

République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Frère Mentouri Constantine 1
Institut des Sciences et Techniques Appliquée

Cours du Module Mécanique 2

La Cinématique

Pour 1ère Année

Spécialité : Gestion de la Production et Logistique

G.P.L.

Année universitaire 2019/2020

Sommaire

Définition de la cinématique

I. Cinématique

1. Grandeurs cinématiques

1.1 Base cartésienne

1.1.1. Position d'un mobile

1.1.2. Vecteur vitesse

1.1.3. Vecteur accélération

1.2 Base polaire

1.2.1. Définition

1.2.2. Abscisse angulaire

1.2.3. Vitesse angulaire

1.2.4. Mouvement circulaire uniforme

2. Cinématiques du solide

2.1 Introduction

2.2 Champ des vecteurs vitesses des points d'un solide : torseur cinématique.

2.3 Composition des mouvements

2.3.1. Introduction

2.3.2. Composition des vecteurs vitesses

2.3.3. Définition

2.3.4. Généralisation

2.3.4. Composition des torseurs cinématique

3. Liaisons

3.1 Définition

3.1.1. Liaison parfaites

3.1.2. Degré de mobilité d'une liaison

3.2 Liaison ponctuelle

3.2.1. Mouvement possibles

3.2.2. Torseur cinématique

3.2.3. Degrés de mobilité

3.3 Liaison linéaire rectiligne

3.3.1. Mouvement possibles

3.3.2. Torseur cinématique

3.3.3. Degrés de mobilité

3.4 Liaison linéaire annulaire

3.4.1. Mouvement possibles

3.4.2. Torseur cinématique

3.4.3. Degrés de mobilité

3.5 Liaison rotule

3.5.1. Mouvement possibles

3.5.2. Torseur cinématique

3.5.3. Degrés de mobilité

3.6 Liaison appui plan

3.6.1. Mouvement possibles

3.6.2. Torseur cinématique

3.6.3. Degrés de mobilité

3.7 Liaison pivot glissant

3.7.1. Mouvement possibles

3.7.2. Torseur cinématique

3.7.3. Degrés de mobilité

3.8 Liaison pivot

3.8.1. Mouvement possibles

3.8.2. Torseur cinématique

3.8.3. Degrés de mobilité

3.9 Liaison glissière

3.9.1. Mouvement possibles

3.9.2. Torseur cinématique

3.9.3. Degrés de mobilité

3.10 Liaison hélicoïdale

3.10.1. Mouvement possibles

3.10.2. Torseur cinématique

3.10.3. Degrés de mobilité

3.11 Liaison encastrement

3.11.1. Mouvement possibles

3.11.2. Torseur cinématique

3.11.3. Degrés de mobilité

4. Schématisation des systèmes mécanique

4.1 Graphe des actions mécanique

4.2 Schéma cinématique

4.3 Torseur statique d'un solide S_1 sur un solide S_2

4.4 Caractérisations des liaisons

Cinématique

Définition de la cinématique

En physique, la **cinématique** (du grec kinêma, le mouvement) est l'étude des mouvements indépendamment des causes qui les produisent, ou, plus exactement, l'étude de tous les mouvements possibles. À côté de la notion d'espace qui est l'objet de la géométrie, la **cinématique** introduit la notion de temps.

* La cinématique est la partie de la mécanique qui permet d'étudier et de décrire les mouvements des corps, d'un point de vue purement mathématique, indépendamment de causes qui les produisent.

* La cinématique, combinée à l'étude des actions mécaniques permet de l'application du principe fondamental de la cinématique.

Exemple : en usinage (trajectoire d'un outil, vitesse d'avance)

* L'analyse des grandeurs cinématiques (position, vitesse, accélération) permet de déterminer la géométrie et les dimensions des composants d'un mécanisme.

1. Grandeurs cinématiques

Nous avons introduit les grandeurs cinématiques utilisées pour décrire le mouvement d'un point matériel : l'abscisse curviligne, les vectrices positions, vitesse et accélération. Les vecteurs sont exprimés dans la base d'un repère, le plus souvent orthonormé. Le choix de la base est arbitraire mais, en pratique, est guidé par la trajectoire et les forces qui agissent sur le mobile ; nous allons utiliser la base cartésienne.

1.1 Base cartésienne

À un référentiel galiléen (par exemple le référentiel terrestre) nous pouvons attacher un *repère cartésien* (O, i, j, k) dont les vecteurs unitaires de base sont fixes par rapport au référentiel (figure 1.1a).

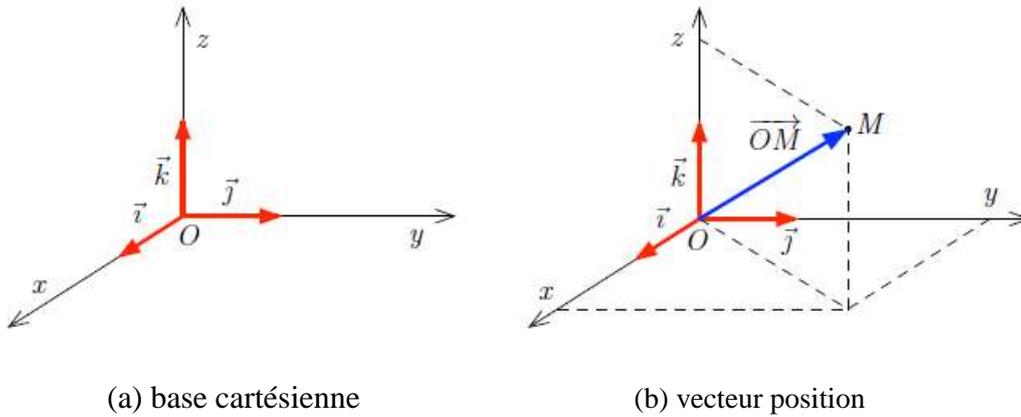


Figure 1.1 – Repère orthonormé à 3 dimensions

1.1.1 Position d'un mobile

Dans la base cartésienne, le *vecteur position* du point mobile M s'exprime (figure 1.1b) :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (1.1)$$

Une autre façon de repérer la position d'un mobile M sur sa trajectoire est d'utiliser l'*abscisse curviligne*. Pour cela, on choisit arbitrairement (figure 1.2) :

- une origine A sur la trajectoire,
- un sens positif.

