



Université des Frères Mentouri Constantine 1
INSTITUT DES SCIENCES ET TECHNIQUES APPLIQUEES
Département Génie Industriel et Maintenance



Cours Electronique I

GIM S2

Année universitaire 2019/2020

Chapitre 1 : LES QUADRIPOLES

- 1. Généralité- Définitions**
 - 1.1. Définitions : Convention de sens des courants**
 - 1.2. Utilisation des quadripôles :**
 - 1.3. Gain en tension et en courant**
 - 1.4. Gain en tension**
 - 1.5. Gain en courant**
 - 1.6. Etude d'un exemple**
- 2. Impédance d'entrée et de sortie du quadripôle**
 - 2.1. Impédance d'entrée**
 - 2.2. Impédance de sortie**
- 3. Matrice d'un quadripôle**
 - 3.1. Les matrices utilisés**
 - 3.1.1. Matrice impédance**
 - 3.1.2. Matrice admittance**
 - 3.1.3. Matrice caractéristique**
 - 3.1.4. Matrice de transfert**
 - 3.1.5. Matrice hybride**
 - 3.2. Exemple de calcul de matrice**
 - 3.2.1. Impédance série**
 - 3.2.2. Impédance parallèle**
 - 3.3. Association de quadripôles**
 - 3.3.1. Association en cascade**
 - 3.3.2. Association en parallèle**
 - 3.3.3. Association en série**
 - 3.3.4. Association série-parallèle**

Chapitre 2 : L'AMPLIFICATEUR OPERATIONNEL

- 1. Modèle de l'amplificateur opérationnel idéal**
- 2. Amplificateur inverseur**
 - 2.1. Amplificateur de base**
 - 2.2. Amplificateur inverseur avec un circuit a T**
 - 2.3. Effet d'un gain fini**

- 2.4. Amplificateur sommateur**
- 3. Amplificateur non-inverseur**
 - 3.1. Amplificateur de base**
 - 3.2. Amplificateur suiveur de tension**
- 4. Application des amplificateurs opérationnels**
 - 4.1. Convertisseur courant tension**
 - 4.2. Convertisseur tension courant**
 - 4.3. Amplificateur de différence**
 - 4.4. Circuit intégrateur et circuit différentiateur**
 - 4.5. Amplificateur logarithmique**
- 5. Oscillateur à pont de Wien**
 - 5.1. Principe de fonctionnement**
 - 5.2. Mise en équation**
 - 5.3. Réglage de l'oscillateur**

Chapitre 3 LES FILTRES ACTIFS

- 1. HISTORIQUES**
- 2. Définition**
- 3. Action des différents filtres**
 - **Filtre passe-bas**
 - **Filtre passe-haut**
 - **Le filtre passe bande**
 - **Le filtre coupe-bande**
- 4. Caractéristiques d'un filtre**
- 5. Structure des filtres actifs**
- 6. Filtres classiques du premier ordre**
 - 6.1. Filtre passe-bas**
 - 6.1.1. Diagramme de Bode**
 - 6.1.2. Exemples**
 - 6.2. Filtre passe-haut**
 - 6.2.1. Diagramme de Bode**
 - 6.2.2. Exemples**

Chapitre 1 : LES QUADRIPOLES

1. Généralité- Définitions

1.1. Définitions : Convention de sens des courants

Un quadripôle est une boîte noire à quatre bornes dans laquelle des courants électriques peuvent circuler ; cette boîte comporte deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie :

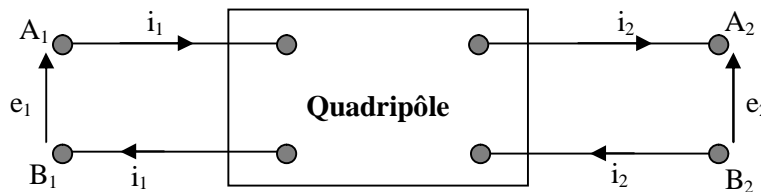


Fig. 1 Représentation

Donc :

- Quadripôle= réseau quelconque avec deux entrées A_1 , B_1 et deux sorties A_2 , B_2 .
- Pas de source de tension ou de courant \longrightarrow passif, sinon il est actif.

Nous limiterons l'étude au quadripôle passif linéaire c.à.d. constitué de R, L et C.

Un quadripôle peut être décrit par un système de 2 équations à 2 inconnues, que l'on peut mettre sous forme matricielle.

La **condition** pour que cette boîte noire soit un quadripôle est que **le courant entrant par une des bornes d'entrée** (resp. de sortie) **soit égale au courant sortant par l'autre borne d'entrée** (resp. de sortie).

Quatre paramètres électriques caractérisent alors le quadripôle :

Tension et courant d'entrée e_1 et i_1 , et tension et courant de sortie e_2 et i_2 .

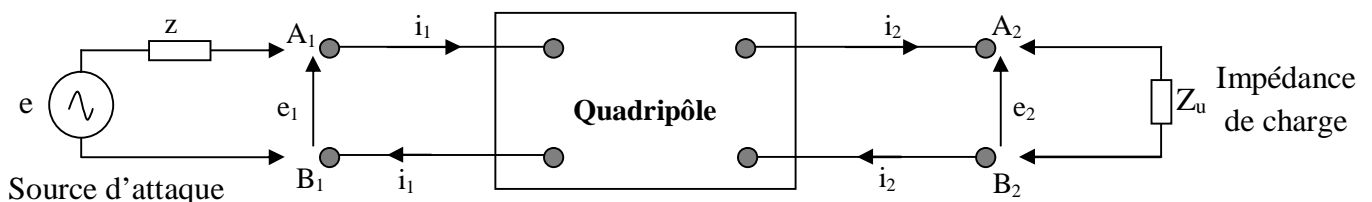


Fig. 2 Représentation avec source et charge

1.2. Utilisation des quadripôles :

L'avantage d'étudier **les quadripôles** est qu'on va poser les problèmes sous forme matricielle : facile à résoudre numériquement.

L'étude des quadripôles nous permet de définir ce qu'est une impédance d'entrée et ce qu'est une impédance de sortie.

Par ailleurs, dans le cours de **Electronique II**, nous verrons que l'on peut modéliser des semi-conducteurs par un schéma électrique de type quadripôle, et lorsque les propriétés physiques des semi-conducteurs changent, le schéma électrique du quadripôle change.

1.3. Gain en tension et en courant

On se limite au cas des tensions continues et sinusoïdales.

1.4. Gain en tension

$$G_v = \frac{e_2}{e_1}$$

Si e_1 et e_2 sinusoïdales on fait le rapport des valeurs max et efficaces. On exprime souvent le gain en tension en **décibels (dB)**.

$$g_v = 20 \log_{10} G_v$$

Exemple : si $G_v=20$ alors : $g_v = 20 \log_{10}(20) = 20(1 + 0.3) = 26 \text{ dB}$

1.5. Gain en courant

$$G_i = \frac{i_2}{i_1}$$

Le gain en dB est définie par :

$$g_i = 20 \log_{10} G_i$$

1.6. Etude d'un exemple

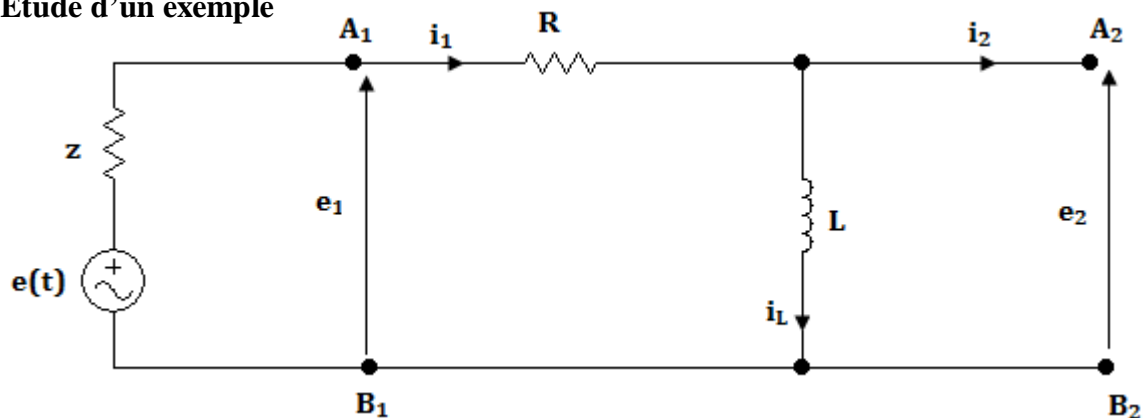


Fig. 3 Exemple pour calcul du gain en tension

Quadripôle ne débitant sur aucune charge, alimenté par une f.é.m. $e(t)$ et d'impédance interne z .

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \Rightarrow G_v = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

$$g_v = 20 \log_{10} G_v \Rightarrow g_v = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{L^2\omega^2} + 1}}$$

$$g_v = -10 \log_{10} \left(1 + \frac{R^2}{L^2 \omega^2} \right)$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \text{ sachant que } \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{L\omega}{0} = \infty \Rightarrow \varphi_1 = \operatorname{artg}(\infty) = \frac{\pi}{2} \text{ et } \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{L\omega}{R} \Rightarrow \varphi_2 = \operatorname{artg} \left(\frac{L\omega}{R} \right)$$

$$\text{Alors } \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{artg} \left(\frac{L\omega}{R} \right)$$

$$g_v = -10 \log_{10} \left(1 + \frac{R^2}{L^2 \omega^2} \right)$$

- Si $\omega \rightarrow 0$ (TBF : très basses fréquences) $\Rightarrow g_v \rightarrow -\infty$ et $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$
- Si $\omega \rightarrow \infty$ (THF : très hautes fréquences) $\Rightarrow g_v = 0$ et $\varphi \rightarrow 0$
- Si $\omega = \frac{R}{L}$ (fréquence de coupure) $\Rightarrow g_v = -3\text{dB}$ et $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}$

