République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Frère Mentouri Constantine 1
Institut des Sciences et Techniques Appliquée

Cours du Module Mécanique 2

La Géométrie des masses
Et Cinétique

Pour 1ère Année

Spécialité : Gestion de la Production et Logistique

G.P.L.

Année universitaire 2019/2020

Sommaire

IV. Géométrie des masses

1. Caractéristiques de géométrie des masses

1.1.Masse

A chaque système matériel (S) est associé, une quantité scalaire positive invariable en mécanique classique, appelée : masse du système

La masse d'un solide fait référence à la quantité de matière contenue dans le volume de ce solide.

1.1.1. Système discret :

La masse d'un système discret est la somme des n points matériels discrets de masses m_i:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

1.1.2. Système continu :

Si le système est constitué d'un ensemble continu de masses, la masse du système s'écrirait sous la forme d'une intégrale continue :

$$m = \int_S dm(P)$$

1.1.3. Le système (S) est un volume :

$$m = \int_v \rho(P)dv$$

ρ(P) est la masse volumique au point *P* et *dv* un élément de volume du solide (S)

1.1.4. Le système (S) est une surface :

(Cas des plaques fines) l'épaisseur est négligeable devant les deux autres dimensions.

$$m = \int_S \sigma(P)ds$$

$\sigma(P)$ est la densité surfacique au point *P* et *ds* un élément de surface du solide (S)

1.1.5. Le système (S) est linaire :

(Cas des tiges fines) les deux dimensions sont négligeables devant la longueur de la tige.

$$m = \int_L \lambda(P)dl$$

$\lambda(P)$ est la densité linéique au point P et dl un élément de longueur du solide (S). Dans les systèmes homogènes (solides homogènes) la densité des solides est constante.

1.2. Centre de Masse

On l'appelle également centre d'inertie ou centre de gravité et on le note G en général.

Le centre de masse est un point de référence situé à la position moyenne de la masse du solide. Le centre de masse du solide n'est pas toujours confondu avec le centre géométrique du solide et ne fait pas toujours partie de la géométrie du solide.

1.2.1. Système discret:

Dans le cas de n point matériels P_i de masse m_i on a:

Le centre de masse pour un corps discret peut être obtenu en calculant la moyenne des positions (x_i, y_i, z_i) des éléments qui constituent le corps pondéré parleur masse (m_i)

Centre de masse en x : $X_{cm} = \frac{\sum_i^n m_i x_i}{\sum_i^n m_i}$

Centre de masse en y : $Y_{cm} = \frac{\sum_i^n m_i y_i}{\sum_i^n m_i}$

Centre de masse en z : $Z_{cm} = \frac{\sum_i^n m_i z_i}{\sum_i^n m_i}$

X_{cm}, Y_{cm}, Z_{cm} : Position du centre de masse selon l'axe x, y et z.

x_i, y_i, z_i : La position selon l'axe x, y et z de l'élément i.

m_i : La masse de l'élément i.

n : Le nombre d'éléments qui constituent le corps.

1.2.2. Système continu

La position du centre de masse d'un corps continu peut être déterminée par intégration en utilisant les expressions suivantes :

Centre de masse en x : $X_{cm} = \frac{1}{m_t} \int_i^n x \, dm$

Centre de masse en y : $Y_{cm} = \frac{1}{m_t} \int_i^n y \, dm$

Centre de masse en z : $Z_{cm} = \frac{1}{m_t} \int_i^n z \, dm$

1.3. Moments et produits d'inertie d'un solide :

Le moment d'inertie est une grandeur physique qui caractérise la distribution des masses autour d'un élément de référence (un point, droit, plan). Le moment d'inertie est d'autant plus grand qu'il ya de masses éloignées de la référence. Il est égal à la somme du carré de la distance entre les éléments de référence et les masses élémentaires par leur masse, comme le montre l'équation suivant:

Pour un système discret :

$$I = \sum_i^n m_i d_i^2$$

Pour un système continu :

$$I = \sum_i^n m_i d_i$$

I: Moment d'inertie.

m: Masse

d: Distance entre les éléments de référence et les masses élémentaires.

1.4. Produit d'inertie

Soit un repère orthonormé *R* (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$,$\vec{k}$) et un solide (S) tel que O ϵ (S) . Le moment d'inertie de ce solide par rapport au point O est obtenu en intégrant la relation $r^2 dm$.

$$I_0 = \int_{(s)} r^2 dm$$

Les intégrales sont calculées sur le solide. Celui-ci peut être linéaire, surfacique ou volumique. L'élément d'intégration *dm (P)* est situé en un point *P* du solide.

