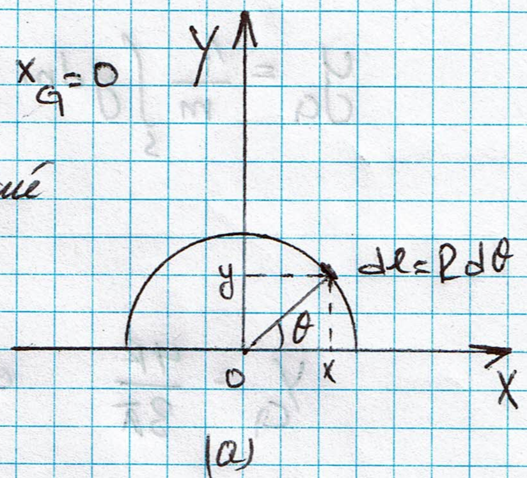
Corrigé TD N°04

Exercice 01



a) l'axe (oy) et un axe de Symétrie. $\Rightarrow x_G = 0$

le centre de masse du Solide est Situé sur l'axe de Symétrie

On à : $Y_G = \frac{1}{m}\int_s dm$

le Solide est linéaire (demi Cercle)

la masse et donné par, $m = \int_s \lambda dl$

où : λ : est la densité linéaire

dl : un élément de longeur. $dl \begin{cases} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{cases}$

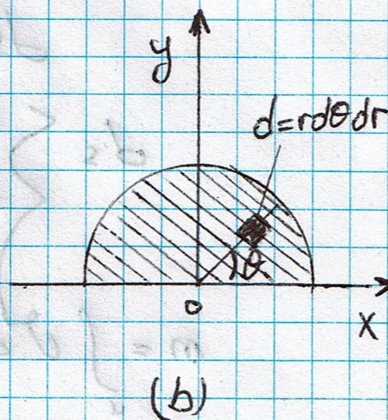
avec: $0 \leq \theta \leq \pi$

la masse du Solide : $m = \int \lambda dl = \int \lambda R d\theta = \lambda \pi R$

$$Y_G = \frac{1}{m}\int_s y\,dm = \frac{1}{m}\int_s y\lambda dl = \frac{1}{\lambda\pi R}\int_0^{\pi} R\sin\theta R d\theta$$

$$= \frac{R}{\pi}(-\cos\theta) = \frac{2R}{\pi}$$

$$\Rightarrow G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{2R}{\pi} \end{cases}$$



b) l'axe (oy) est un Axe de Symétrie $X_G = 0$

le Centre de masse du solide est situé sur l'axe de Symétrie $Y_G = \frac{1}{m}\int_s dm$

le solide est un demi disque

la masse et donné par: $m = \int_s \sigma ds$

σ : est la densité surfacique

ds : un élément de Surface $ds \begin{cases} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{cases}$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$

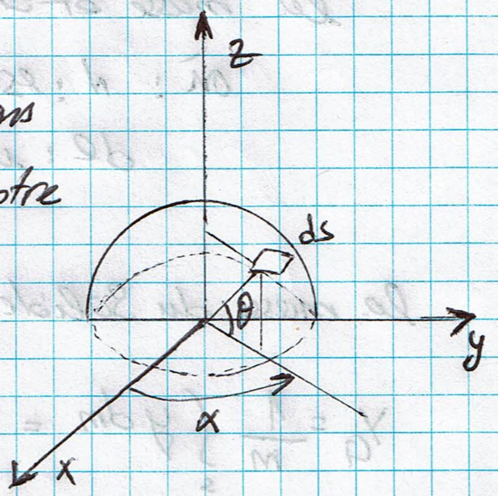
$$m=\int_s \sigma\, ds = \int_0^\pi \sigma\, r\, d\theta\, dr = \sigma \int_0^R r\, dr \int_0^\pi d\theta = \sigma \frac{\pi R^2}{2}$$

$$y_G = \frac{1}{m}\int_s y\, dm = \frac{1}{m}\int_s y\, \sigma\, ds = \frac{2}{\sigma \pi R^2}\int_0^\pi r \sin\theta\, r\, d\theta\, dr$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, r\, d\theta$$

$$y_G = \frac{4R}{3\pi} \quad \text{d'où : } G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \dfrac{4R}{3\pi} \end{cases}$$

c) les plans (xOz) et (yOz) sont des plans de symétrie donc : $x_G = y_G = 0$ le centre de masse du solide est situé sur l'axe de symétrie On a: $z_G = \frac{1}{m}\int_s dm$