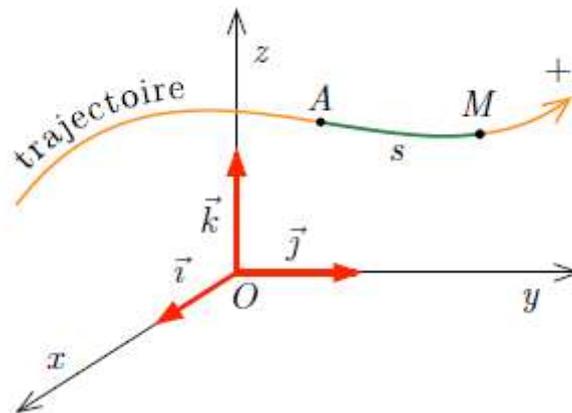


Figure 1.2 – Abscisse curviligne

L'abscisse curviligne s est la mesure algébrique de l'arc AM . Il est à noter que pour pouvoir utiliser l'abscisse curviligne, il faut connaître la trajectoire du mobile.

1.1.2 Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse \vec{v} du mobile M à l'instant t nous renseigne sur la rapidité du changement du vecteur position à cet instant. Il est défini par (figure 1.3) :

$$\vec{v} = \lim_{t' \rightarrow t} \left(\frac{\overrightarrow{MM'}}{t' - t} \right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad (1.2)$$



Figure 1.3 – Vecteur vitesse

En effet :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Delta OM}$$

Et

$$\lim_{t' \rightarrow t} \left(\frac{\overrightarrow{\Delta OM}}{t' - t} \right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Le vecteur vitesse en M est tangent à la trajectoire en ce point et orienté dans le sens du mouvement. L'expression du vecteur vitesse dans la base cartésienne se déduit des relations (1.1) et (1.2) :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt}$$

et comme les vecteurs de base sont fixes :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

de sorte qu'on puisse écrire :

$$v \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$$

Remarque : On utilise souvent les notations \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} qui représentent exclusivement des dérivations par rapport au temps. Ainsi le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

1.1.3 Vecteur accélération

Le *vecteur accélération* a à l'instant t indique la rapidité de la variation du vecteur vitesse.

Il est défini par (figure 1.4) :

$$\vec{a} = \lim_{t' \rightarrow t} \left(\frac{\vec{v}' - \vec{v}}{t' - t} \right) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

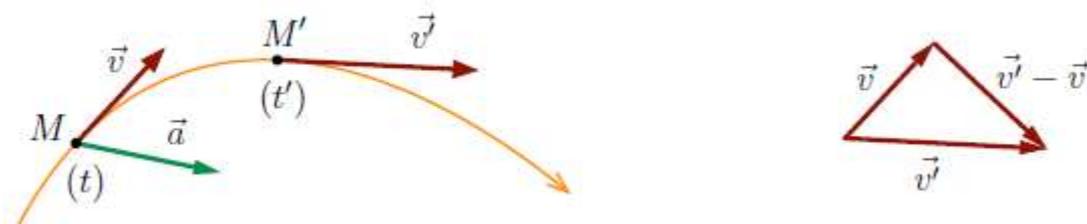


Figure 1.4 – Vecteur accélération

De la relation (1.3) il vient :

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

et :

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \quad (1.4)$$

Puisque les vecteurs de base sont fixes.

On peut alors écrire :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

Remarque : avec la notation pour les dérivations par rapport au temps, l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

1.2 Base polaire

1.2.1 Définition

Un mobile décrit un mouvement circulaire si sa trajectoire est un cercle. Le mouvement est circulaire uniforme (MCU) si en plus la norme du vecteur vitesse reste constante. Nous allons nous limiter au cas d'un mouvement dans le sens positif.

1.2.2 Abscisse angulaire

On fixe arbitrairement une origine A sur la trajectoire circulaire d'un point (figure 1.5). La position du point mobile M peut être repérée par l'angle $\theta = \widehat{AOM}$, appelé *abscisse angulaire*.

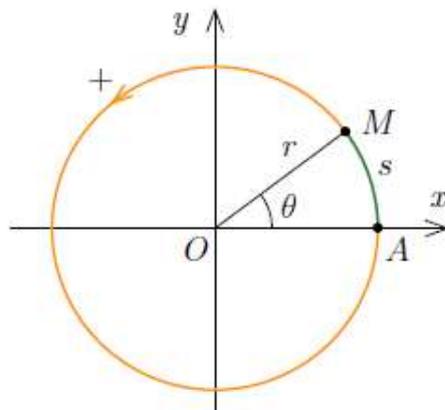


Figure 1.5 – Abscisse angulaire

Les coordonnées de la position du mobile sont :

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

où r est le rayon de la trajectoire circulaire. L'abscisse curviligne s est :

$$s = r \theta \quad (1.5)$$

Où l'angle θ est exprimé en radians.

1.2.3 Vitesse angulaire

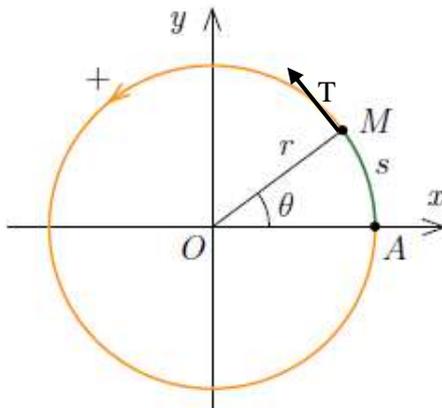


Figure 1.6 – Vitesse angulaire

Remarque :

- $vT > 0$ si le mobile se déplace dans le sens positif ;
- $vT < 0$ si le mobile se déplace dans le sens contraire.