L'opérateur d'inertie s'écrit : $I_0 \, \vec{v} = -\int \overrightarrow{OP} \wedge \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}\right) dm$

Le vecteur $\vec{v}$ est indépendant du point *P*. Le point *P* est un point quelconque du solide (S) et dm est l'élément de masse entourant le point *P*. Le tenseur d'inertie du solide au point

O est représenté dans la base R (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$,$\vec{k}$) par une matrice notée $I_0(S)_R$: appelée matrice d'inertie en O dans la base R (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$,$\vec{k}$) du solide (S)

$$I_0(S)_R = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

La matrice $I_0(S)_R$ est symétrique, réelle et diagonisable. Elle admet trois valeurs propres réelles et trois directions propres réelles et orthogonales.

• Les valeurs propres sont appelées moments principaux d'inertie ;

• Les directions propres sont appelées axes principaux d'inertie.

Les éléments de la matrice s'écrivent comme suit :

Moments d'inertie par rapport à l'axe $\overrightarrow{OX}$: $I_{XX} = \int (y^2 . z^2) dm$

Moments d'inertie par rapport à l'axe $\overrightarrow{OY}$: $I_{YY} = \int (x^2 . z^2) dm$

Moments d'inertie par rapport à l'axe $\overrightarrow{OZ}$: $I_{ZZ} = \int (x^2 . y^2) dm$

Moments d'inertie par rapport au plan Oxy : $I_{XY} = \int x . y \, dm$

Moments d'inertie par rapport au plan Oxz : $I_{XZ} = \int x . z \, dm$

Moments d'inertie par rapport au plan Oyz : $I_{YZ} = \int y . z \, dm$

1.5. Solides présentant des plans de symétrie

Pour chaque plan de symétrie, les produits d'inertie sur les deux autres plans sont nuls:

Plan de symétrie OXY : $I_{XZ} = I_{XY} = 0$

Plan de symétrie OXZ : $I_{XZ} = I_{XY} = 0$

Plan de symétrie OYZ : $I_{XZ} = I_{XY} = 0$

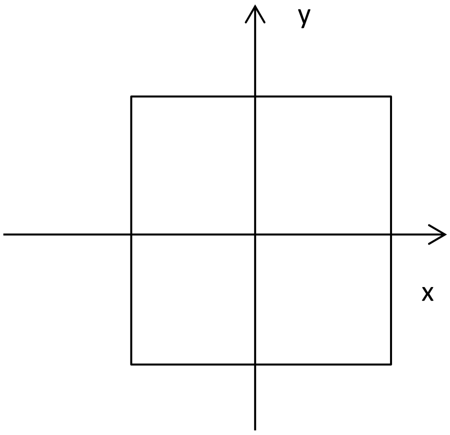
Pour un solide présentant un axe de révolution (cylindre, cône, disc,...), la masse est uniformément distribuée autour de cet axe. Si l'axe OZ est un axe de révolution alors:

$I_{XY} = I_{XZ} = I_{YZ}$

Pour les solides avec une symétrie sphérique tous les axes du repère jouent le même rôle, les moments d'inertie sont donc égaux :

$$I_{XY} = I_{XZ} = I_{YZ} = 0 \text{ et } I_{XX} = I_{YY} = I_{ZZ}$$

1.5.1. Cas d'un rectangle de côté h et de base b.



On utilise les coordonnées cartésiennes : $\frac{-b}{2} \geq X \geq \frac{b}{2}, \frac{-h}{2} \geq y \geq \frac{h}{2}$

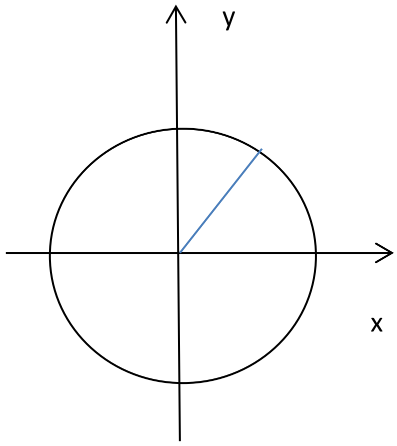
$$I_{XX} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2\, dm = \frac{mh^2}{12}$$

$$I_{XX} = \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2\, dm = \frac{mb^2}{4}$$

$$I_{YY} = \int (x^2 + y^2) dm = \frac{mh^2 + b^2}{2}$$

Le tenseur d'inertie au centre d'un rectangle : $I_0 = \begin{bmatrix} \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mb^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mh^2+b^2}{2} \end{bmatrix}$