Le solide et demi sphère

$$m = \int_s \sigma\, ds$$

σ : densité surfacique

ds: un élément de surface

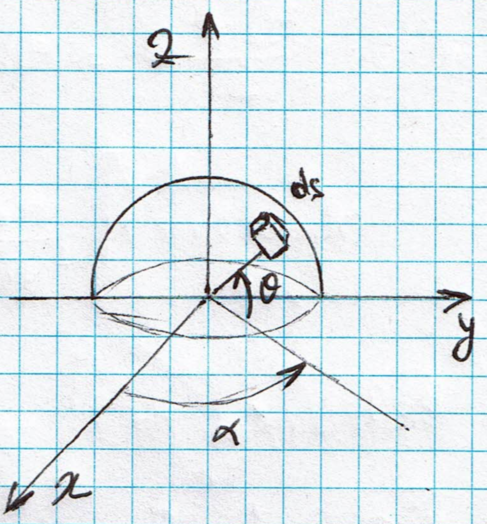
$$ds \begin{cases} R\cos\theta\cos\alpha \\ R\cos\theta\sin\alpha \\ R\sin\theta \end{cases} \quad R : \text{constant} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

$$m = \int_s \sigma\, ds = \sigma R^2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\alpha = \sigma\, 2\pi R^2$$

$$z_G = \frac{1}{m}\int_s z\, dm = \frac{1}{m}\int_s z\sigma\, ds = \frac{\sigma R^3}{\sigma 2\pi R^2}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{R}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d(\sin\theta) \int_0^{2\pi} d\alpha$$

$$z_G = \frac{R}{2\pi} \left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = \frac{R}{2}, \quad z_G = \frac{R}{2}, \text{ d'où : } G : \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = R/2 \end{cases}$$

d) les plans (xoy) et (yoz) sont des plans de symétrie donc : $x_G = 0 = y_G = 0$



le centre du solide est situé sur l'axe de symétrie (Oz) On a $Z_G = \frac{1}{m}\int_s dm$.

le solide est une demi sphère

sa masse : $m = \int_s \rho\, dv$

ρ : la densité volumique

$dV = r\,d\theta\, r\,d\alpha\, dr\cos\theta$, $dv \begin{cases} r\cos\theta\cos\alpha \\ r\cos\theta\sin\alpha \\ r\sin\theta \end{cases}$

avec : $0 \leq r \leq R$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \alpha \leq 2\pi$

la masse $m = \int_s \rho\, dV = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\alpha = \rho \frac{2}{3}\pi R^3$

$$z_G = \frac{1}{m}\int_s z\, dm = \frac{1}{m}\int_s z\rho\, dv = \frac{\rho}{m}\int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\alpha$$

$$= \frac{\rho}{\rho\frac{2\pi R^3}{3}} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\pi/2} \cdot 2\pi$$

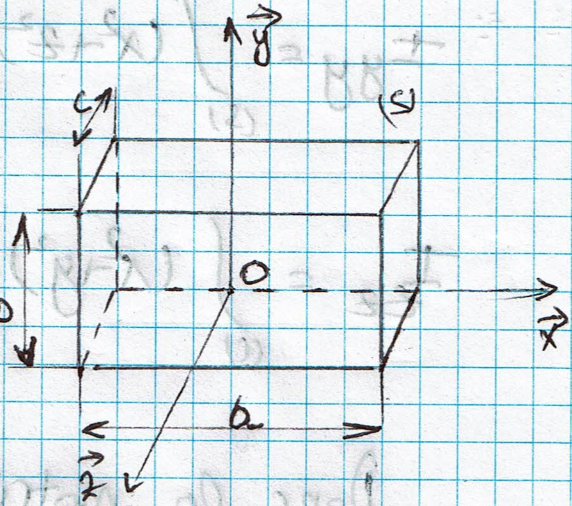
$$= \frac{3R}{8}$$

$z_G = \frac{3R}{8}$

$$G = \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = \frac{3R}{8} \end{cases}$$

Exercice 02 :

La matrice d'inertie au centre O du parallélépipède, s'écrit :



$$I_0 = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zx} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Puisque l'axe Oz est un axe de symétrie, les produits d'inertie sont nuls ($I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$).