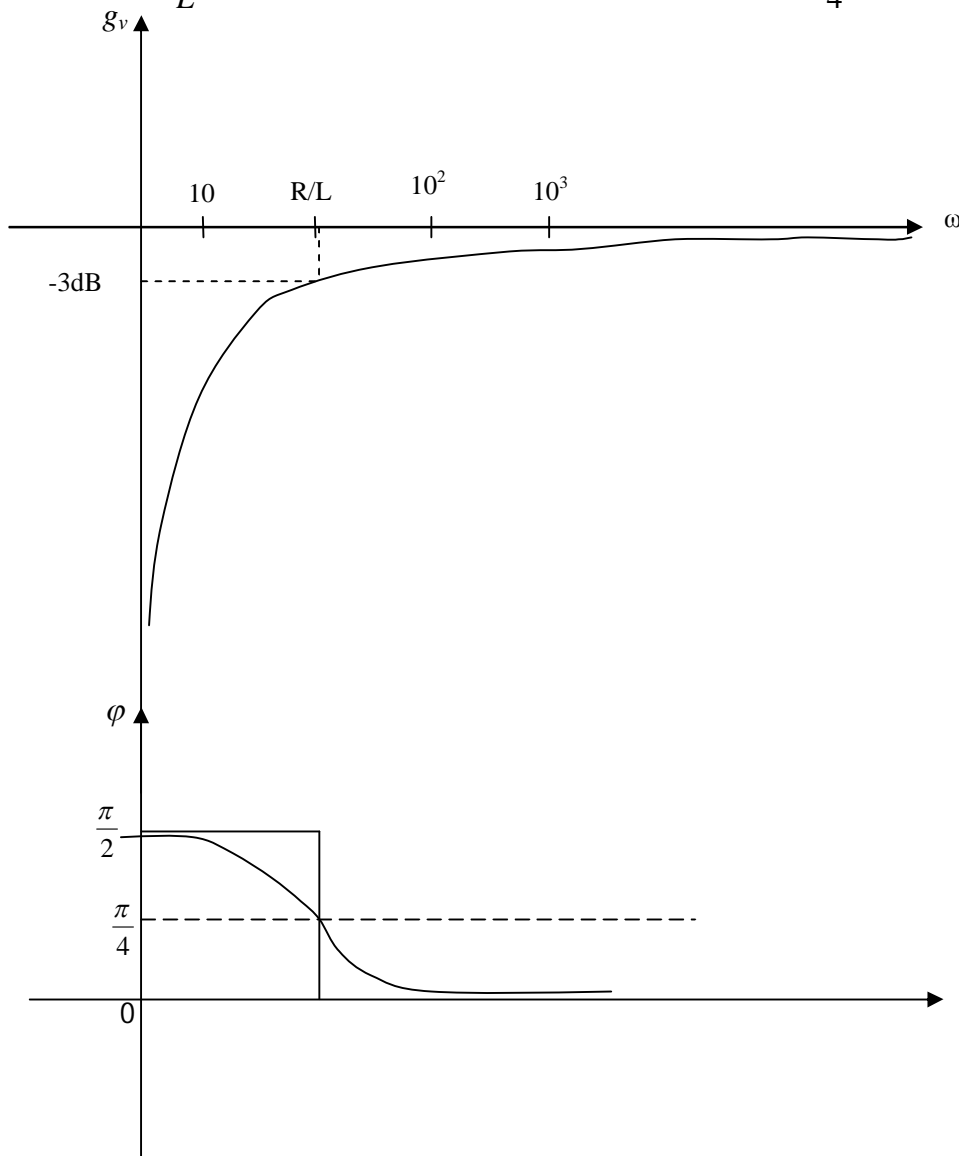


Fig. 4 Tracé de Bode du gain en tension

2. Impédance d'entrée et de sortie du quadripôle

2.1. Impédance d'entrée

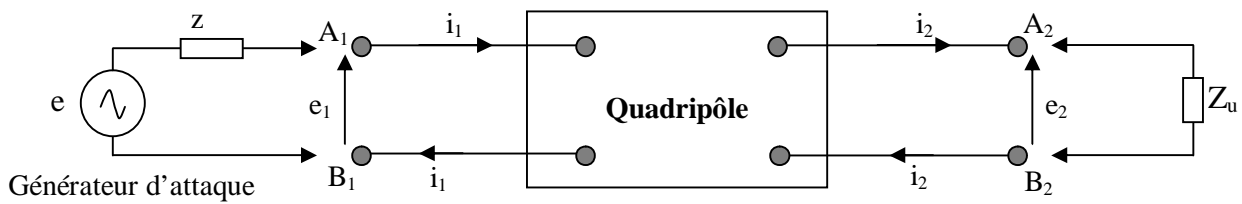


Fig. 5 Calcul d'impédance d'entrée

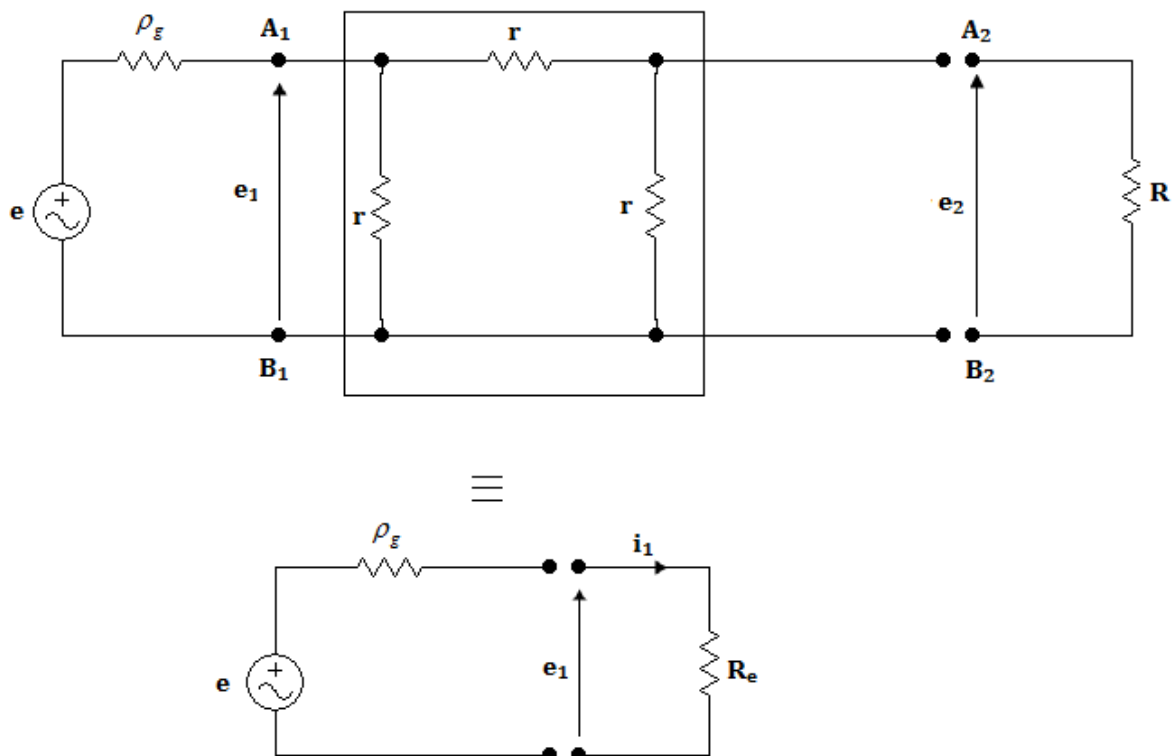
Pour le générateur le quadripôle se comporte comme une impédance Z_e tel que :

$$E_1 = Z_e I_1$$

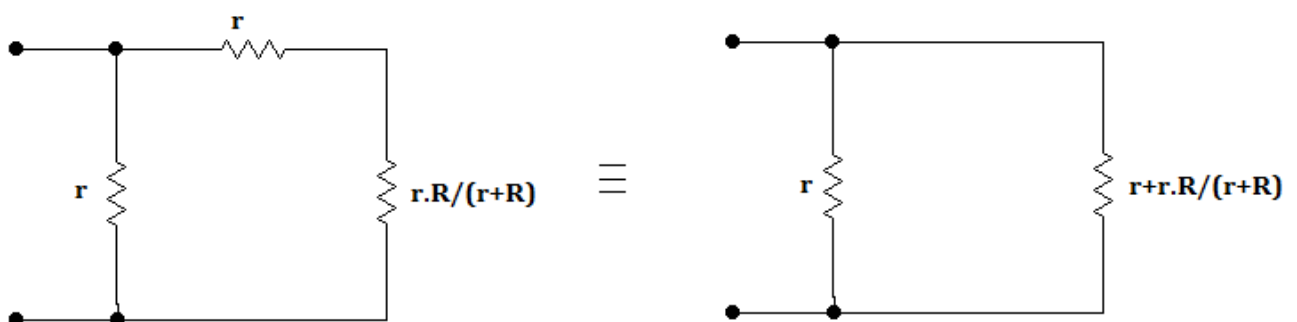
Z_e : impédance d'entrée du quadripôle fermée sur la charge Z_u .

Exemple :

Détermination de la résistance d'entrée du montage :



Le problème est de trouver R_e tel que le même générateur avec la même ρ_g fermé sur R_e , fournira e_1 et i_1 .



$$R_e = \frac{r \left(r + \frac{r.R}{r+R} \right)}{r + r + \frac{r.R}{r+R}}$$

Cas particulier :

Si $R=0$ (sortie en court circuit $e_2=0$) $\Rightarrow R_e = \frac{r}{2}$

Si $R \rightarrow \infty$ (sortie ouverte $i_2=0$) $\Rightarrow R_e = \frac{2r}{3}$

2.2.Impédance de sortie

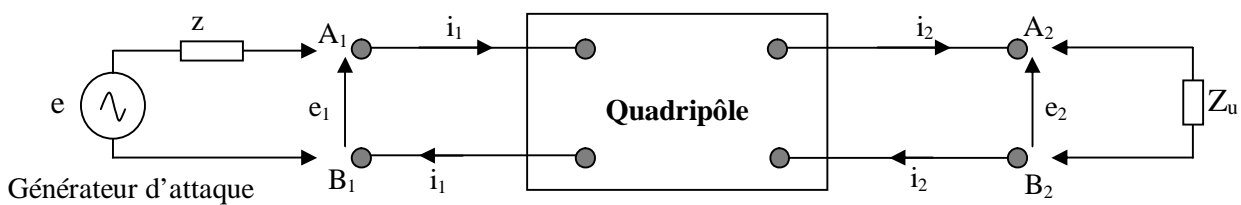
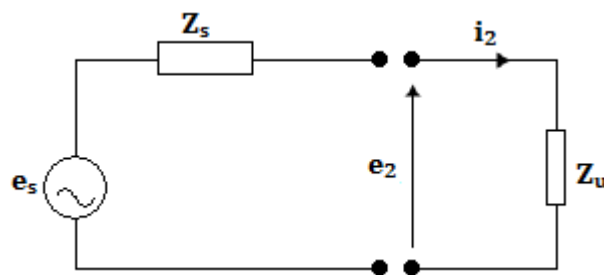


Fig. 6 Calcul d'impédance de sortie

Pour la charge Z_u , le quadripôle alimenté par le générateur, se comporte lui même comme un générateur de Thevenin, faisant circuler un courant i_2 dans la charge.

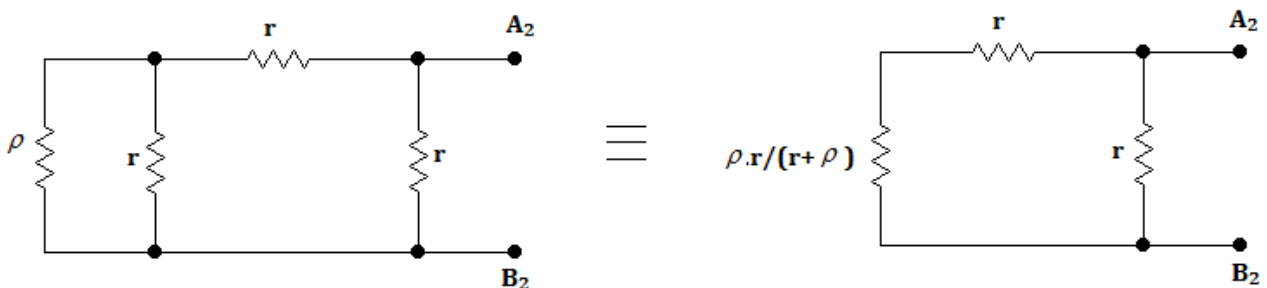
L'impédance équivalente de ce générateur est appelée impédance de sortie du quadripôle Z_s .



Exemple :

Calculons l'impédance de sortie du cas précédent.

On débranche la charge et on court circuit le générateur :



$$R_s = \frac{r \left(r + \frac{r \cdot \rho}{r + \rho} \right)}{r + r + \frac{r \cdot \rho}{r + \rho}}$$

Si $\rho=0$ (entrée en court circuit $e_1=0$) $\Rightarrow R_s = \frac{r}{2}$

Si $\rho \rightarrow \infty$ (entrée ouverte $i_1=0$) $\Rightarrow R_s = \frac{2r}{3}$

3. Matrice d'un quadripôle

Dans un quadripôle linéaire, les equations entre E_1 , E_2 , I_1 , I_2 sont linéaires, si on fixe l'une de ces grandeurs, les deux autres seront fixes, l'écriture la plus simple est une écriture matricielle.

3.1. Les matrices utilisés

3.1.1. Matrice impédance

On considère que les quadripôles regissent de façon linéaire.

$$\begin{cases} E_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ E_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

Matrice impédance: $(Z) = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$

On remarque que si : $i_2=0$:

$$\Rightarrow E_1 = Z_{11}I_1 \Rightarrow Z_{11} = \frac{E_1}{I_1}$$

Z_{11} : impédance d'entrée, sortie à vide (circuit ouvert)

$$Z_{12} = \left. \frac{E_1}{I_2} \right|_{i_1=0} : \text{Impédance de transfert inverse en circuit ouvert.}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{E_2}{I_1} \right|_{i_2=0} : \text{Impédance de transfert (direct) en circuit ouvert.}$$

$$Z_{22} = \left. \frac{E_2}{I_2} \right|_{i_1=0} : \text{Impédance de sortie entrée à vide (circuit ouvert).}$$

A l'aide de la définition des paramètres d'impédance, on peut maintenant donner un schéma équivalent de la boîte noire qui représente le quadripôle.