Dont on peut déduire la valeur algébrique de la vitesse :

$$\vec{v} = \lim_{t' \rightarrow t} \left(\frac{\vec{s}' - \vec{s}}{t' - t} \right) = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

où s est l'abscisse curviligne.

$$\vec{v}_T = \frac{ds}{dt} \vec{T} \quad (1.6)$$

La relation (1.6) donne la vitesse algébrique comme la dérivée de l'abscisse curviligne par rapport au temps. En utilisant la relation (1.5), nous pouvons faire apparaître l'abscisse angulaire :

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \quad (1.7)$$

La dérivée de l'abscisse angulaire par rapport au temps est, par définition, la *vitesse angulaire* de rotation du point mobile M sur le cercle :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

Elle s'exprime en radian par seconde (rad/s). Une vitesse angulaire de 1 rad/s signifie que l'abscisse angulaire varie de 1 rad en 1 s.

En utilisant la relation (1.7), nous pouvons exprimer la vitesse v , appelée *vitesse linéaire*, en fonction de ω :

$$v = r\omega \quad (1.8)$$

1.2.4 Mouvement circulaire uniforme

Le mouvement circulaire est uniforme si la vitesse linéaire est constante. Il en suit que la vitesse angulaire est également constante :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \text{constante}$$

L'abscisse angulaire est obtenue en intégrant la vitesse angulaire par rapport au temps :

$$\theta = \omega t + cte$$

La constante d'intégration est déterminée en considérant l'abscisse angulaire initiale θ_0 :

$$\theta(t=0) = \theta_0 = cte$$

Il en suit l'expression de l'abscisse angulaire à l'instant t :

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

Le mouvement circulaire uniforme est périodique de *période* T . La période est le temps nécessaire pour décrire un tour complet et s'exprime en seconde (s). Nous avons :

$$T = \frac{\text{périmètre du cercle}}{\text{la vitesse linéaire}} = \frac{2r\pi}{v}$$

La vitesse linéaire peut s'exprimer en fonction de la période :

$$v = \frac{2r\pi}{T} \quad (1.9)$$

En utilisant la relation (1.8), la vitesse angulaire est :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

La *fréquence* f du mouvement circulaire uniforme est le nombre de tours effectués par seconde. La distance parcourue par seconde étant la vitesse linéaire v , nous avons :

$$f = \frac{\text{la vitesse linéaire}}{\text{périmètre du cercle}} = \frac{v}{2r\pi}$$

Ainsi, la fréquence est l'inverse de la période :

$$f = \frac{1}{T}$$

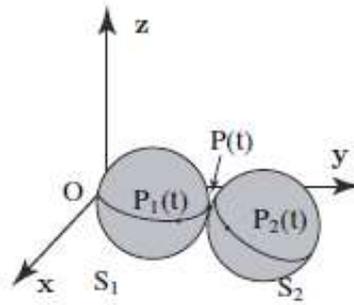
La fréquence est exprimée en *hertz* (Hz) : $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$. La vitesse angulaire peut s'écrire :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (1.10)$$

2. CINEMATIQUE DU SOLIDE

2.1 Introduction

Soit un point P_1 d'un solide S_1 en mouvement par rapport au repère R . Les vecteurs vitesse et accélération du point P_1 par rapport au repère R sont alors notés : $V(P_1 \in S_1/R)$ et $\Gamma(P_1 \in S_1/R)$. Cette notation permet de préciser à quel solide appartient le point dont on suit le mouvement lorsque plusieurs espaces coïncident au même point. Cela permet aussi de distinguer la vitesse d'un point appartenant à un solide, de la vitesse d'un point de l'espace n'appartenant à aucun solide, comme le point de contact P entre les solides S_1 et S_2 . La vitesse du point P sera alors notée : $V(P/R)$.



Vitesses des points d'un solide.

2.2 Champ des vecteurs vitesses des points d'un solide : torseur cinématique

Supposons un référentiel du mouvement R_1 d'origine O_1 et un solide S_2 en mouvement par rapport à ce référentiel, auquel est attaché un repère R_2 d'origine O_2 . La base attachée à R_2 a une vitesse de rotation $\mathbf{V}(R_2/R_1)$ par rapport à la base attachée à R_1 . Supposons deux points quelconques A et B du solide S_2 , alors on peut écrire :

$$\left. \frac{dAB}{dt} \right|_{R_1} = \Omega \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \wedge AB$$

dont on déduit la formule de changement de point pour le champ des vecteurs vitesses des points d'un solide :

$$\forall A, \forall B \in S_2 \quad V(B \in S_2/R_1) = V(A \in S_2/R_1) + \Omega \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \wedge AB.$$

La vitesse d'un point B quelconque du solide S_2 peut donc se calculer à partir de la vitesse d'un point A de S_2 et de la vitesse de rotation du solide par rapport au référentiel du mouvement. Le champ des vecteurs vitesses des points du solide S_2 par rapport à R_1 peut être représenté par un torseur, dit torseur cinématique, noté $\{V\}$ (V

comme vitesse) dont la résultante est la vitesse de rotation, ou l'expression de la vitesse du point A appartenant au solide S_2 , par rapport au repère R_1 :

$$\{v(S_2/R_1)\} = \begin{pmatrix} \Omega(S_2/R_1) \\ V(A \in S_2/R_1) \end{pmatrix}_A$$

2.3 Composition des mouvements

2.3.1 Introduction

Soit un point P, appartenant à un solide S_2 , en mouvement à la fois par rapport à un repère $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ et par rapport à un repère $R(O, x, y, z)$. On va chercher la relation entre les vecteurs vitesses $V(P/R_1)$ et $V(P/R)$. Ces relations, dites « de composition du mouvement », sont particulièrement utiles lorsqu'on étudie des mécanismes dans lesquels les mouvements relatifs des pièces sont connus.