1.5.2. Cas du disque de rayon *R* de centre *O* et de densité surfacique *σ*



Du fait que le solide est un disque on a que :

$I_{XY} = I_{XZ} = I_{YZ}$ et $I_{XY} = I_{XZ}$

L'élément de masse est: $dm = \rho dv = \sigma d\theta dr$

La masse du disque : $m = \int dm = \int \sigma d\theta dr = \frac{4\rho\pi R^3}{3}$

$I = \int r^2 dm$ et $x^2 + y^2 = R$

$$I_{ZZ} = \int x^2 + y^2 = \sigma \int_0^R r^3\, dr. \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{mR^2}{2}$$

$I_{XX} + I_{YY} = I_{ZZ}$ donc : $I_{XX} = I_{YY} = \frac{mR^2}{4}$

Le tenseur d'inertie au centre d'un disque : $I_0 = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}$

1.5.3. Cas d'une sphère de rayon *R* de centre *O* et de masse volumique ρ:

$$I_{XX} = I_{YY} = I_{ZZ} = \frac{2}{5}mR^2$$

Le tenseur d'inertie au centre d'une sphère : $I_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{bmatrix}$

V. Cinétique

1. Définition

La cinétique traite les relations associant les grandeurs cinématiques et la répartition des masses. Ce chapitre, introduit de nouvelles grandeurs cinétiques telles que : la quantité de mouvement, le moment cinétique, la quantité d'accélération, le moment dynamique et l'énergie cinétique.

2. Quantité de mouvement

La quantité de mouvement est une grandeur physique qui est associée à la masse et à la vitesse d'un objet. On l'utilise pour étudier le comportement des objets qui entrent en collision les uns avec les autres.

La quantité de mouvement (le vecteur$\vec{P}$) d'un corps matériel ponctuel (M) est le produit de sa masse (le scalaire $\boldsymbol{m}$) par sa vitesse (le vecteur$\overrightarrow{V_M}$).

$$\vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{m}\overrightarrow{\boldsymbol{V_M}}$$

3. Quantité de mouvement d'un système matériel (S)

3.1. Système matériel discret :

$$\vec{\boldsymbol{P}} = \sum_i \boldsymbol{m_i}\overrightarrow{\boldsymbol{V_{M_i}}}$$

3.2. Système matériel continu :

$$\vec{\boldsymbol{P}} = \int_i \overrightarrow{\boldsymbol{V_M}}\boldsymbol{dm}$$

4. Moment Cinétique

Le moment cinétique, est la grandeur physique qui joue dans le cas d'une rotation, un rôle analogue à celui de la quantité de mouvement pour une translation ; si la conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé est liée à l'invariance par translation dans l'espace (propriété d'homogénéité de l'espace), la conservation du moment cinétique est liée à l'isotropie de l'espace.

Le moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point O est le moment de la quantité de mouvement $\vec{P}$ par rapport à ce même point O, ce qui donne le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma_o}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \wedge \boldsymbol{m}\overrightarrow{\boldsymbol{V_M}}$$

$$\overrightarrow{\sigma_o} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$$

4.1. Système matériel discret :

$$\overrightarrow{\sigma_o} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \overrightarrow{V_{M_i}}$$

4.2. Système matériel continu :

$$\overrightarrow{\sigma_o} = \int_s \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V_M} dm$$

5. Torseur cinématique

Le moment cinétique obéit à la loi de transport du moment, ce qui nous permet de constituer un torseur cinétique. Ce torseur se compose pour un système matériel en un point O, d'une première composante dite quantité de mouvement (résultante cinétique) et d'une deuxième composante, le moment cinétique du système.

5.1.Système matériel continu

$$[C]_O = \begin{cases} \vec{P} = \int_s \overrightarrow{V_M} dm \\ \overrightarrow{\sigma_o} = \int_s \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V_M} dm \end{cases}$$

5.2 Système matériel discret

$$[C]_O = \begin{cases} \vec{P} = \sum_i m_i \overrightarrow{V_{M_i}} \\ \overrightarrow{\sigma_o} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \overrightarrow{V_{M_i}} \end{cases}$$

6. Résultante cinétique du système.

$$\vec{P} = \overrightarrow{V_M} dm \quad ou \quad \vec{P} = \sum_I m_i \overrightarrow{V_{M_i}}$$

7. Moment cinétique du système au point A.

$$\overrightarrow{\sigma_o} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V_M} dm \quad ou \quad \overrightarrow{\sigma_o} = \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge m_i \overrightarrow{V_{M_i}}$$