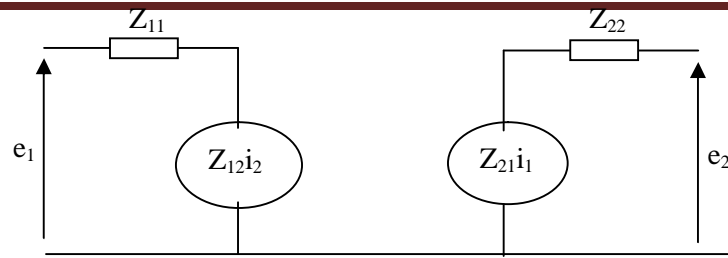


Fig. 7 schéma équivalent de la matrice impédance

Exemple :

Nous déterminons les paramètres Z du quadripôle de la figure suivante :

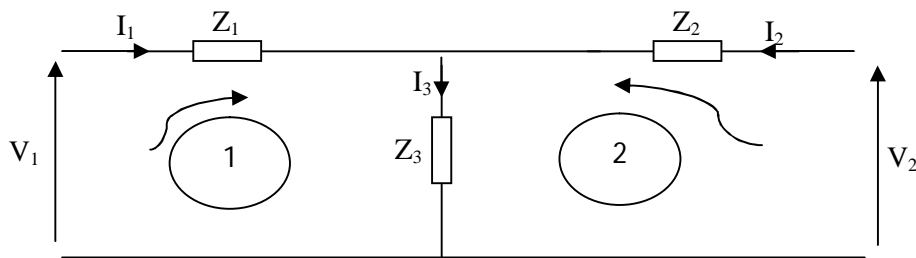


Fig. 8 quadripôle en T

Nous appliquons la loi de Kirchhoff aux deux mailles :

$$V_1 = Z_1 I_1 + Z_3 I_3 = Z_1 I_1 + Z_3 (I_1 + I_2) = (Z_1 + Z_3) I_1 + Z_3 I_2$$

$$V_2 = Z_2 I_2 + Z_3 I_3 = Z_2 I_2 + Z_3 (I_1 + I_2) = Z_3 I_1 + (Z_2 + Z_3) I_2$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

3.1.2. Matrice admittance

L'expression des courants d'entrée et de sortie en fonction des tensions d'entrée et de sortie donne (Y).

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} E_1 + Y_{12} E_2 \\ I_2 = Y_{21} E_1 + Y_{22} E_2 \end{cases}$$

Matrice admittance: $(Y) = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$

On remarque que si : $E_2=0$:

$$\Rightarrow I_1 = Y_{11} E_1 \Rightarrow Y_{11} = \frac{I_1}{E_1}$$

Y_{11} : admittance d'entrée, sortie en court circuit ($E_2=0$)

$Y_{22} = \frac{I_2}{E_2}$: admittance de sortie, entrée en court circuit ($E_1=0$).

A l'aide de la définition des paramètres d'impédance, on peut maintenant donner un schéma équivalent de la boîte noire qui représente le quadripôle.

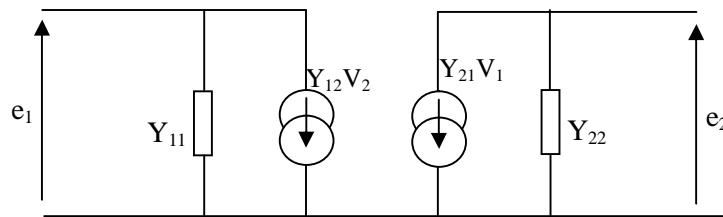


Fig. 9 schéma équivalent de la matrice admittance

Exemple :

Prenons le quadripôle en Π de la figure suivante, et appliquons les lois de Kirchoff aux nœuds d'entrée et de sortie, nous obtenons :

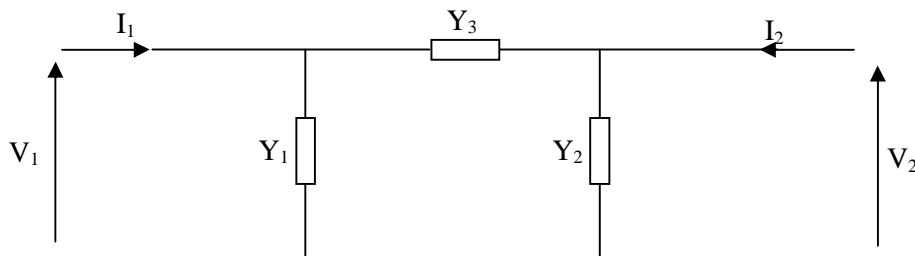


Fig. 8 quadripôle en Π

$$I_1 = Y_1 V_1 + Y_3 (V_1 - V_2) = (Y_1 + Y_3) V_1 - Y_3 V_2$$

$$I_2 = Y_2 V_2 + Y_3 (V_2 - V_1) = -Y_3 V_1 + (Y_2 + Y_3) V_2$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

3.1.3. Matrice caractéristique

Elle donne les grandeurs de sortie en fonction des grandeurs d'entrée :

$$\begin{cases} E_2 = \gamma_{11} E_1 + \gamma_{12} I_1 \\ I_2 = \gamma_{21} E_1 + \gamma_{22} I_1 \end{cases}$$

$$(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

γ_{11} : gain en tension, entrée ouverte ($I_1=0$)

γ_{21} : gain en courant, entrée en court circuit ($E_1=0$)

3.1.4. Matrice de transfert

Elle donne les grandeurs d'entrée en fonction des grandeurs de sortie:

$$\begin{cases} E_1 = T_{11}E_2 + T_{12}I_2 \\ I_1 = T_{21}E_2 + T_{22}I_2 \end{cases}$$

$$(T) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{T_{11}}$: gain en tension, sortie ouverte ($I_2=0$)

$\frac{1}{T_{22}}$: gain en courant, sortie en court circuit ($E_2=0$)

3.1.5. Matrice hybride

Elle est très utilisée dans l'étude des transistors :

$$\begin{cases} E_1 = h_{11}I_1 + h_{12}E_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}E_2 \end{cases}$$

$$(h) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

h_{11} : impédance d'entrée, sortie en court circuit

h_{21} : gain en courant, sortie en court circuit

$\frac{1}{h_{12}}$: gain en tension, entrée ouverte

$\frac{1}{h_{22}}$: impédance de sortie, entrée ouverte

Le schéma équivalent du quadripôle en utilisant les paramètres h_{ij} est :

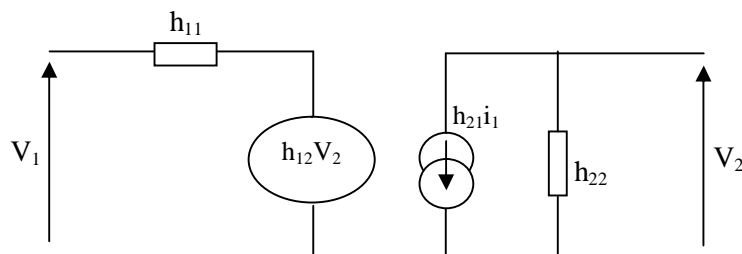


Fig. 10 schéma équivalent de la matrice hybride

3.2. Exemple de calcul de matrice

3.2.1. Impédance série

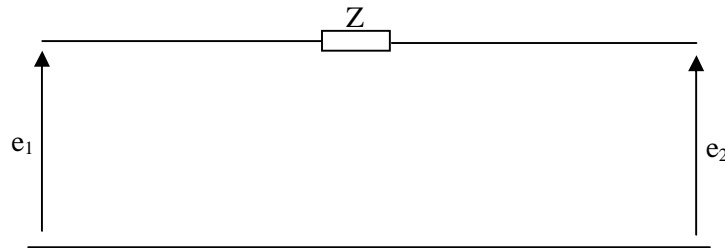


Fig. 11 schéma d'impédance série

$$\begin{cases} I_1 = I_2 \\ E_2 - E_1 = -ZI_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = 0.E_2 + 1.I_2 \\ E_1 = 1.E_2 + Z.I_2 \end{cases} \Rightarrow (T) = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2.2. Impédance parallèle

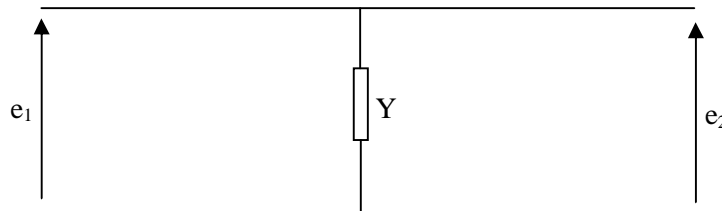
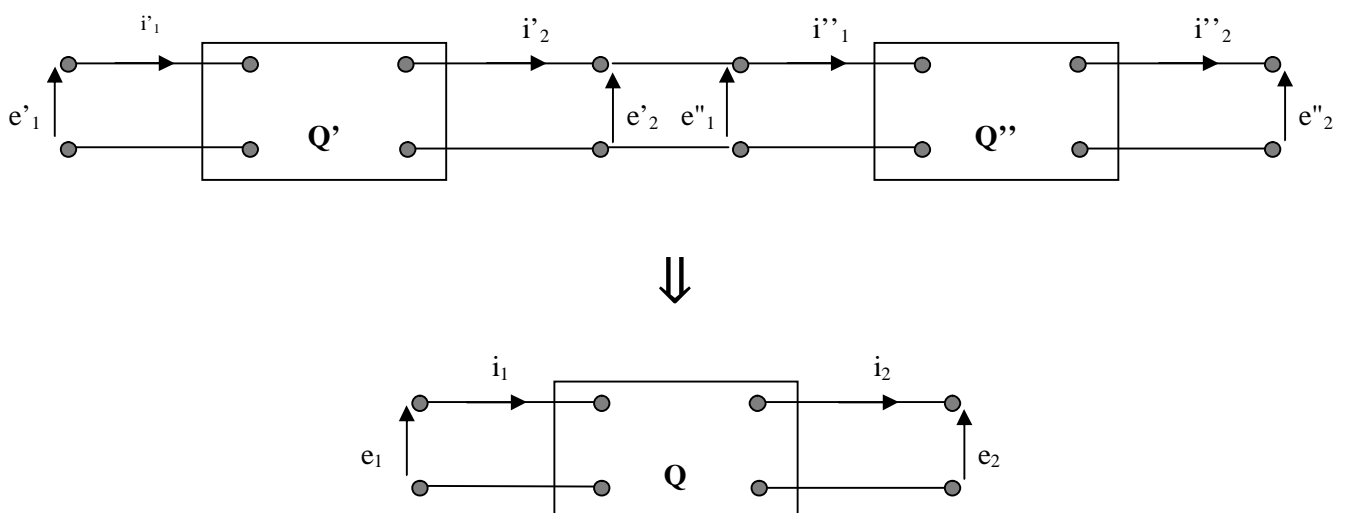


Fig. 12 schéma d'impédance parallèle

$$\begin{cases} E_1 = 1.E_2 + 0I_2 \\ I_1 = Y.E_1 + 1.I_2 \end{cases} \Rightarrow (T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix}$$

3.3. Association de quadripôles

3.3.1. Association en cascade



Les relations suivantes sont alors vérifiées:

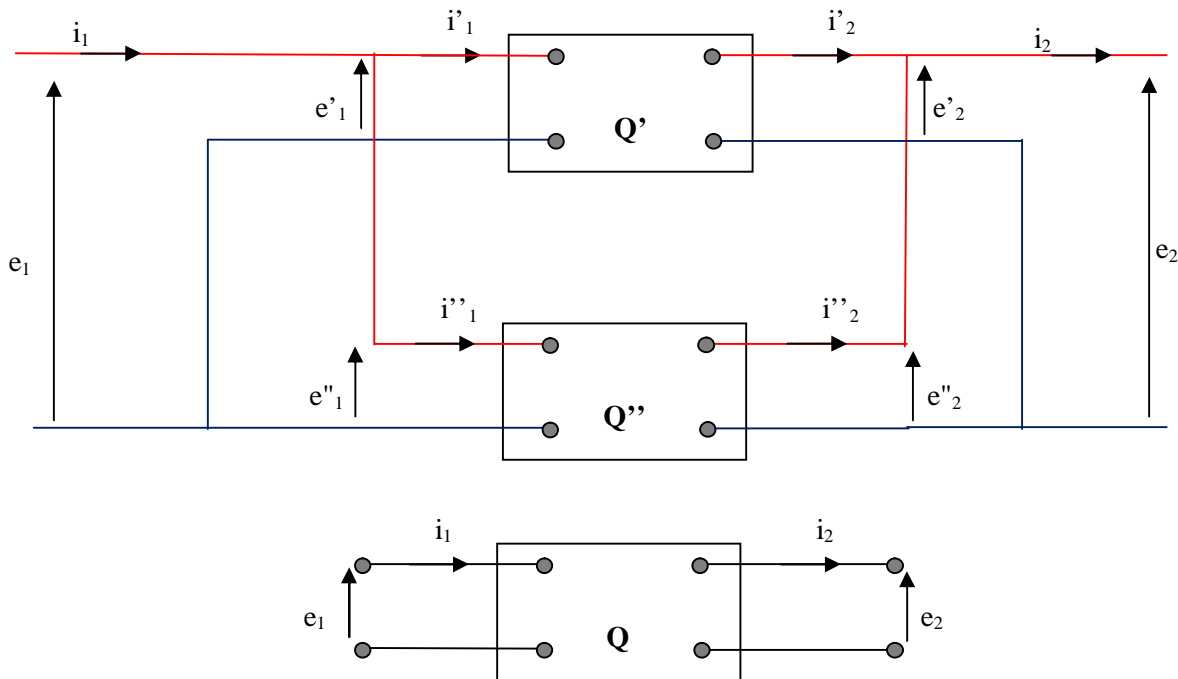
$$e_1 = e'_1, i_1 = i'_1, i_2 = i''_1, e_2 = e''_2, i_2 = i_2, e_2 = e_1$$

Comme:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ i'_1 \end{pmatrix} = (T') \begin{pmatrix} e_2 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} e''_1 \\ i''_1 \end{pmatrix} = (T'') \begin{pmatrix} e_2 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} e_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = (T') (T'') \begin{pmatrix} e_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = (T) \begin{pmatrix} e_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

$$(T) = (T') (T'')$$

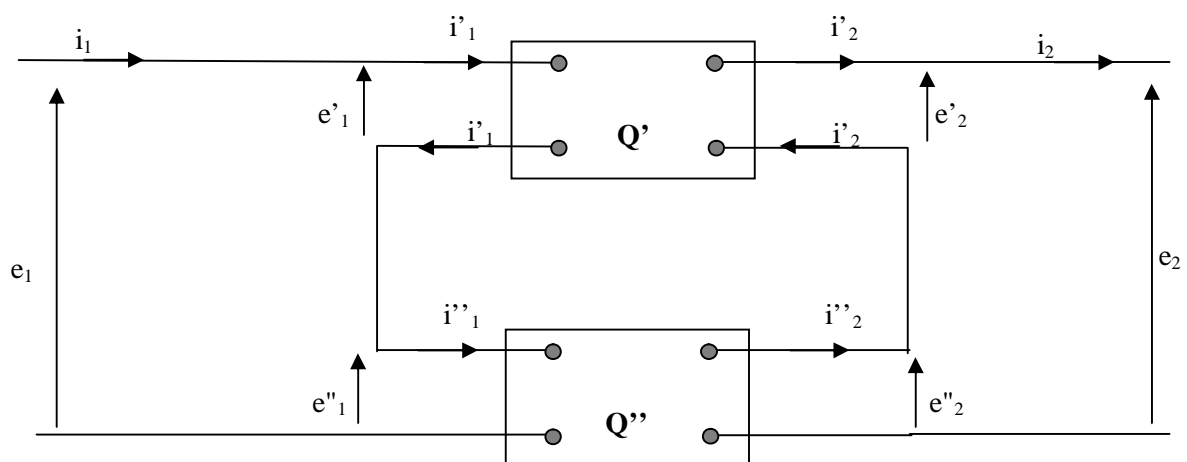
3.3.2. Association en parallèle



$$e_1 = e'_1 = e''_1, e_2 = e'_2 = e''_2$$

$$\begin{aligned} i_1 &= i'_1 + i''_1 \\ i_2 &= i'_2 + i''_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = (Y) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = (Y' + Y'') \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

3.3.3. Association en série



$$i_1 = i_1' = i_1'', \quad i_2 = i_2' = i_2''$$

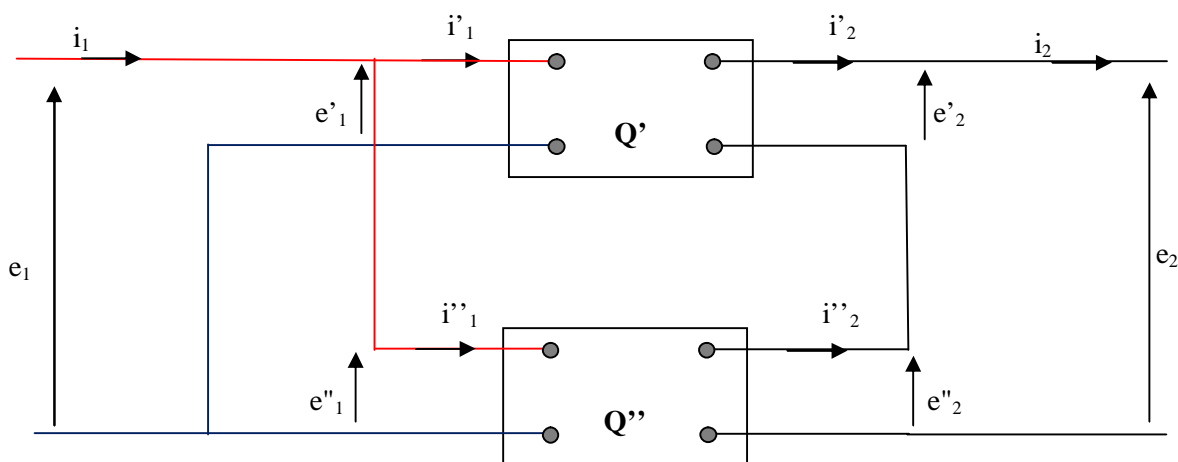
$$e_1 = e_1' + e_1'', \quad e_2 = e_2' + e_2''$$

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = (Z') \begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_1'' \\ e_2'' \end{pmatrix} = (Z'') \begin{pmatrix} i_1'' \\ i_2'' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = (Z) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = (Z' + Z'') \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

3.3.4. Association série-parallèle

Les entrées en séries et les sorties en parallèles.



$$i_1 = i_1' = i_1'', \quad i_2 = i_2' + i_2''$$

$$e_1 = e_1' + e_1'', \quad e_2 = e_2' = e_2''$$

On choisit les matrices hybrides qui donnent e_1 et i_2 en fonction de e_2 et i_1

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = (h') \begin{pmatrix} i_1' \\ e_2' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_1'' \\ i_2'' \end{pmatrix} = (h'') \begin{pmatrix} i_1'' \\ e_2'' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} e_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = (h) \begin{pmatrix} i_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = (h' + h'') \begin{pmatrix} i_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

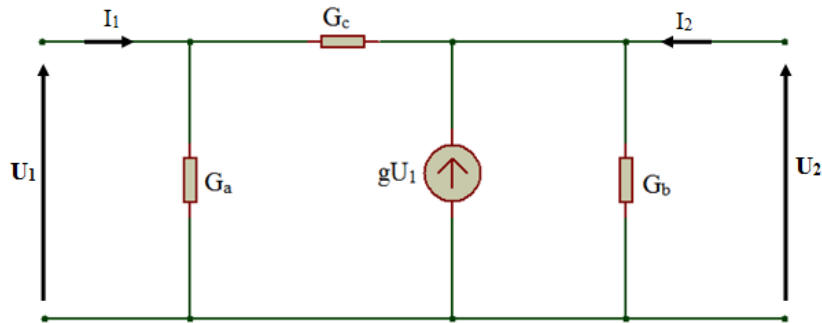
Passage d'une matrice à une autre

	T	Z	Y	h
T	$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_{11}/Z_{21} & -\Delta Z/Z_{21} \\ 1/Z_{21} & -Z_{22}/Z_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -Y_{22}/Y_{21} & 1/Y_{21} \\ -\Delta Y/Y_{21} & Y_{11}/Y_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\Delta h/h_{21} & -h_{11}/h_{21} \\ -h_{22}/h_{21} & -1/h_{21} \end{bmatrix}$
Z	$\begin{bmatrix} T_{11}/T_{21} & \Delta T/T_{21} \\ 1/T_{21} & T_{22}/T_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{22}/\Delta Y & -Y_{12}/\Delta Y \\ -Y_{21}/\Delta Y & Y_{11}/\Delta Y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \Delta h/h_{22} & h_{12}/h_{22} \\ -h_{21}/h_{22} & 1/h_{22} \end{bmatrix}$
Y	$\begin{bmatrix} T_{22}/T_{12} & -\Delta T/T_{12} \\ -1/T_{12} & T_{11}/T_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Z_{22}/\Delta Z & -Z_{12}/\Delta Z \\ -Z_{21}/\Delta Z & Z_{11}/\Delta Z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/h_{11} & -h_{12}/h_{11} \\ h_{21}/h_{11} & \Delta h/h_{11} \end{bmatrix}$
h	$\begin{bmatrix} T_{12}/T_{22} & \Delta T/T_{22} \\ -1/T_{22} & T_{21}/T_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \Delta Z/Z_{22} & Z_{12}/Z_{22} \\ -Z_{21}/Z_{22} & 1/Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/Y_{11} & -Y_{12}/Y_{11} \\ Y_{21}/Y_{11} & \Delta Y/Y_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$

TD N°01 Les quadripôles

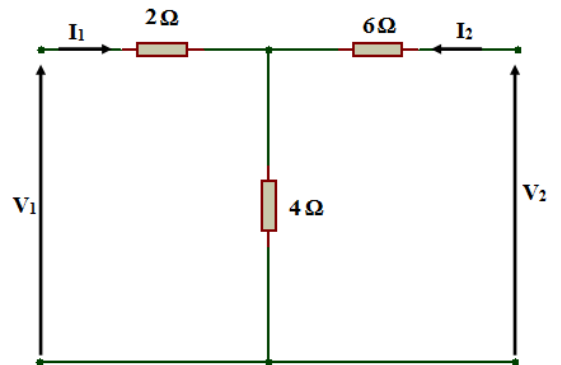
Exercice 01 :

Déterminer la matrice (Y) du quadripôle suivant :



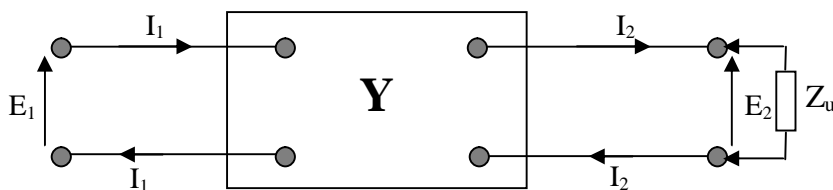
Exercice 02 :

- Déterminer la matrice (Z) du circuit suivant, puis la matrice de transfert (T).
- Connaissant (Z), déterminer les matrices (Y) et (H).



Exercice 03 :

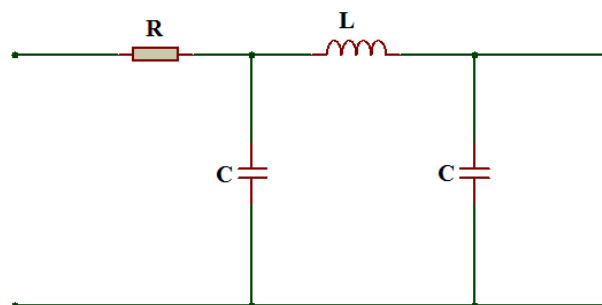
Soit un quadripôle de matrice admittance (Y), fermé sur une charge Z_u .



Déterminer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que i_2 soit nul quelque soit Z_u est $y_{21}=0$.