2.3.2 Composition des vecteurs vitesse

On cherche à définir en premier lieu la relation entre $V(P/R)$ et $V(P/R_1)$. On a :

$$V(P/R) = \left. \frac{dOP}{dt} \right|_R \quad \text{et} \quad V(P/R_1) = \left. \frac{dO_1P}{dt} \right|_{R_1}$$

Donc :

$$V(P/R) = \left. \frac{dOO_1 + O_1P}{dt} \right|_R = V\left(O_1 \in \frac{R_1}{R}\right) + \left. \frac{dO_1P}{dt} \right|_R$$

Et donc :

$$V(P/R) = V(P/R_1) + V(P \in R_1/R)$$

2.3.3 Définitions

Dans le mouvement du point P par rapport aux deux repères R et R_1 , on appelle :

1. Vecteur vitesse absolue : $V(P/R)$.
2. Vecteur vitesse relative : $V(P/R_1)$.
3. Vecteur vitesse d'entraînement : $V(P \in R_1/R)$.

2.3.4 Généralisation

Soit un point P mobile par rapport à n repères R_i ($i=1, n$). On peut écrire successivement:

$$V(P/R_{n-1}) = V(P/R_n) + V(P \in R_n/R_{n-1})$$

Ainsi :

$$V(P/R_1) = V(P/R_n) + \sum_{i=2}^n V(P \in R_i/R_{i-1})$$

2.3.5 Composition des torseurs cinématiques

Il a déjà été montré en utilisant la formule de changement de base de dérivation que lors de la composition des mouvements par rapport à n repères la relation :

$$\Omega(S_n/R_1) = \sum_{i=2}^n \Omega(S_i/R_{i-1})$$

Comme par ailleurs :

$$V(P/R_1) = V(P/R_i) + \sum_{i=2}^n V(P \in R_i/R_{i-1})$$

En peut donc écrire :

$$\{v(R_i/R_{i-1})\} = \begin{pmatrix} \Omega(R_i/R_{i-1}) \\ V(A \in R_i/R_{i-1}) \end{pmatrix}_o$$

3. LIAISONS

Un mécanisme est un ensemble de solides reliés entre eux par des liaisons en vue d'obtenir un mouvement déterminé. À partir d'un ensemble de liaisons simples, tous les mouvements seront alors possibles et les actions entre solides pourront être totalement caractérisées.

3.1 Définitions

3.1.1 Liaisons parfaites

Une liaison est parfaite si le jeu de fonctionnement est nul et si le contact se fait sans frottement. Une liaison est parfaite si et seulement si la **puissance dissipée** par la liaison est nulle. Les torseurs cinématiques des liaisons, en un point de contact P , sont de la forme :

$$\{v(S_2/S_1)\} = \begin{pmatrix} \Omega(R_2/S_1) \\ V(A \in S_2/S_1) \end{pmatrix}_P$$

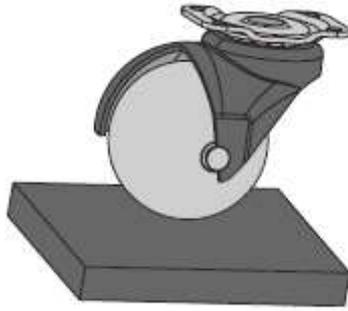
3.1.2 Degré de mobilité d'une liaison

On dit qu'une liaison a un degré de mobilité m si elle autorise m mouvements indépendants.

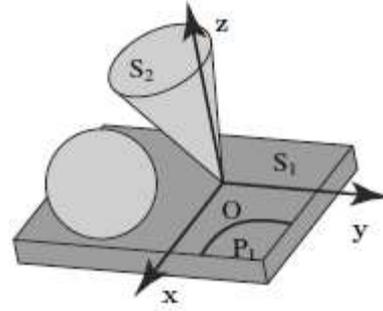
Le degré de mobilité représente le nombre de mouvements indépendants possibles d'un solide par rapport à un autre. Plus généralement, il désigne le nombre de paramètres scalaires cinématiques utiles pour paramétrer la position d'un solide par rapport au repère de référence R et que l'on peut faire varier **indépendamment** les uns des autres.

3.2 Liaison ponctuelle

La *liaison ponctuelle* entre deux solides S_1 et S_2 est représentée par un point. Elle suppose dans la pratique des solides indéformables du type cône sur un plan, ou toute surface de forme quelconque en appui sur une autre surface en un point, comme une sphère en appui sur un plan (voir figure). Le contact est supposé permanent en O , la vitesse ne peut donc pas avoir de composante selon l'axe (O, z) .



Exemple de liaison ponctuelle:
une roulette sphérique rigide sur le sol.



Liaison ponctuelle représentée par
le contact d'une sphère ou d'un cône
sur un plan.

3.2.1 Mouvements possibles.

Dans la configuration de la figure suivante, c'est-à-dire avec un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ où O est le point de contact et \mathbf{z} la normale au plan P_1 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- rotations autour de (O, \mathbf{x}) , (O, \mathbf{y}) , (O, \mathbf{z}) ;
- translations suivant (O, \mathbf{x}) , (O, \mathbf{y}) .

