Solution de TD N°03 Mécanique 2 (MPL)

Exercice : 01.

Détermination des vecteurs vitesse et accélération du point A.

L'angle de Rotation de la tige autour de z_1 : θ
et le vecteur position du point A : $\vec{OA} = R\vec{u}$
le taux de Rotation de la tige autour de l'axe z_1 est :-

$$\vec{\Omega}_{T/R_1} = \frac{d\theta}{dt}\vec{z}_1 = \dot{\theta}\vec{z}_1$$

D'après la formule de distribution des vitesses dans un corps solide, on écrit dans le point A :

$$\vec{V}_{A/R_1} = \vec{V}_{O/R_1} + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1}$$

$\vec{V}_{O/R_1} = \vec{0}$ (O point fixe, Centre de Rotation de la tige).

$$\Rightarrow \vec{V}_{A/R_1} = \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1} = -R\vec{u} \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_{A/R_1} = R\dot{\theta}\vec{v}}$$

Le torseur Cinématique au point A.

$$V_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{T/R_1} \\ \vec{V}_{A/R_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_1 \\ R\dot{\theta}\vec{v} \end{Bmatrix}$$

vecteur d'accélération du point A s'écrit :-

$$\vec{a}_{A/R_1} = \frac{d\vec{V}_{A/R_1}}{dt}\Big|_{R_1} = \frac{d\vec{V}_{O/R_1}}{dt}\Big|_{R_1} + \frac{d(\vec{AO}\wedge\vec{\Omega}_{T/R_1})}{dt}$$

et on a : $\frac{d\vec{OA}}{dt}\Big|_{R_1} = \vec{\Omega}_{T/R_1}\wedge\vec{AO}$

Donc :-

$$\vec{a}_{A/R_1} = \vec{a}_{O/R_1} + \vec{AO}\wedge\frac{d\vec{\Omega}_{T/R_1}}{dt} + (\vec{\Omega}_{T/R_1}\wedge\vec{AO})\wedge\vec{\Omega}_{T/R_1}$$

On remplaçant les vecteurs :-

$\vec{a}_{O/R_1}$, $\vec{AO}$, $\vec{\Omega}_{T/R_1}$ par ces expressions :-

$$\vec{a}_{A/R_1} = \vec{0} - R\vec{u}\wedge\frac{d\dot{\theta}\vec{z}_1}{dt} + (\dot{\theta}\vec{z}_1\wedge -R\vec{u})\wedge\dot{\theta}\vec{z}_1$$

$$\boxed{\vec{a}_{A/R_1} = R\ddot{\theta}\vec{v} - R\dot{\theta}^2\vec{u}}$$

Exercice 02

1) Ecrire le torseur cinématique au centre "C" du disque.

le disque est en mouvement hélicoidal (Rotation + translation).

le taux de rotation est : $\vec{\Omega}_{c/R_1} = \frac{d\theta \vec{z}_1}{dt} = \dot{\theta}\vec{z}_1$

le déplacement du disque de O jusqu'au point I. est égal à x. (OI = x).

vitesse de translation du point "C" est :

$$\vec{V}_c = \frac{d\vec{O_1C}}{dt} = \frac{d(\vec{O_1I} + \vec{IC})}{dt} = \frac{d(x\vec{x}_1 + R\vec{y}_1)}{dt} = \dot{x}\vec{x}_1$$

le torseur cinématique du centre "C" du disque :-

$$\vec{V}_c = \begin{cases} \vec{\Omega}_{c/R_1} \\ \vec{V}_c \end{cases} = \begin{cases} \dot{\theta}\vec{z}_1 \\ \dot{x}\vec{x}_1 \end{cases}.$$

2) les vecteurs de vitesse et d'accélération. du corps dans le point M.

$$\vec{V}_{M/R_1} = \vec{V}_c + \vec{MC} \wedge \vec{\Omega}_{c/R_1}$$

$$= \dot{x}\vec{x}_1 + r\vec{x} \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1 = \dot{x}\vec{x}_1 + r\dot{\theta}\vec{y}$$

$$\boxed{\vec{V}_{M/R_1} = \dot{x}\vec{x}_1 + r\dot{\theta}\vec{y}}$$

Dans le repère fixe :

$$\vec{x} = \cos\theta\,\vec{x_1} + \sin\theta\,\vec{y_1}$$

$$\vec{y} = -\sin\theta\,\vec{x_1} + \cos\theta\,\vec{y_1}$$

Donc :

$$\vec{V}_{M/R_1} = \dot{x}\,\vec{x_1} + r\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\vec{x_1} + \cos\theta\,\vec{y_1}\right).$$

Vecteur d'accélération du pt M.

$$\vec{a}_{M/R_1} = \left.\frac{d V_{M/R_1}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\left(\vec{V}_{C/R_1} + \vec{MC} \wedge \vec{\Omega}_{C/R_1}\right)}{dt}\right|_{R_1}$$

$$= \left.\frac{d\vec{V}_{C/R_1}}{dt}\right|_{R_1} + \left.\frac{d\left(\vec{MC} \wedge \vec{\Omega}_{C/R_1}\right)}{dt}\right|_{R_1}$$

$$= \left.\frac{d\vec{V}_{C/R_1}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{MC} \wedge \left.\frac{d\vec{\Omega}_{C/R_1}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}_{C/R_1} \wedge \left.\frac{d\vec{MC}}{dt}\right|_{R_1}$$

Avec : $\left.\dfrac{d\vec{MC}}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\Omega}_{C/R_1} \wedge \vec{MC}$ (dérivée d'un vecteur mobile).

$$\Rightarrow \vec{a}_{M/R_1} = \frac{d\vec{V}_{C/R_1}}{dt} + \vec{MC} \wedge \frac{d\Omega_{C/R_1}}{dt} + \left(\vec{\Omega}_{C/R_1} \wedge \vec{MC}\right) \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1}$$

(Application de la formule de Rivals concernant la loi de distribution des accélérations dans un corps solide.

on remplaçant $\frac{d\vec{V}_{e/R_1}}{dt}$, $\vec{MC}$, $\vec{\Omega}_{e/R_1}$ par ces expressions dans $\vec{a}_{M/R_1}$

On a :-

$$\vec{a}_{M/R_1} = \ddot{x}\vec{x}_1 - r\vec{x} \wedge \frac{d\dot{\theta}\vec{z}_1}{dt} + (\dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge -r\vec{x}) \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{a}_{M/R_1} = \ddot{x}\vec{x}_1 + r\ddot{\theta}\vec{y} - r\dot{\theta}^2\vec{x}}$$