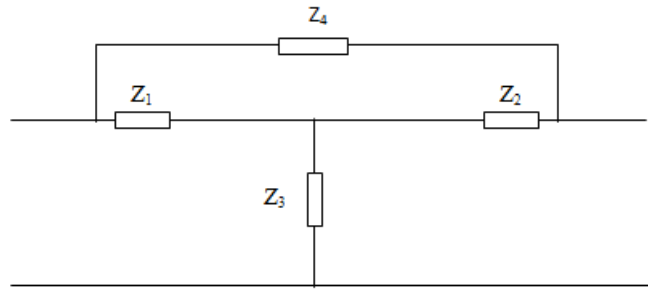
Exercice 04 :

Calculer la matrice de transfert du quadripôles suivant :



Execice 05 :

Calculer la matrice admittance du quadripôle en T penté.



Execice 06 :

1. Trouver la matrice de transfert (T) du quadrupole de la figure.1

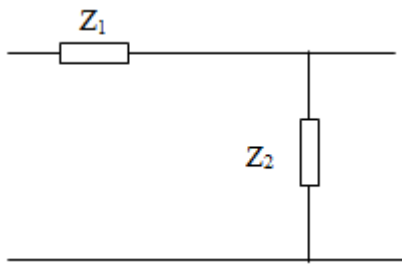


Figure 1

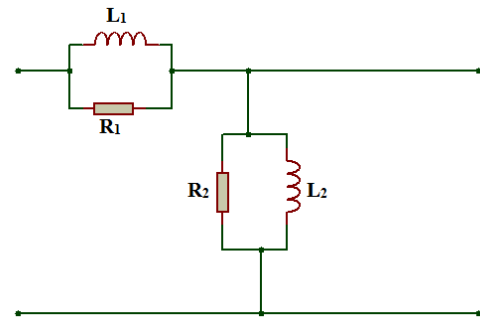


Figure 2

2. Calculer le gain en tension G_V (sortie ouverte) du circuit de la figure.2 et le mettre sous la forme :

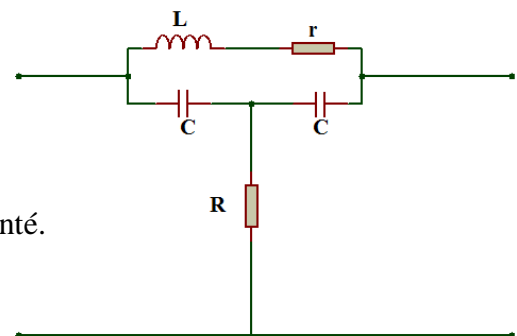
$$G_V = G_0 \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}$$

Quelles sont les expressions de : G_0 , ω_1 et ω_2 . AN : $L_1=5H$, $L_2=4H$, $R_1=2K\Omega$, $R_2=10K\Omega$.

3. Tracer la courbe de bode $g_v=f(\omega)$.

Execice 07:

Soit le quadriple suivant :



Montrer qu'on peut le considéré comme une cellule en T penté.

1. Calculer la matrice admittance de ce quadripôle.
2. Calculer le gain en tension du quadripôle G_V .
3. Calculer la pulsation (notée ω_0) pour $E_2=0$.
4. Quelle relation existe alors entre R , L , C et r .
5. Tracer les courbes de $g_v=f(\omega)$ et $\varphi=f(\omega)$, on posera : $X=\omega/\omega_0$, $Q=L\omega_0/r$.

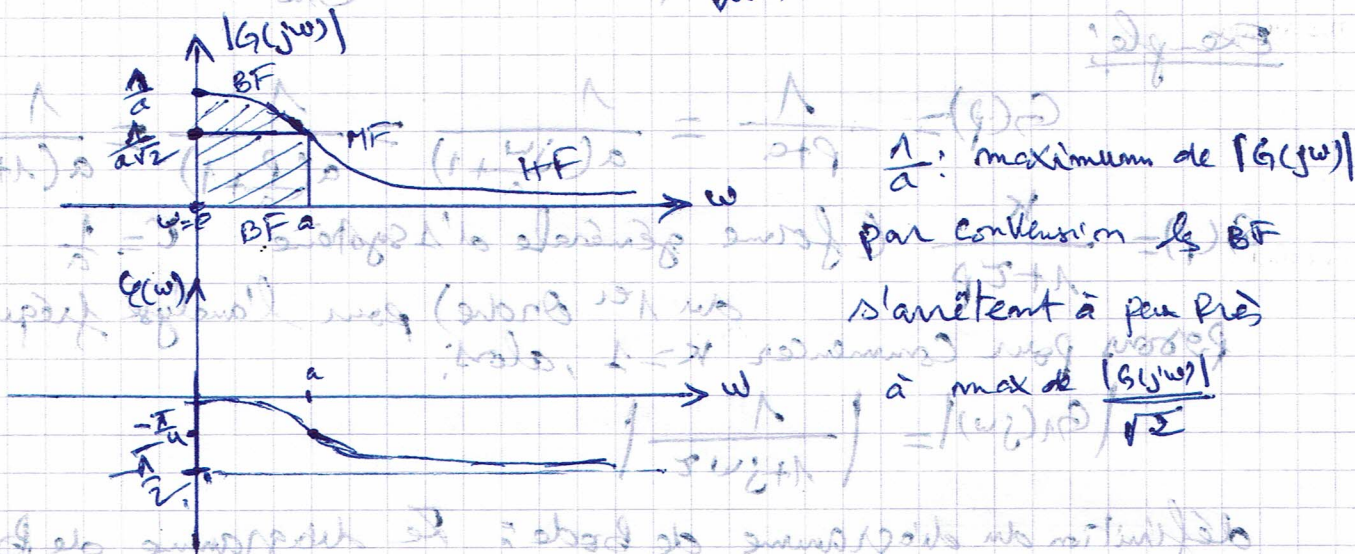
Diagramme de Bode

Nous allons voir la représentation dans deux plans :

- plan 1 : $|G(j\omega)|$
- plan 2 : $\angle G(j\omega)$

Exemple : $G(p) = \frac{1}{p+a} = \frac{1}{a(p+\frac{1}{a})}$

$G(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$, $|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$, $\angle G(j\omega) = -\text{tg}^{-1}(\frac{\omega}{a})$



Remarque en général, on trace la réponse fréquentielle sur une large plage de fréquences, pour cela il faut travailler sur un moyen pour réduire l'échelle des abscisses.

$G(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)}$, $G(j\omega) = \frac{1}{ab} \frac{1}{(\frac{j\omega}{a}+1)(\frac{j\omega}{b}+1)}$

$|G(j\omega)| = \frac{1}{ab} \left| \frac{1}{(\frac{j\omega}{a}+1)} \times \frac{1}{(\frac{j\omega}{b}+1)} \right|$

$\angle G(j\omega) = -\angle \frac{j\omega}{a}+1 - \angle \frac{j\omega}{b}+1$

$G(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$, $G(j\omega) = \frac{1}{abc} \frac{1}{(\frac{j\omega}{a}+1)(\frac{j\omega}{b}+1)(\frac{j\omega}{c}+1)}$

$|G(j\omega)| = \frac{1}{abc} \left| \frac{1}{(\frac{j\omega}{a}+1)} \times \frac{1}{(\frac{j\omega}{b}+1)} \times \frac{1}{(\frac{j\omega}{c}+1)} \right|$

$\angle G(j\omega) = -\angle \frac{j\omega}{a}+1 - \angle \frac{j\omega}{b}+1 - \angle \frac{j\omega}{c}+1$

Ainsi à chaque fois il faut recalculer le module $|G(j\omega)|$

Remarque: il faut alors trouver une méthode qui nous permet de tracer $|G(j\omega)|$ sans recalculer cette valeur. Pour répondre à ces remarques 1 et 2, Bode a proposé de tracer $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ au lieu de $|G(j\omega)|$ et d'utiliser une échelle logarithmique.

Rappelons qu'abord que $|G(j\omega)| = \frac{B}{A}$ sans unité. Par convention les radio-électroniciens ont donné une unité : le décibel, qui est $20 \log_{10} |G(j\omega)|$.

Exemple:

$$G(p) = \frac{1}{p + a} = \frac{1}{a(\frac{p}{a} + 1)} = \frac{1}{a(\frac{p}{a} + 1)} = \frac{1}{a(1 + \tau p)}$$

$G(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$ (forme générale d'un système du 1^{er} ordre) pour l'analyse fréquentielle. Pour commencer $k=1$, alors:

$$|G_1(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right|$$

définition du diagramme de Bode: Le diagramme de Bode

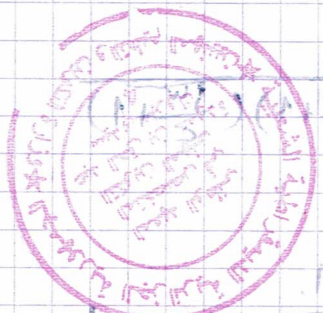
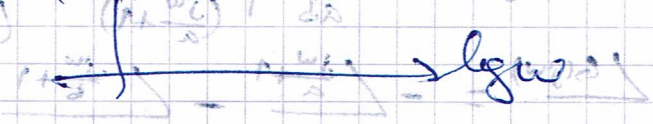
consiste à tracer la réponse fréquentielle en deux graphes,

1) $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ sur une échelle semi-logarithmique,

c.à.d. en abscisse on utilise $\log_{10} \omega$ au lieu de ω ,

Par convention $20 \log_{10} |G(j\omega)| = G_{dB}$.

2) $\angle G(j\omega)$ sur une échelle semi-logarithmique.



Retournons à notre exemple:

$$G_1(p) = \frac{1}{1+\tau p} \rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

$$G_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1+j\omega\tau} \right|$$

$$= 20 \log_{10} \left[\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \right]$$

$$= 20 \log_{10} (1+\omega^2\tau^2)^{-1/2}$$

$$G_{dB} = -10 \log_{10} (1+\omega^2\tau^2)$$

Analyse Asymptotique:

Définitions $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

$$G_{dB} = -10 \log_{10} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right)$$

de plus définissons les basses fréquences par: $\omega \ll \omega_c$ BF

les hautes fréquences par $\omega \gg \omega_c$ HF

Étudions G_{dB} aux BF et aux HF.

BF: $G_{dB} = -10 \log_{10} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right) = -10 \log_{10} (1) = 0 \text{ dB}$

aux BF $G_{dB} \approx 0$

HF: $G_{dB} = -10 \log_{10} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right) = -10 \log_{10} \left(\frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right) = -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)$

$$G_{dB} = -20 \left[\log_{10} \omega - \log_{10} \omega_c \right]$$

si nous traçons $G_{dB, HF}$ en fonction de $\log_{10} \omega$.

on peut poser: $X = \log_{10} \omega$.

$$G_{dB} = -20X + A, \quad A = 20 \log_{10} \omega_c = \text{cte.}$$

c'est l'équation d'une droite

Calculons l'équation la pente de cette droite:

$$G_{dB} = -20 \log_{10} \omega + 20 \log_{10} \omega_c$$

mais alors calculer G_{dB} pour $\omega = 10\omega_c$ (décade).

$$G_{dB} = -20 \log_{10} 10\omega_c + 20 \log_{10} \omega_c = -20 \log_{10} 10 - 20 \log_{10} \omega_c + 20 \log_{10} \omega_c$$

$$G_{dB, HF} = -20 \text{ dB}$$

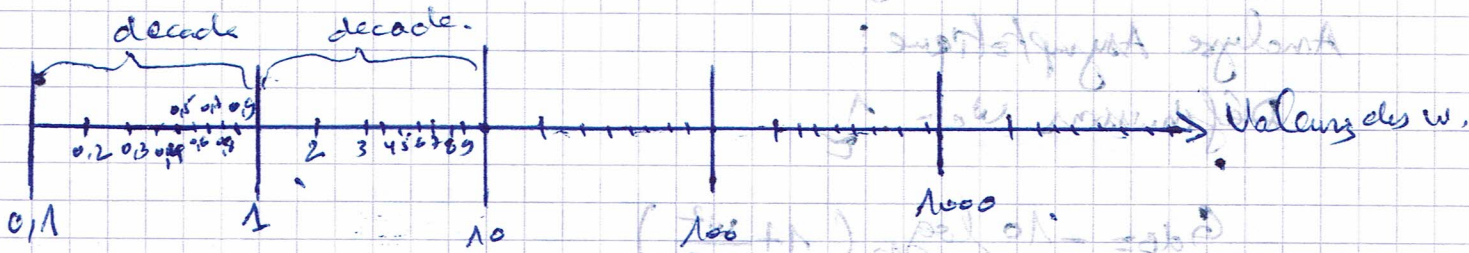
L'asymptote aux HF ($\omega \gg \omega_c$) est une droite de pente:

-20 dB / decade. $\dots = (w)^2 \leftarrow \dots = (w)^2$

BF: $\omega \ll \omega_c$ asymptote 0.

