République Algérienne Démocratique et Populaire
Université Frère Mentouri Constantine 1
Instituts des Sciences et Techniques Appliquée

Cour du Module Méca 3

Cinématique et Dynamique d'un solide

Pour les étudiants 2^{éme} année

Spécialité : Productique Mécanique Industrialisation

PMI & Génie Industriel et Maintenance GIM.

Sommaire

Cinématique

Généralité de la cinématique :

En physique, la **cinématique** est l'étude des mouvements indépendamment des causes qui les produisent, ou, plus exactement, l'étude de tous les mouvements possibles. À côté de la notion d'espace qui est l'objet de la géométrie, la **cinématique** introduit la notion de temps.

***** La cinématique est la partie de la mécanique qui permet d'étudier et de décrire les mouvements des corps, d'un point de vue purement mathématique, indépendamment de causes qui les produisent.

* La cinématique, combinée à l'étude des actions mécaniques permet de l'application du principe fondamental de la cinématique.

Exemple : en usinage (trajectoire d'un outil, vitesse d'avance)

1 Grandeurs cinématiques :

Nous avons introduit les grandeurs cinématiques utilisées pour décrire le mouvement d'un point matériel : l'abscisse curviligne, les vectrices positions, vitesse et accélération. Les vecteurs sont exprimés dans la base d'un repère, le plus souvent orthonormé. Le choix de la base est arbitraire mais, en pratique, est guidé par la trajectoire et les forces qui agissent sur le mobile ; nous allons utiliser la base cartésienne.

* L'analyse des grandeurs cinématique (position, vitesse, accélération) permet de déterminer la géométrique et les démentions des composants d'un mécanisme.

1.1 Point mobile.

On appelle point matériel un corps de très faibles dimensions, suffisamment petit pour que l'on puisse l'assimiler à un point (exemple : un atome). Mais une étoile, un avion, situés très loin de l'observateur, pourront aussi être considérés comme des points.

1.2 Référentiel.

Pour étudier le mouvement d'un point il faut pouvoir le situer dans l'espace et dans le temps.

Lorsqu'on a précisé l'ensemble des corps par rapport auxquels on étudie le mouvement, ainsi qu'une horloge, on a défini un référentiel.

1.3 Repère d'espace.

Dans un référentiel on peut définir une infinité de repères d'espace. Un repère d'espace est constitué d'une origine des coordonnées et de trois vecteurs formant une base.

Pour traiter un problème de mécanique, il faudra choisir un référentiel et dans le référentiel choisir un repère d'espace.

1.4 Mouvement.

Le mouvement est un phénomène qui s'opère à la fois dans l'espace et dans le temps.

1.5 Trajectoire.

C'est l'ensemble des positions occupées par le point mobile au cours du temps.

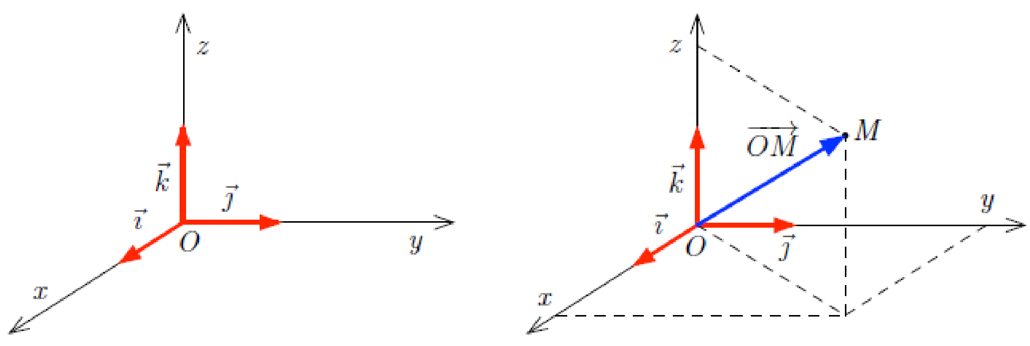
Il ne faut pas confondre mouvement et trajectoire (le mouvement fait intervenir le temps, la trajectoire ne dépend pas du temps).

La trajectoire dépend du référentiel choisi pour étudier le mouvement.

2 Base cartésienne

Dans le repère d'espace (O, i, j, k), le point mobile M a trois coordonnées x, y et z. Le point M est en mouvement si l'une au moins de ses coordonnées varie au cours du temps

A chaque instant, sa position est donnée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ appelé vecteur espace ou vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ (figure 1.1a).



(a) base cartésienne (b) vecteur position

Figure 1.1 – Repère orthonormé à 3 dimensions

2.1 Position d'un mobile

Dans la base cartésienne, le *vecteur position* du point mobile M s'exprime (figure 1.1b) :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad (1.1)$$

Une autre façon de repérer la position d'un mobile M sur sa trajectoire est d'utiliser l'*abscisse curviligne*. Pour cela, on choisit arbitrairement (figure 1.2) :

• une origine A sur la trajectoire,

• un sens positif.

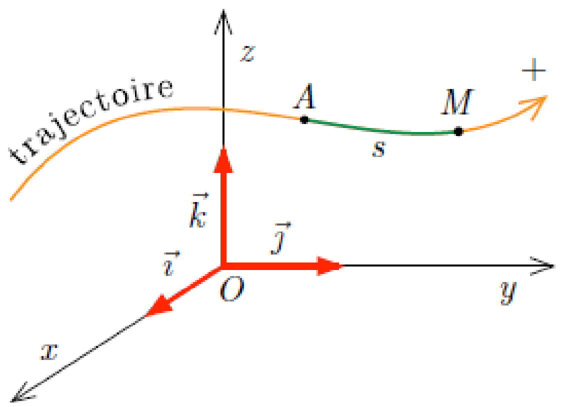


Figure 1.2 – Abscisse curviligne

L'abscisse curviligne s est la mesure algébrique de l'arc AM. Il est à noter que pour pouvoir utiliser l'abscisse curviligne, il faut connaître la trajectoire du mobile.