On peut résumer ces conditions sous la forme d'une condition :

$$V(O/R) \cdot z = 0$$

3.2.2 Torseur cinématique.

Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

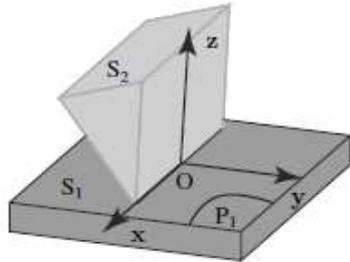
$$\{v(S_2/S_1)\} = \begin{pmatrix} \Omega_x x + \Omega_y y + \Omega_z z \\ V_x x + V_y y + 0z \end{pmatrix}_O$$

3.2.3 Degrés de mobilité.

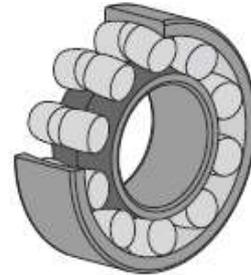
En étudiant le torseur cinématique, il apparaît que cinq mouvements sont possibles. Ils sont indépendants les uns des autres, c'est-à-dire qu'une translation ou une rotation selon un axe peut être effectuée sans influencer sur les mouvements des autres axes. Le degré de mobilité m de cette liaison vaut donc cinq.

3.3 Liaison linéaire rectiligne

La *liaison linéaire rectiligne* entre S_1 et S_2 est du type cylindre en appui sur un plan. Le contact entre les deux solides est une droite. Un exemple pratique cette liaison est le roulement à rouleaux.



Liaison linéaire rectiligne. Le contact entre les deux solides est une droite.



Exemple de liaison rectiligne : un roulement à rouleaux.

3.3.1 Mouvements possibles.

Dans la configuration de la figure avant précédente, c'est-à-dire avec un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ où la droite (O, \mathbf{x}) est confondue avec la ligne de contact entre S_2 et S_1 et où \mathbf{z} est la normale au plan P_1 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- rotations autour de (O, \mathbf{x}) , (O, \mathbf{z}) ;
- translations suivant (O, \mathbf{x}) , (O, \mathbf{y}) .

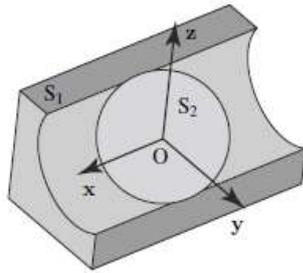
3.3.2 Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{v(S_2/S_1)\} = \begin{pmatrix} \Omega_x x + 0y + \Omega_z z \\ V_x x + V_y y + 0z \end{pmatrix}_O$$

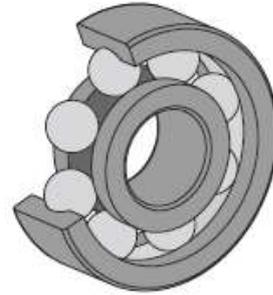
3.3.3 Degrés de mobilité. Le degré de mobilité m de cette liaison vaut quatre.

3.4 Liaison linéaire annulaire

La *liaison linéaire annulaire* entre S_1 et S_2 est du type sphère dans un cylindre creux de même diamètre. Liaison linéaire annulaire. Le contact entre les deux solides est un cercle. La ligne de contact entre les deux solides est un cercle. Un exemple pratique cette liaison est le roulement à billes.



Liaison linéaire annulaire.
Le contact entre les deux solides est un cercle.



Exemple de liaison annulaire :
Un roulement à billes.

3.4.1 Mouvements possibles.

Dans la configuration de la figure 4.6, c'est-à-dire avec un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ au centre de S_2 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- rotations autour de (O, \mathbf{x}) , (O, \mathbf{y}) , (O, \mathbf{z}) ;
- translation suivant (O, \mathbf{x}) .

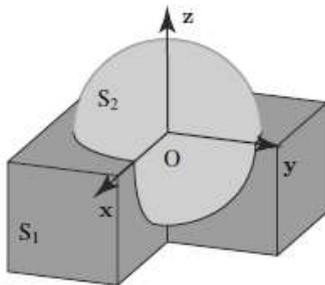
3.4.2 Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{v(S_2/S_1)\} = \begin{pmatrix} \Omega_x x + \Omega_y y + \Omega_z z \\ V_x x + 0y + 0z \end{pmatrix}_O$$

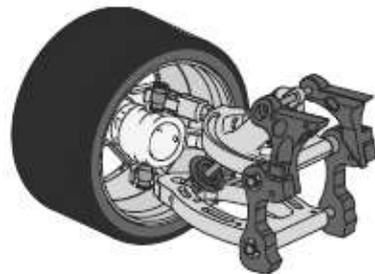
3.4.3 Degrés de mobilité. Le degré de mobilité de cette liaison vaut quatre.

3.5 Liaison rotule

La *liaison rotule* est du type sphère dans une sphère creuse de même diamètre. La surface de contact entre les deux solides est la surface de la sphère intérieure. Un exemple de cette liaison est celle entre le châssis et la roue d'une voiture.



Liaison rotule. Le contact entre les deux solides est une sphère.



Exemple de liaison rotule :
la liaison châssis/roue d'une voiture

3.5.1 Mouvements possibles.

Dans la configuration de la figure 4.8, c'est-à-dire avec un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ au centre de S_2 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose suivant les trois rotations autour de (O, \mathbf{x}) , (O, \mathbf{y}) , (O, \mathbf{z}) .

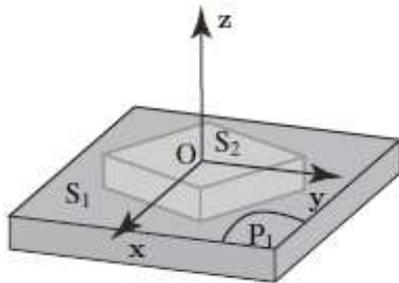
3.5.2 Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{v(S_2/S_1)\} = \begin{pmatrix} \Omega_x x + \Omega_y y + \Omega_z z \\ 0x + 0y + 0z \end{pmatrix}_O$$

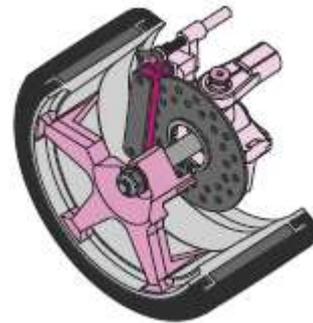
3.5.3 Degrés de mobilité. Le torseur cinématique fait apparaître trois mouvements indépendants. Le degré de mobilité vaut donc trois.