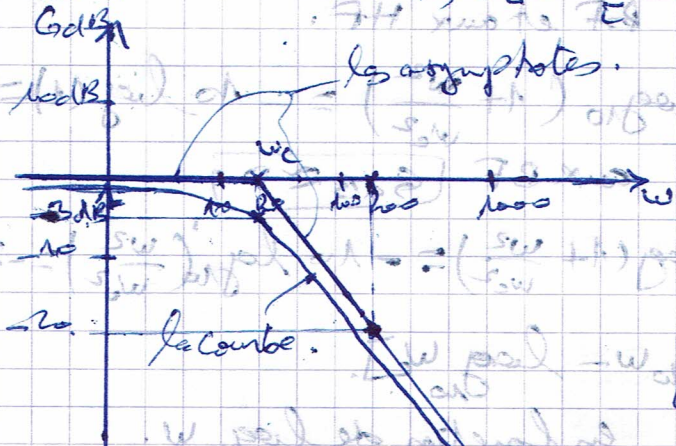
HF: $\omega \gg \omega_c$ asymptote: droite de pente -20 dB / decade.

Tracer en échelle semi-logarithmique.



$$G(p) = \frac{1}{1+p\tau}$$

Soit: $\tau = 0,05 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{\tau} = 20 \text{ rad/s}$



w	GdB
w _c = 20	-3 dB
30	-3,5
35	-3,8
200	-20 dB

$G_{dB} = -10 \log\left(\frac{1+w^2}{w_c^2}\right)$
 $w = w_c \Rightarrow G_{dB} = -3 \text{ dB}$

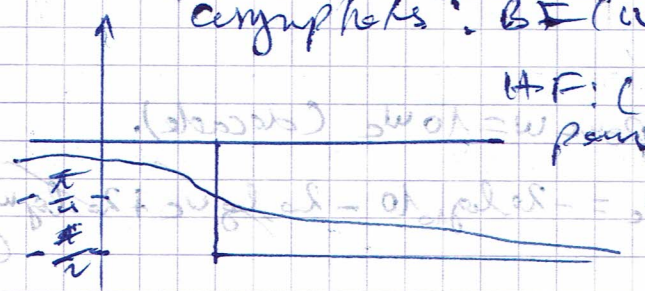
La courbe réelle est très proche de l'asymptote pour les parties supérieures du graphique on trace les asymptotes.

$$G(p) = \frac{1}{1+p\tau}$$

$$\angle(G(j\omega)) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = -\arctg(\omega\tau)$$

asymptotes: BF ($\omega \ll \omega_c$) $\rightarrow \angle(G(j\omega)) \rightarrow 0$

HF: ($\omega \gg \omega_c$) $\angle(G(j\omega)) \rightarrow -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$
 pour $w = w_c \Rightarrow \angle(G(j\omega)) = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$

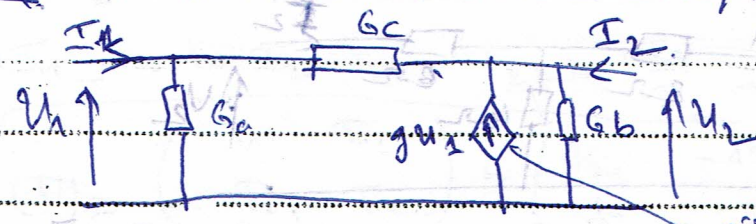


La courbe de phase est assez éloignée il faut alors tracer les asymptotes et la courbe réelle.

TD : Quadripôles

(2)

Exercice 1: Déterminer la matrice $[Y]$ du quadripôle:



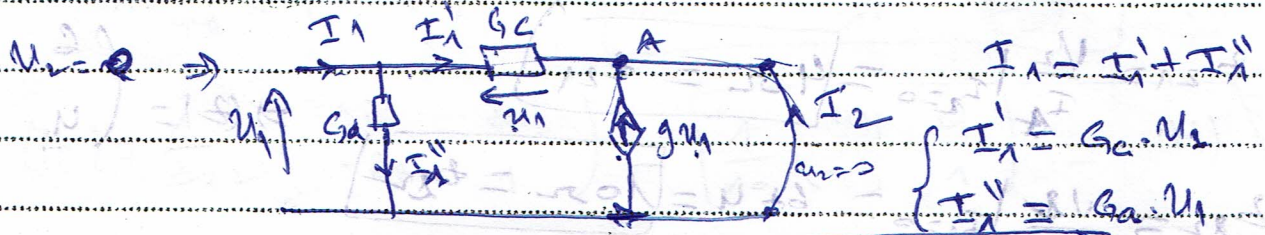
générateur de courant.

rappel:
$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1 = y_{11} U_1 + y_{12} U_2 \\ I_2 = y_{21} U_1 + y_{22} U_2 \end{cases}$$

$$y_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{U_2=0}$$

$$y_{21} = \frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_2=0}$$

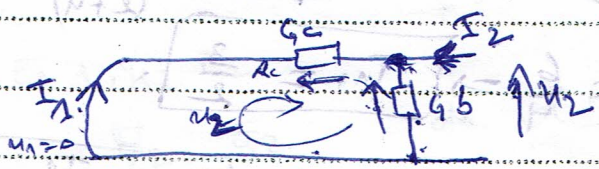


$$\Rightarrow I_1 = (G_a + G_c) U_1 \Rightarrow \boxed{\frac{I_1}{U_1} = G_a + G_c = y_{11}}$$

en A: $I_1' + I_2 + g_m U_1 = 0$
 $I_1' = G_c \cdot U_1 \Rightarrow G_c U_1 + I_2 + g_m U_1 = 0$

$$\Rightarrow (G_c + g) U_1 = -I_2 \Rightarrow \boxed{\frac{I_2}{U_1} = -(G_c + g) = y_{21}}$$

$$y_{12} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0} \quad y_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{U_1=0}$$



$$y_{12} = \frac{I_1}{U_2} = -G_c$$

$$U_2 + \frac{I_1}{G_c} = 0 \Rightarrow U_2 = -\frac{I_1}{G_c} \Rightarrow \boxed{\frac{I_1}{U_2} = -G_c = y_{12}}$$

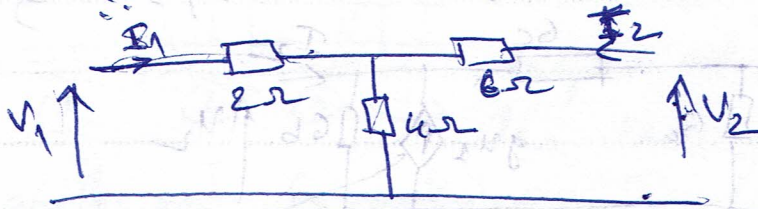
si $U_1=0 \Rightarrow g_m U_1=0 \Rightarrow$ circuit ouvert.

$$U_2 = (R_c \parallel R_b) I_2 \Rightarrow \frac{I_2}{U_2} = \frac{1}{R_c \parallel R_b} \Rightarrow I_2 = G_{eq} \cdot U_2$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{22} = \frac{I_2}{U_2} = G_c + G_b} \Rightarrow \boxed{(Y) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_a + G_c & -G_c \\ -(G_c + g) & G_c + G_b \end{pmatrix}}$$

Exercice 2:

1) Déterminer la matrice $[Z]$ du circuit suivant, puis la matrice de transfert $[T]$



2) Connaissant $[Z]$, déterminer $[Y]$ et $[H]$.

Solution:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = 2 + 4 = 6 \Omega = Z_{11}$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = 4 \Omega = Z_{21}$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = 6 + 4 = 10 \Omega = Z_{22}$$

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = 4 \Omega = Z_{12}$$

$$\Rightarrow [Z] = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

* la matrice $[T]$

$$\begin{cases} V_1 = T_{11} V_2 + T_{12} I_2 \\ I_1 = T_{21} V_2 + T_{22} I_2 \end{cases}$$

$$T_{11} = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} \Rightarrow V_2 = 4 I_1 = 4 \frac{V_1}{2+4} = 4 \frac{V_1}{6} = \frac{2}{3} V_1$$

$$\Rightarrow T_{11} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{6}{4} \Rightarrow T_{11} = \frac{3}{2}$$



$$T_{21} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} \Rightarrow V_2 = 4 I_1 \Rightarrow T_{21} = \frac{I_1}{V_2} = \frac{1}{4}$$

$$T_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{V_2=0} \quad \text{and} \quad T_{22} = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_2=0}$$

maille A : $V_1 = 2 I_1 + 4(I_1 + I_2) \Rightarrow V_1 = 6 I_1 + 4 I_2$ (1)
 maille B : $V_2 = 2 I_1 - 6 I_2$ (2)

$$(1) - 3 \times (2) \Rightarrow -2 V_1 = 22 I_2 \Rightarrow T_{12} = \frac{V_1}{I_2} = -11 = T_{12}$$

$$T_{22} = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{V_2=0} \quad \textcircled{1} = \textcircled{2}$$

$$6I_1 + 4I_2 = 2I_1 - 6I_2$$

$$\Rightarrow 4I_1 = -10I_2 \Rightarrow T_{22} = \frac{I_1}{I_2} = -\frac{10}{4} = \boxed{-\frac{5}{2} = T_{22}}$$

$$\Rightarrow (T) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -11 \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$2) (Y) = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta Z} \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{pmatrix}$$

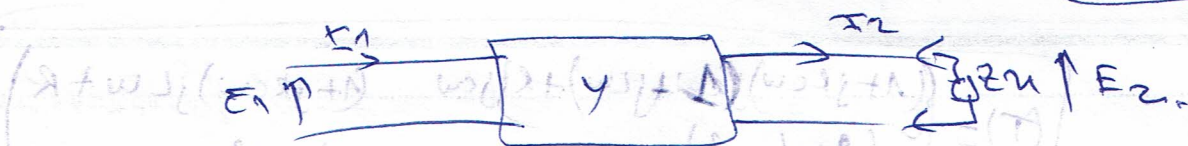
$$\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = 6 \times 10 - 4 \times 4 \Rightarrow \boxed{\Delta Z = 44}$$

$$(Y) = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (Y) = \begin{pmatrix} \frac{5}{22} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{3}{22} \end{pmatrix}$$

$$(H) = \frac{1}{Z_{22}} \begin{pmatrix} \Delta Z & Z_{12} \\ -Z_{21} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 44 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = (H)$$

Exercice 3: Soit un quadripôle de matrice admittance (Y) fermé sur une impédance Z_u .

Déterminer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que I_2 soit nul quelque soit Z_u est $(Y_{21} = 0)$.



