : choisir la nouvelle variable : ici on pose $t = 7x + 5 \dots (1)$

2ème étape : effectuer la differentiation : $t = g(x) \Rightarrow dt = g'(x)\,dx$

dans cet exemple : $t = 7x+5 \Rightarrow dt = 7.dx \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{7}dt \dots (2)$

3ème étape : calculer l'intégrale en fonction de t :

En remplaçant (1) et (2) dans I_1 : $I_1 = \int \cos t \,.\frac{1}{7}dt = \frac{1}{7}\int \cos t\, dt$

$I_1 = \frac{1}{7}\sin t$

4ème étape : écrire le résultat en fonction de x

$I_1 = \frac{1}{7}\sin(7x+5) + C$

2) $I_2 = \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$

1ère étape : on pose $t = 1+x^2$

2ème étape : $dt = 2x \,. dx$

3ème étape : $I_2 = \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\sqrt{t}} . \underbrace{2x\,dx}_{dt} = \int \sqrt{t}\,dt$

$I_2 = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}$

$I_2 = \frac{2}{3}t^{3/2}$

4ème étape $I_2 = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$

3) $I_3 = \int (\sin x)^{99} \cdot \cos x \, dx$ on pose $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \, dx$

d'où $I_3 = \int t^{99} \cdot dt = \frac{1}{100} t^{100} \Rightarrow I_3 = \frac{1}{100} (\sin x)^{100} + C$

4) $I_4 = \int x^3 \cos(x^4+2) \, dx$ on pose $t = x^4+2 \Rightarrow dt = 4x^3 dx$

$I_4 = \int \cos(x^4+2) \cdot \underbrace{x^3 dx}_{\frac{1}{4} dt} = \int \cos t \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int \cos t \, dt = \frac{1}{4} \sin t$

$I_4 = \frac{1}{4} \sin(x^4+2) + C.$

5) $I_5 = \int x^2 \cdot e^{x^3} dx.$ on pose $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{dt}{3}$

$I_5 = \int e^{x^3} \cdot x^2 dx = \int e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$

6) $I_6 = \int \tan x \, dx$ on pose $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \, dx \Rightarrow$
$\sin x \, dx = -dt$

$I_6 = \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t|$

$I_6 = -\ln|\cos x| = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$

7) $I_7 = \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ on pose $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$I_7 = \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \sin t \cdot 2dt = 2 \int \sin t \, dt = -2\cos t$

$I_7 = -2\cos\sqrt{x} + C$