3.6 Liaison appui plan

La *liaison appui plan* est du type plan sur plan. La surface de contact entre les deux solides est un plan. Un exemple de cette liaison est celle entre les plaquettes de frein d'une voiture et le disque lié à la roue.



Liaison plan sur plan. Le contact entre les deux solides est un plan.



Liaison plan sur plan : les plaquettes de frein d'une voiture sur le disque lié à la roue.

3.6.1 Mouvements possibles.

Dans la configuration de la figure 4.10, c'est-à-dire avec un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ au centre de S_2 en contact avec le plan S_1 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- rotation autour de (O, \mathbf{z}) ;
- translations suivant (O, \mathbf{x}) , (O, \mathbf{y}) .

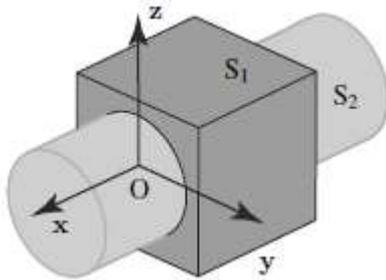
3.6.2 Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{v(S_2/S_1)\} = \begin{pmatrix} \Omega_x x + \Omega_y y + \Omega_z z \\ V_x x + V_y y + 0z \end{pmatrix}_O$$

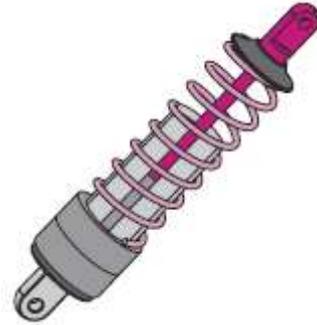
3.6.3 Degrés de mobilité. Trois mouvements indépendants sont identifiables à partir du torseur cinématique. Le degré de mobilité m de cette liaison vaut donc trois.

3.7 Liaison pivot glissant

La *liaison pivot glissant* est du type cylindre à base circulaire dans un cylindre creux à base circulaire de même rayon. La surface de contact entre les deux solides est donc un cylindre. Un exemple de cette liaison est celle du système coulissant entre la partie supérieure et inférieure d'un amortisseur de voiture.



Liaison pivot glissant. Le contact entre les deux solides est un cylindre à base circulaire.



Exemple de liaison pivot glissant : un amortisseur dont la partie supérieure coulisse dans la partie inférieure.

3.7.1 Mouvements possibles. Dans la configuration de la figure 4.12, c'est-à-dire avec un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ au centre de S_2 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- rotation autour de (O, \mathbf{x}) ;
- translation suivant (O, \mathbf{x}) .

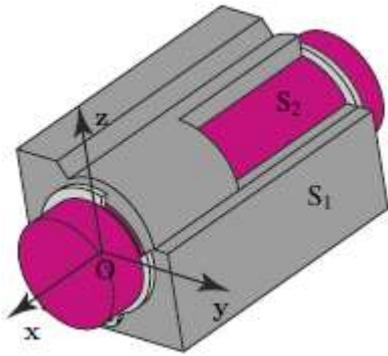
3.7.2 Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{v(S_2/S_1)\} = \begin{pmatrix} \Omega_x x + 0y + 0z \\ V_x x + 0y + 0z \end{pmatrix}_O$$

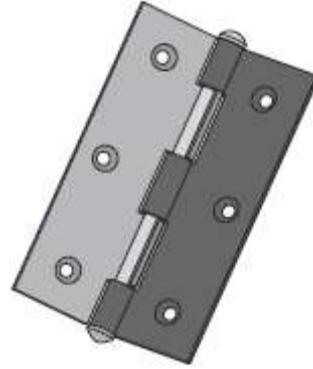
3.7.3 Degrés de mobilité. Le torseur cinématique montre que deux mouvements sont possibles et sont indépendants. Le degré de mobilité de cette liaison vaut donc deux.

3.8 Liaison pivot

La *liaison pivot* est du type forme de révolution non cylindrique dans une forme identique (figure 4.14). La surface de contact entre les deux solides est la surface de cette forme. Un exemple pratique de cette liaison est une charnière de porte (figure 4.15). Dans le cas de la figure 4.14, le cylindre S_2 est bloqué en translation par les circlips. Il ne peut qu'effectuer des rotations selon l'axe (O, \mathbf{x}) .



Liaison pivot. Le contact entre les deux solides est un cylindre.



Exemple de liaison pivot : une charnière de porte.

3.8.1 Mouvements possibles. Dans la configuration de la figure 4.14, c'est-à-dire avec un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ au centre de S_2 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose en une rotation autour de (O, \mathbf{x}) .

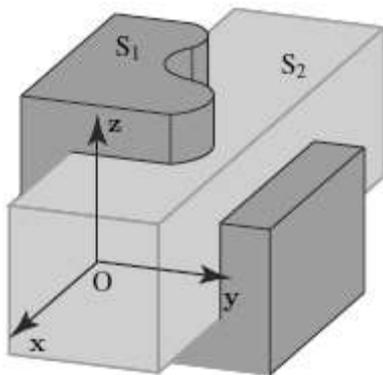
3.8.2 Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{v(S_2/S_1)\} = \begin{pmatrix} \Omega_x x + 0y + 0z \\ 0x + 0y + 0z \end{pmatrix}_O$$

3.8.3 Degrés de mobilité. Un seul mouvement est possible pour ce type de liaison, c'est une rotation unique. Le degré de mobilité de cette liaison vaut donc un.