$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} E_1 + Y_{12} E_2 \\ I_2 = Y_{21} E_1 + Y_{22} E_2 \end{cases} \quad \text{de plus } E_2 = Z_u I_2$$

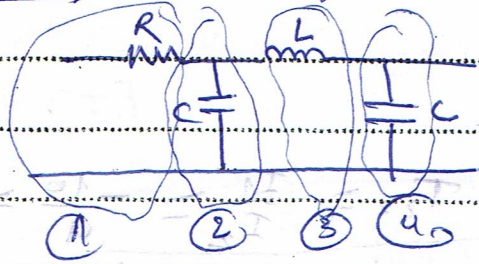
$$\text{* Si } Y_{21} = 0 \Rightarrow I_2 = Y_{22} E_2 = Y_{22} Z_u I_2$$

$$\Rightarrow I_2 (1 - Y_{22} Z_u) = 0 \Rightarrow \forall Z_u \text{ on a } \boxed{I_2 = 0}$$

$$\text{* Si } I_2 = 0 \Rightarrow Y_{21} E_1 + Y_{22} E_2 = Y_{21} E_1 + Y_{22} Z_u I_2 = 0$$

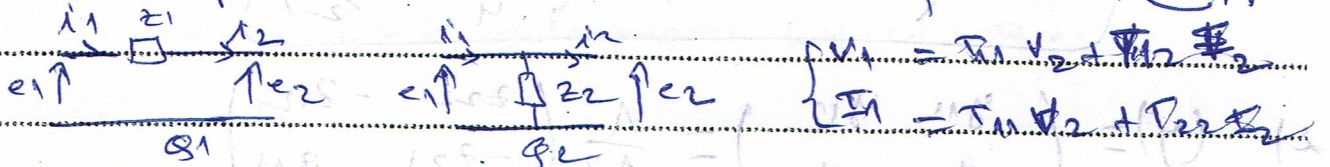
$$\Rightarrow Y_{21} E_1 = 0 \Rightarrow \boxed{Y_{21} = 0}$$

Exercice 14: Calculer la matrice de Transfert du quadripôle suivant



mais pouvons décomposer le quadripôle en 4 cellules élémentaires

question: quelles sont les matrices de Transfert @ et @?



$$\begin{cases} V_1 = T_{11} V_2 + T_{12} I_2 \\ I_1 = T_{21} V_2 + T_{22} I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1 = e_2 + i_2 R \\ i_1 = e_2 + i_2 \end{cases}$$

$$(T_1) = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (T_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{j\omega C} & 1 \end{pmatrix}$$

les 4 quadripôles en cascade \Rightarrow 2 matrices multipliées

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & jL\omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}$$

$$(T) = \begin{pmatrix} 1+jRC\omega & R \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & jL\omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+jRC\omega & (1+jRC\omega)jL\omega + R \\ j\omega C & -L\omega^2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}$$

$$(T) = \begin{pmatrix} (1+jRC\omega)j\omega C + [(1+jRC\omega)jL\omega + R]j\omega C & (1+jRC\omega)jL\omega + R \\ j\omega C + (1-L\omega^2)j\omega C & 1-L\omega^2 \end{pmatrix}$$

$$(T) = \begin{pmatrix} (1+jRC\omega)(1+jL\omega) + R & (1+jRC\omega)jL\omega + R \\ (1-L\omega^2)j\omega C & 1-L\omega^2 \end{pmatrix}$$

Numero
17

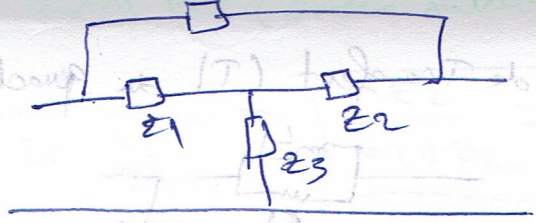
10

Faculté des sciences de la technologie

Université des frères MENTOURI

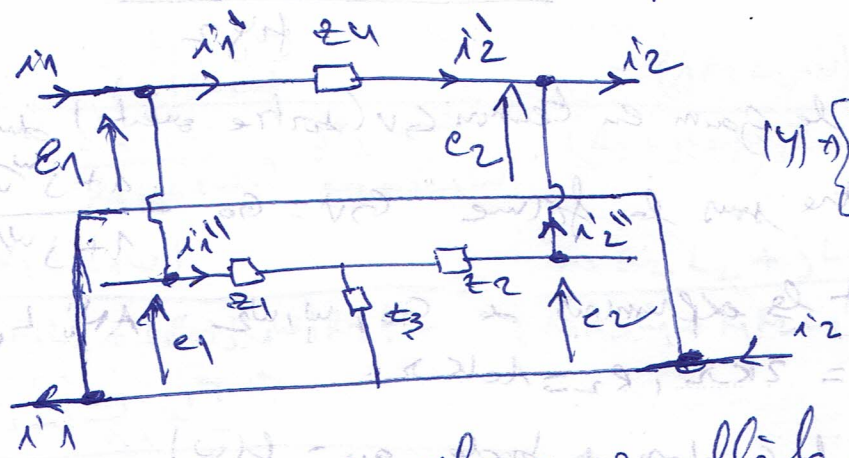
$$(1+jRC\omega)j\omega C + (1+jRC\omega)j\omega C jL\omega + R j\omega C = (1+jRC\omega)j\omega C (1+jL\omega) + jRC\omega$$

Exercice 5



calculer la matrice admittance du quadripole en T pente.

Solution:



$$(Y) \Rightarrow \begin{cases} I_1 = Y_{11} E_1 + Y_{12} E_2 \\ I_2 = Y_{21} E_1 + Y_{22} E_2 \end{cases}$$

on le décompose en 2 quadripole en parallèle.



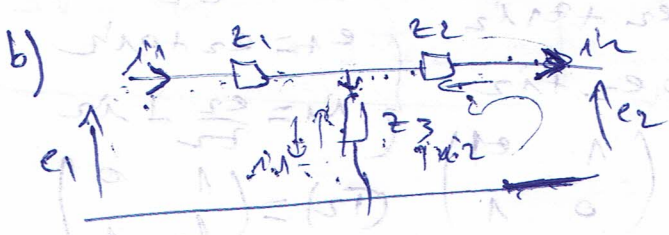
$$i_1 = i_2$$

$$i_1' = \frac{e_1 - e_2}{z_4} = \frac{e_1}{z_4} - \frac{e_2}{z_4} = i_2$$

~~$i_1 = \frac{1}{z_4} e_1 - \frac{1}{z_4} e_2$~~

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{z_4} e_1 - \frac{1}{z_4} e_2 \\ i_2 = \frac{1}{z_4} e_1 + \frac{1}{z_4} e_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (Y_a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_4} & -\frac{1}{z_4} \\ \frac{1}{z_4} & -\frac{1}{z_4} \end{pmatrix}$$



$$e_1 = z_1 i_1 + z_3 (i_1 - i_2)$$

$$e_1 = (z_1 + z_3) i_1 - z_3 i_2$$

~~$e_2 = z_2 i_2 + z_3 (i_1 - i_2)$~~

$$e_2 = z_2 i_2 + z_3 (i_1 - i_2)$$

$$e_2 = z_3 i_1 + (z_2 - z_3) i_2$$

$$\Rightarrow z_b = \begin{pmatrix} z_1 + z_3 & -z_3 \\ z_3 & z_2 - z_3 \end{pmatrix}$$

$$(Y_b) = z_b^{-1} = \frac{1}{\Delta z_b} \begin{pmatrix} z_2 - z_3 & -z_3 \\ -z_3 & z_1 + z_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta z_b} \begin{pmatrix} -(z_2 + z_3) & z_3 \\ -z_3 & z_1 + z_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (Y) = (Y_a) + (Y_b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_4} - \frac{z_2 + z_3}{\Delta z_b} & -\frac{1}{z_4} + \frac{z_3}{\Delta z_b} \\ \frac{1}{z_4} - \frac{z_3}{\Delta z_b} & -\frac{1}{z_4} + \frac{z_1 + z_3}{\Delta z_b} \end{pmatrix}$$

Exercice 6:

1) Trouver la matrice de transfert (T) du quadripôle suivant (A)

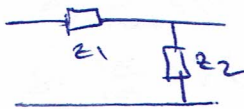


fig 1

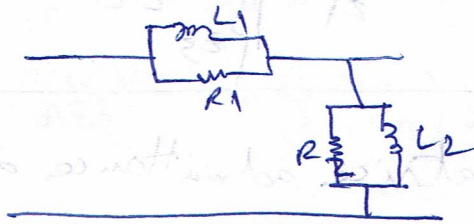


fig 2

2) Calculer le gain en tension G_V (sortie ouverte) du circuit (B)

et le mettre sous la forme $G_V = G_0 \frac{1 + j\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_2}$

quelles sont les expressions de G_0, ω_1, ω_2 . AN: $L_1 = 5\text{mH}, L_2 = 4\text{mH}$
 $R_1 = 2\text{k}\Omega, R_2 = 10\text{k}\Omega$.

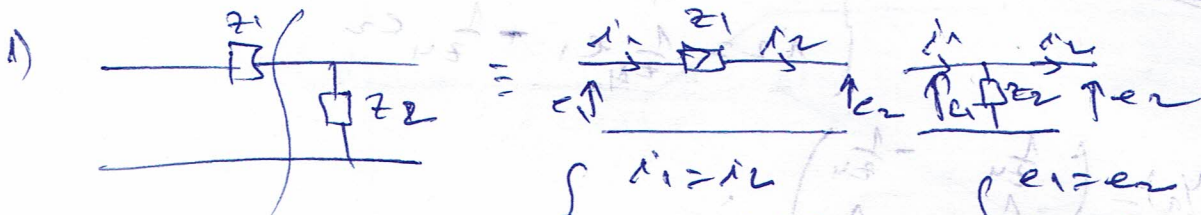
3) Tracer la courbe de bode $g_v = |f(\omega)|$

u) le quadripôle est chargé par une résistance R_c ,

Exprimer le gain $G'_V = G'_0 \frac{1 + j\omega/\omega'_1}{1 + j\omega/\omega'_2}$

montrer que $G'_0 = G_0$ et $\omega'_1 = \omega$.

Solution:



$$\begin{cases} i_1 = i_2 \\ e_1 = z_1 i_1 + e_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1 = e_2 \\ i_1 = \frac{e_2}{z_2} + i_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = e_2 + z_1 i_2 \\ i_1 = 0 e_2 + i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1 = e_2 + z_1 i_2 \\ i_1 = \frac{e_2}{z_2} + i_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (T_1) = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (T_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{z_2} & 1 \end{pmatrix}$$

2) deux matrices en cascade $\Rightarrow (T) = (T_1)(T_2)$

$$\Rightarrow (T) = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{z_2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{z_1}{z_2} & z_1 \\ \frac{1}{z_2} & 1 \end{pmatrix} = (T)$$

(B)

2) le gain en tension GV (double entrée)

$$G_V = \frac{1}{T_{11}} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} = \boxed{\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = G_V}$$

$$Z_1 = \frac{jR_1 L_1 \omega}{R_1 + jL_1 \omega}, \quad Z_2 = \frac{jR_2 L_2 \omega}{R_2 + jL_2 \omega}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{11}} &= \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{jR_2 L_2 \omega}{R_2 + jL_2 \omega}}{\frac{jR_1 L_1 \omega}{R_1 + jL_1 \omega} + \frac{jR_2 L_2 \omega}{R_2 + jL_2 \omega}} = \frac{(jR_2 L_2 \omega) [R_1 + jL_1 \omega]}{(R_2 + jL_2 \omega) jR_1 L_1 \omega + jR_2 L_2 \omega (R_1 + jL_1 \omega)} \\ &= \frac{R_2 L_2 (R_1 + jL_1 \omega)}{(R_2 + jL_2 \omega) R_1 L_1 + (R_1 + jL_1 \omega) R_2 L_2} = \frac{R_1 R_2 L_2 + jL_1 L_2 R_2 \omega}{(R_1 R_2 L_1 + R_1 R_2 L_2) + j(L_1 L_2 \omega + R_2 L_1 \omega)} \\ &= \frac{R_1 R_2 L_2 [1 + j \frac{L_1}{R_1} \omega]}{R_1 R_2 L_2 \left\{ 1 + \frac{L_1}{L_2} \right\} + j \omega \left(\frac{L_1}{R_2} + \frac{L_1}{R_1} \right) R_1 R_2 L_2} \end{aligned}$$

$$G_V = \frac{1 + j \frac{L_1}{R_1} \omega}{\left(\frac{L_2 + L_1}{L_2} \right) + j \omega \left(\frac{L_1}{R_2} + \frac{L_1}{R_1} \right)} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{1 + j \frac{L_1}{R_1} \omega}{1 + j \left(\frac{L_2}{L_1 + L_2} \right) \omega \left(\frac{L_1}{R_2} + \frac{L_1}{R_1} \right)}$$

$$G_V = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{1 + j \frac{L_1}{R_1} \omega}{1 + j \omega \left(\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)}$$

$$G_V = G_0 \frac{1 + j \omega / \omega_1}{1 + j \omega / \omega_2}$$

$$\Rightarrow G_0 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} = 0,44$$

$$\omega_1 = \frac{R_1}{L_1} = 400 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2} = 880 \text{ rad/s}$$

3) Tracé de Bode: $g_V = f(\omega)$

par définition: $g_V = 20 \log_{10} |G_V| \Rightarrow |G_V| = G_0 \frac{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_2^2}}}$

$$g_V = 20 \log G_0 + 10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2} \right) - 10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_2^2} \right)$$

$$g_V = -7 \text{ dB} + g_1 + g_2$$

Four g_{ij} :