2.3 Vecteur vitesse

Le *vecteur vitesse* v du mobile M à l'instant t nous renseigne sur la rapidité du changement du vecteur position à cet instant. Il est défini par (figure 1.3) :

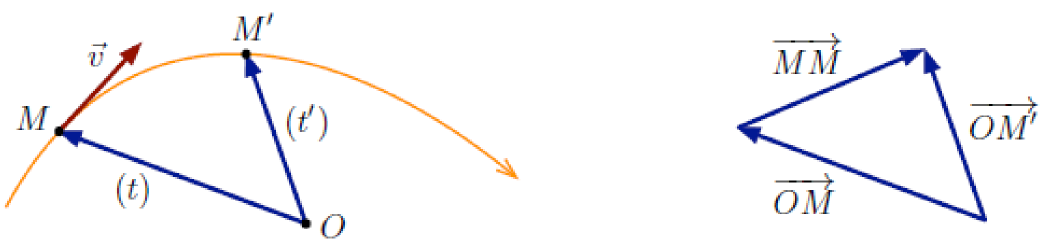


Figure 1.3 – Vecteur vitesse

$$\vec{v} = \lim_{t' \to t}\left(\frac{\overrightarrow{MM'}}{t' - t}\right) = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad (1.2)$$

En effet :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM'} = \Delta\overrightarrow{OM}$$

Et

$$\lim_{t'\to t}\left(\frac{\overrightarrow{\Delta OM}}{t'-t}\right)=\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Le vecteur vitesse en *M* est tangent à la trajectoire en ce point et orienté dans le sens du mouvement. L'expression du vecteur vitesse dans la base cartésienne se déduit des relations (1.1) et (1.2) :

$$\vec{v}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\,(\mathrm{x}\,\vec{\imath}+\mathrm{y}\,\vec{\jmath}+\mathrm{z}\,\vec{k}\,)}{dt}$$

et comme les vecteurs de base sont fixes :

$$\vec{v}=\frac{d\,x}{dt}\,\vec{\imath}+\frac{d\,\mathrm{y}}{dt}\,\vec{\jmath}+\frac{d\,z}{dt}\,\vec{k}$$

de sorte qu'on puisse écrire :

$$v\left|\begin{array}{l} v_x=\dfrac{dx}{dt} \\ v_y=\frac{dy}{dt} \\ v_z=\dfrac{dz}{dt}\end{array}\right.$$

Remarque : On utilise souvent les notations $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ qui représentent exclusivement des dérivations par rapport au temps. Ainsi le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v}=\dot{\mathrm{x}}\,\vec{\imath}+\dot{\mathrm{y}}\,\vec{\jmath}+\dot{\mathrm{z}}\vec{k}$$

2.4 Vecteur accélération

Le *vecteur accélération a* à l'instant *t* indique la rapidité de la variation du vecteur vitesse.

Il est défini par (figure 1.4) :

$$\vec{\alpha}=\lim_{t'\to t}\left(\frac{\vec{v}'-\vec{\mathrm{v}}}{t'-t}\right)=\frac{d\,\vec{v}}{dt}$$

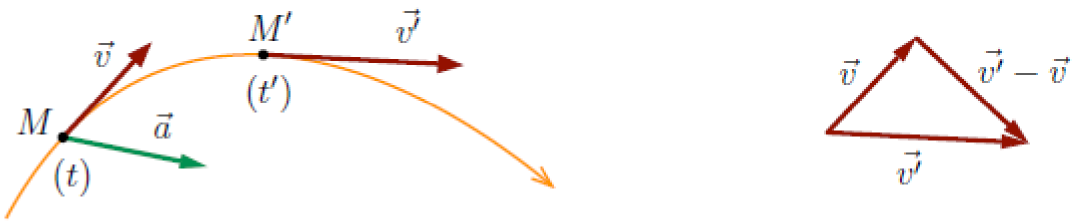


Figure 1.4 – Vecteur accélération

De la relation (1.3) il vient :

$$\vec{a} = \frac{d\,v_x}{dt}\,\vec{\imath} + \frac{d\,v_y}{dt}\,\vec{\jmath} + \frac{d\,v_z}{dt}\,\vec{k}$$

et :

$$\vec{a} = \frac{d^2\,x}{dt^2}\,\vec{\imath} + \frac{d^2\,y}{dt^2}\,\vec{\jmath} + \frac{d^2\,z}{dt^2}\,\vec{k} \qquad (1.4)$$

Puisque les vecteurs de base sont fixes.

On peut alors écrire :

$$\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{array}\right.$$

Remarque : avec la notation pour les dérivations par rapport au temps, l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \dot{\mathrm{v}}_{\mathrm{x}}\,\vec{\imath} + \dot{\mathrm{v}}_{\mathrm{y}}\,\vec{\jmath} + \dot{\mathrm{v}}_{\mathrm{z}}\,\vec{k} = \ddot{\mathrm{x}}\,\vec{\imath} + \ddot{\mathrm{y}}\,\vec{\jmath} + \ddot{\mathrm{z}}\,\vec{k}$$