3.9 Liaison glissière

La *liaison glissière* est du type cylindre à base non circulaire dans un cylindre présentant un creux de forme identique (figure 4.18). La surface de contact entre les deux solides est la surface du cylindre intérieur. Un exemple pratique est l'ouverture d'un téléphone portable par coulissement de l'écran sur le clavier (figure 4.19).



Liaison glissière. Le contact entre les deux solides est un parallélépipède.



Exemple de liaison glissière : un téléphone portable dont la partie supérieure coulisse sur la partie inférieure.

3.9.1 Mouvements possibles. Dans la configuration de la figure 4.18, c'est-à-dire avec un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ au centre de S_2 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose selon une translation suivant (O, \mathbf{x}) .

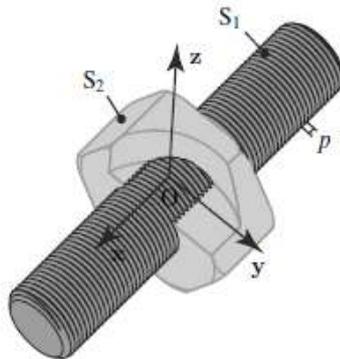
3.9.2 Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{v(S_2/S_1)\} = \begin{pmatrix} 0x + 0y + 0z \\ V_x x + 0y + 0z \end{pmatrix}_O$$

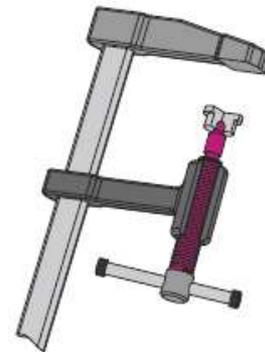
3.9.3 Degrés de mobilité. Un seul mouvement est possible pour ce type de liaison, c'est une translation unique. Le degré de mobilité de cette liaison vaut donc un.

3.10 Liaison hélicoïdale

La *liaison hélicoïdale* est caractérisée par l'existence d'un mouvement combiné qui rend possible la rotation uniquement s'il y a une translation simultanée (figure 1). La surface de contact entre les deux solides est une surface hélicoïdale définie par le pas p de l'hélice. Un exemple pratique de cette liaison est le système de vis d'un serre-joint (figure 2).



Liaison hélicoïdale.



Exemple de liaison hélicoïdale : la vis d'un serre-joint.

3.10.1 Mouvements possibles.

Dans la configuration de la figure 1, c'est-à-dire avec un repère $R(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ au centre de S_2 , le mouvement de S_2 par rapport à S_1 se décompose comme suit :

- rotation autour de (O, \mathbf{x}) ;
- translation suivant (O, \mathbf{x}) .

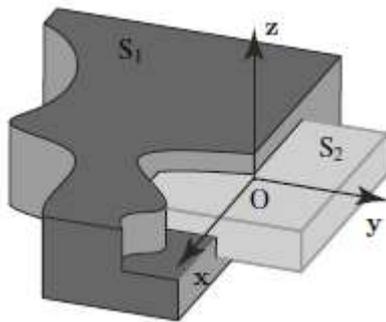
3.10.2 Torseur cinématique. Le torseur cinématique de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 :

$$\{v(S_2/S_1)\} = \begin{pmatrix} \Omega_x x + 0y + 0z \\ V_x x + 0y + 0z \end{pmatrix}_O$$

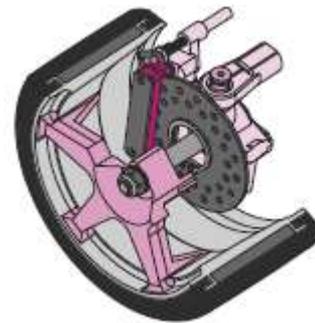
3.10.3 Degrés de mobilité. Le torseur cinématique de la liaison hélicoïdale fait apparaître deux mouvements possibles qui sont une translation et une rotation suivant le même axe. Cependant, nous venons de montrer qu'il existe une relation entre la translation et la rotation de S_2 par rapport à S_1 . Les deux mouvements sont donc liés, ils ne sont par conséquent pas indépendants. La connaissance d'un de ces mouvements permet d'obtenir l'autre grâce à la relation ci-dessus définie. Le degré de mobilité de cette liaison vaut donc un.

3.11 Liaison encastrement

La *liaison encastrement* interdit tout mouvement relatif entre les solides suite à l'existence de multiples contacts entre eux (figure 1). Une application pratique de cette liaison est le système de freinage par blocage du disque lié à la roue (figure 2).



Liaison encastrement.



Exemple de liaison encastrement : au freinage maximum (sans ABS), les plaquettes bloquent le disque par une liaison équivalente à un encastrement.

3.11.1 Mouvements possibles.

Aucun mouvement n'est possible avec une liaison encastrement.

3.11.2 Torseur cinématique. Il s'écrit :

$$\{v(S_2/S_1)\} = \begin{pmatrix} 0x + 0y + 0z \\ 0x + 0y + 0z \end{pmatrix}_O$$

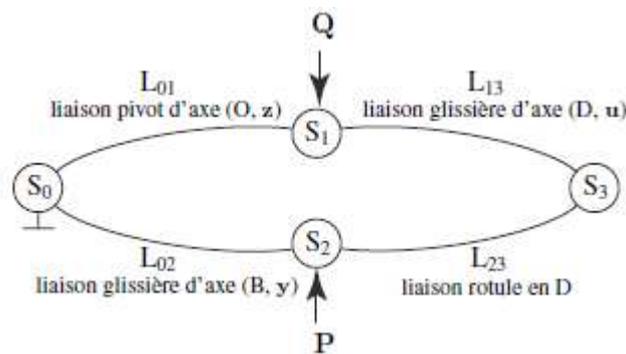
3.11.3 Degrés de mobilité. Le torseur cinématique ne fait pas apparaître de mouvement possible. Le degré de mobilité de cette liaison est nul : $m = 0$.