Le reste des éléments de la matrice s'écrit alors :

$$I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2)\, dm \ ,$$

$$I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2)\, dm ,$$

$$I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2)\, dm .$$

La masse m $\Rightarrow$ $m = \rho V = \rho\, abc$

et l'élément de la masse $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$

$-a/2 \leq x \leq a/2$, $-b/2 \leq y \leq b/2$, $-c/2 \leq z \leq c/2$.

On a :

$$I = \int_{(S)} x^2\, dm = \rho \int_{(V)} x^2\, dx\, dy\, dz = \rho \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz$$

$$= \rho \frac{a^3 bc}{12} = \frac{ma^2}{12}$$

De la même manière :

$$\int_{(S)} y^2 dy = \frac{mb^2}{12} \qquad \text{Et :} \int_{(S)} z^2 dz = \frac{mc^2}{12}$$

$$I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2)\, dm = \int_{(S)} y^2 dm + \int_{(S)} z^2 dm = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}$$

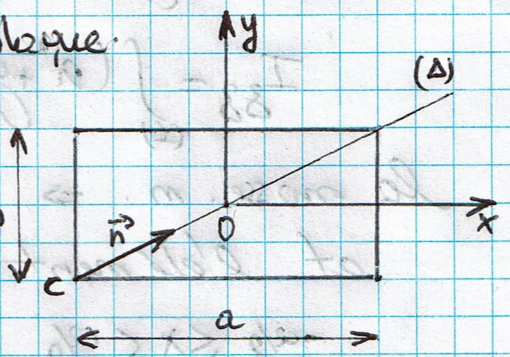
$$I_{yy} = \int_{(S)} (x^2+z^2)\,dm = \int_{(S)} x^2\,dm + \int_{(S)} z^2\,dm = \frac{m}{12}(a^2+c^2)$$

$$I_{zz} = \int_{(S)} (x^2+y^2)\,dm = \int_{(S)} x^2\,dm + \int_{(S)} y^2\,dm = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$$

Donc la matrice :

$$I_o = \frac{m}{12}\begin{bmatrix} (b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & (a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & (a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

<u>Exercice 03</u>



1) La matrice d'inertie au centre O de la plaque.
Puisque la plaque est un parallélépipède d'épaisseur ($e=0$)
la matrice être déduite de l'exercice précédent

$$I_o = \frac{m}{12}\begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

2) La matrice d'inertie au coin O' de la plaque :

$$I_c = \begin{bmatrix} I_{cx} & -I_{cxy} & -I_{cxz} \\ -I_{cyx} & I_{cy} & -I_{cyz} \\ -I_{czx} & -I_{czx} & I_{cz} \end{bmatrix}$$

Détermination des éléments I_{cx}, I_{cy}, I_{cz}.

$$I_{cx} = I_{xx} + md_y^2 = \frac{mb^2}{12} + m\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{mb^2}{3}$$

$$I_{cy} = I_{yy} + md_x^2 = \frac{ma^2}{12} + m\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{ma^2}{3}$$

$$I_{cz} = I_{zz} + md_{oc}^2 = \frac{m(a^2+b^2)}{12} + m\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right) = \frac{m(a^2+b^2)}{3}.$$

les produits d'inerties I_{cxy}, I_{cxz}, I_{cyz},

$$I_{cxy} = \int_{(m)} xy\,dm \quad , \quad I_{cxz} = \int_{(m)} xz\,dm \quad , \quad I_{cyz} = \int_{(m)} yz\,dm$$

Puisque l'épaisseur de la plaque est négligeable.
sa variation suivant l'axe z est Nul

$$I_{cxz} = I_{cyz} = 0$$

la masse m de la plaque de densité surfacique σ est:

$$m = \sigma ab.$$

et l'élément de la masse dm, s'écrit:

$$dm = \sigma\, dx\, dy.$$

$$0 \leq x \leq a \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq b.$$

$$I_{cxy} = \int_{(m)} xy\,dm = \sigma \int_0^a x\,dx \int_0^b x\,dy = \frac{mab}{4}$$

Donc, la matrice d'inertie au coin C de la plaque s'écrit:-

$$I_c = \begin{bmatrix} \frac{b^2}{3} & -\frac{ab}{4} & 0 \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{3} \end{bmatrix}$$