4. Schématisation des systèmes mécaniques

Dans le but d'analyser et de comprendre le fonctionnement d'un système mécanique, il est souvent plus facile d'en faire une représentation schématique. Il existe deux formes complémentaires de schématisation : le graphe des actions mécaniques et le schéma cinématique.

4.1 Graphe des actions mécaniques

Le graphe des liaisons permet de représenter l'organisation des liaisons entre les solides d'un système mécanique. Bien souvent, on complète ce graphique par l'ajout des forces extérieures au mécanisme, il porte alors le nom de graphe des actions mécaniques. Ce type de graphique permet d'analyser rapidement le mécanisme aussi bien pour une étude statique que dynamique. En pratique, dans le graphe des liaisons d'un mécanisme, les solides sont schématisés par des cercles et les liaisons par des arcs de courbe joignant ces cercles. Une spécification précise des liaisons et des efforts peut y être ajoutée. Un exemple de graphe des liaisons (ou plutôt graphe des actions mécaniques) est proposé sur la figure d'une pompe manuelle.



Exemple d'un graphe des actions mécaniques d'une pompe manuelle.

4.2 Schéma cinématique

Le schéma cinématique permet de modéliser les interactions cinématiques entre les solides d'un même mécanisme. Ce type de représentation permet de décomposer de manière détaillée une liaison entre deux solides. Par exemple, une liaison pivot réalisée par deux roulements à billes assurant respectivement une liaison rotule et une liaison linéaire annulaire sera schématisée par ces deux liaisons. Par ces aspects, le schéma cinématique permet, d'une part, d'aider à la conception d'un mécanisme en lui donnant le principe de fonctionnement cinématique et, d'autre part, d'aider à la compréhension du système à analyser.

En pratique, la réalisation d'un schéma cinématique d'un système consiste simplement à lier des schémas élémentaires de liaison entre eux. Ceux-ci représentent chacun une cinématique établie, telle que la liaison pivot, pivot glissant, etc. Une description schématique de ces éléments est proposée dans le tableau suivant en deux dimensions ou trois dimensions, permettant de proposer le schéma cinématique de la pompe manuelle sur la figure.

Tableau : Une description schématique des liaisons.

Liaison	Schématisation plane	Liaison	Schématisation plane
Ponctuelle		Linéaire rectiligne	
Linéaire annulaire		Rotule	
Plan sur plan		Pivot glissant	
Hélicoïdale à droite		Hélicoïdale à gauche	
Glissière		Pivot	
Encastrement			

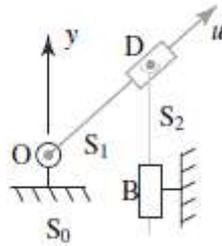


Schéma cinématique de la pompe manuelle.

4.3 Torseur statique d'un solide S_1 sur un solide S_2

Il s'agit d'un torseur composé d'une résultante (de composantes X, Y, Z) et d'un moment (de composantes L, M, N) dans un repère $R(x, y, z)$, qui représentent la force et le moment produit par la force en un point P, contact entre les solides :

$$\{A(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{pmatrix} Xx + Yy + Zz \\ Lx + My + Nz \end{pmatrix}_P$$

2.5.4 Caractérisation des liaisons

Cette caractérisation et référer à la normalisation ISO 3952.

Liaison	Modélisation	Torseur statique	Torseur cinématique
Repère (O, x, y, z)		$\{ A(S_1 \rightarrow S_2) \}_O$	$\{ V(S_2/S_1) \}_O$
Ponctuelle de normale (O, z) $m = 5$		$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + Zz \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} \Omega_x x + \Omega_y y + \Omega_z z \\ V_x x + V_y y + 0z \end{Bmatrix}_O$
Linéaire rectiligne d'axe (O, x), de normale (O, z) $m = 4$		$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + Zz \\ 0x + My + 0z \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} \Omega_x x + 0y + \Omega_z z \\ V_x x + V_y y + 0z \end{Bmatrix}_O$
Linéaire annulaire d'axe (O, x) $m = 4$		$\begin{Bmatrix} 0x + Yy + Zz \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} \Omega_x x + \Omega_y y + \Omega_z z \\ V_x x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O$
Rotule de centre O $m = 3$		$\begin{Bmatrix} Xx + Yy + Zz \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} \Omega_x x + \Omega_y y + \Omega_z z \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O$
Appui plan de normale (O, z) $m = 3$		$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + Zz \\ Lx + My + 0z \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + \Omega_z z \\ V_x x + V_y y + 0z \end{Bmatrix}_O$
Pivot glissant d'axe (O, z) $m = 2$		$\begin{Bmatrix} Xx + Yy + 0z \\ Lx + My + 0z \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + \Omega_z z \\ 0x + 0y + V_z z \end{Bmatrix}_O$
Glissière hélicoïdale d'axe (O, z) $m = 1$		$\begin{Bmatrix} Xx + Yy + Zz \\ Lx + My + Nz \end{Bmatrix}_O$ $N = -pZ$	$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + \Omega_z z \\ 0x + 0y + V_z z \end{Bmatrix}_O$ $V_z = p\Omega_z$
Glissière d'axe (O, z) $m = 1$		$\begin{Bmatrix} Xx + Yy + 0z \\ Lx + My + Nz \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + 0z \\ 0x + 0y + V_z z \end{Bmatrix}_O$
Pivot d'axe (O, z) $m = 1$		$\begin{Bmatrix} Xx + Yy + Zz \\ Lx + My + 0z \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + \Omega_z z \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O$
Encastrement $m = 0$		$\begin{Bmatrix} Xx + Yy + Zz \\ Lx + My + Nz \end{Bmatrix}_O$	$\begin{Bmatrix} 0x + 0y + 0z \\ 0x + 0y + 0z \end{Bmatrix}_O$