$g_1: \frac{\omega}{\omega_1} \ll 1 \rightarrow g_1 \rightarrow 0 \rightarrow$ like as ω asymptotes

$g_2: \frac{\omega}{\omega_1} \gg 1 \rightarrow g_2 = 10 \lg \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 = 20 \lg \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) = 20 \lg \omega - 20 \lg \omega_1$
(antib)

$\omega = \omega_1 \rightarrow g_u = 0$

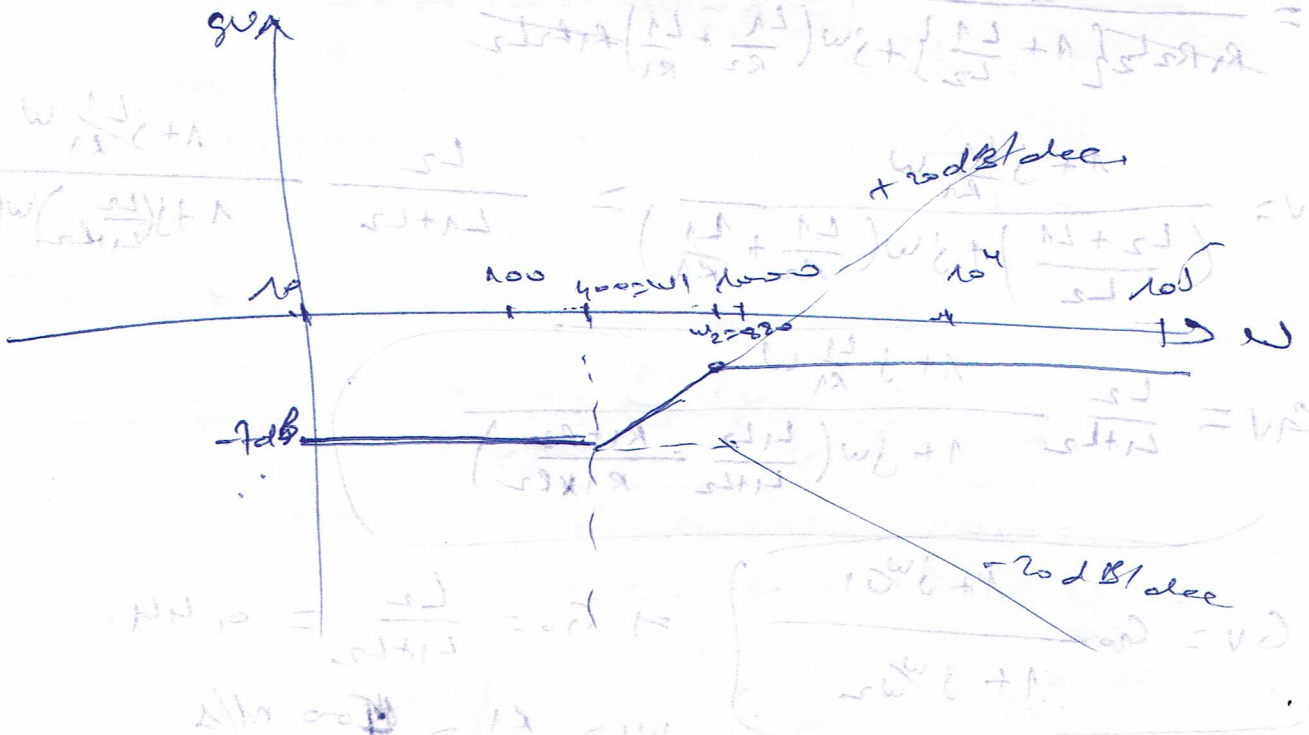
$\omega = 10\omega_1 \rightarrow g_u = 10 \lg(10) = 20$ $\rightarrow +20 \text{ dB / dec}$

$g_2: \frac{\omega}{\omega_2} \ll 1 \rightarrow g_2 \rightarrow 0$

$g_1: \frac{\omega}{\omega_2} \gg 1 \rightarrow g_2 = -10 \lg \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 = -20 \lg \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)$

$= -20 \lg \omega + 20 \lg \omega_2$

$g_1: \omega = \omega_2 \rightarrow g_u = 0, \omega = 10\omega_2 \rightarrow g_u = -10 \lg(10) = -20 \text{ dB / dec}$



Chapitre 2 : L'AMPLIFICATEUR OPERATIONNEL

L'amplificateur opérationnel est un circuit intégré qui amplifie la différence entre deux signaux présents à ces deux entrées, en donnant un signal unique.

Le terme « Amplificateur Opérationnel » provient de l'application d'origine de ce type de circuits, qui durant les années 60, était utilisé dans les calculateurs pour réaliser des opérations mathématiques et résoudre les équations différentielles et intégrales.

Nous allons dans ce chapitre, après avoir donné le schéma équivalent de l'amplificateur opérationnel idéal, montrer les applications les plus usuelles.

1. Modèle de l'amplificateur opérationnel idéal

Le symbole de l'amplificateur opérationnel (AOP) est le suivant (Figure 1) :

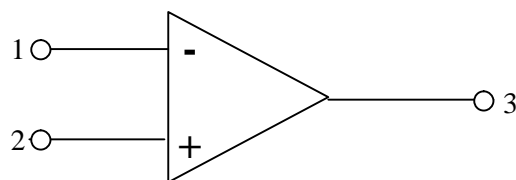


Fig. 1 Symbole d'un AOP

Du point de vu signaux, l'AOP a 2 entrées :

- Une entrée + appelée entrée non-inverseuse **2**.
- Une entrée - appelée entrée inverseuse **1**.

Et il possède une seule sortie **3**.

L'amplificateur opérationnel est un circuit intégré (C.I) regroupant des dizaines de transistors (Bipolaire ou FET) et des éléments passifs (résistances et capacités). Pour alimenter tous ces transistors, ce C.I nécessite deux alimentations ; une alimentation positive et une alimentation négative, comme il est montré dans la (Figure 2) :

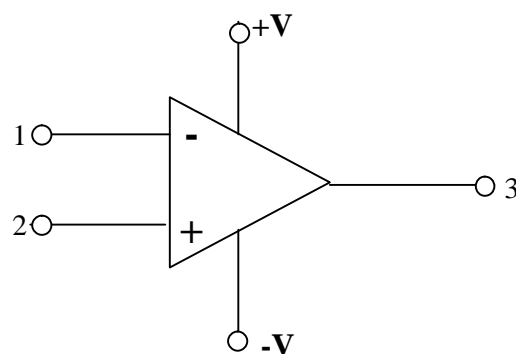


Fig. 2 Un AOP alimenté

Puisque l'AOP amplifie la différence entre deux signaux v_1 et v_2 présentes à ces deux entrées alors (voir Figure 3) :

- Si $v_1 = v_2 = 0$ alors $v_o = 0$.
- Si $v_1 = v_2 \neq 0$, la tension de sortie demeure à zéro ; $v_o = 0$: ce mode est appelé **mode commun**.

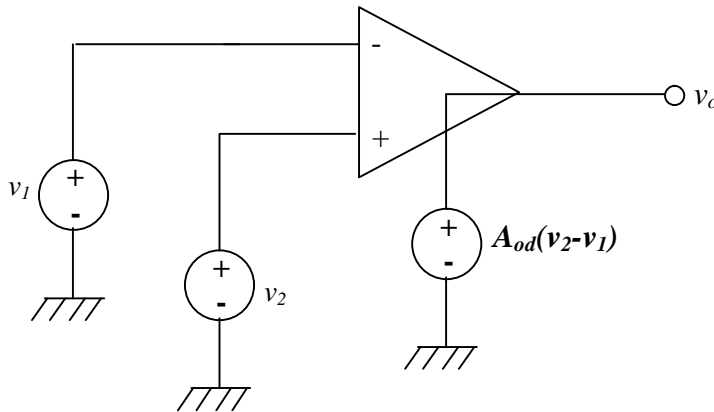


Fig. 3 Symbole d'un AOP en mode commun

Puisque le dispositif est polarisé avec des alimentations positives et négatives, toutes les étapes sont liées : il n'existe pas de condensateurs de liaisons entre un étage et un autre, ceci implique que l'AOP peut amplifier des tensions continues.

Puisque les transistors composants l'AOP sont alimentés avec des tensions V^+ et V^- , la tension de sortie est limitée. Quand v_o est portée de V^+ , l'amplificateur est limité par V^+ , on dit qu'il est en saturation positive. Quand la tension de sortie est portée de V^- , il se sature à la tension portée de V^- . La tension de sortie est limitée entre $V^+ - \Delta V < v_o < V^- + \Delta V$, où ΔV est généralement une tension comprise entre 1V et 2V.

La caractéristique de transfert est donc :

Deux paramètres sont importants pour l'AOP :

- Le gain différentiel A_{od} qui dans le cas idéal est infini.
- La BP (bande passante) à réponse en fréquence.
- A_{od} : gain en boucle ouverte de l'AOP.

Récemment un AOP n'est pas utilisé en boucle ouverte, car à cause de son gain différentiel très élevé, il se sature dans la majorité des cas (pente A_{od} de la Figure 4 presque ∞). C'est pour cette raison qu'on l'utilisera en boucle fermée, c.à.d. qu'on relie son entrée et sa sortie par un circuit. Ce circuit crée une réaction, généralement la boucle en contre réaction ou réaction négative en bouclant la sortie avec l'entrée inverseuse (-).

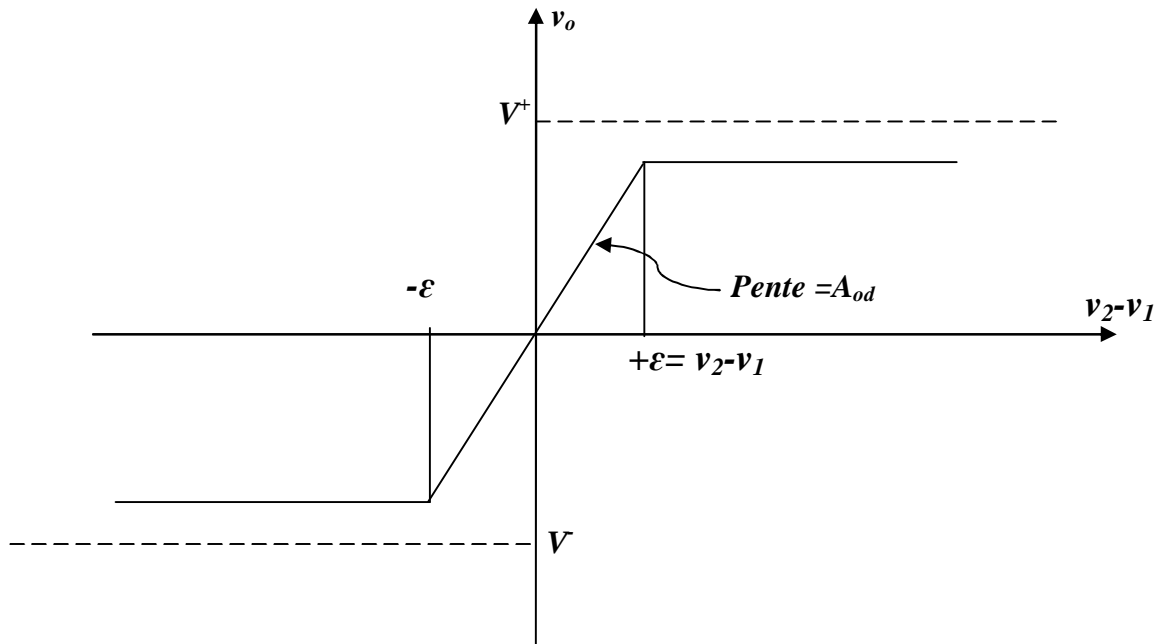


Fig. 4 Caractéristique de transfert d'un AOP

L'AOP est amplificateur qui est dans le cas idéal a un gain ∞ , une impédance d'entrée ∞ ; donc un courant d'entrée nul.

Utilisant ces hypothèses nous allons étudier les applications les plus usuelles de l'AOP.

2. Amplificateur inverseur

2.1. Amplificateur de base

Une des applications les plus utilisées en électronique, c'est l'amplificateur inverseur.

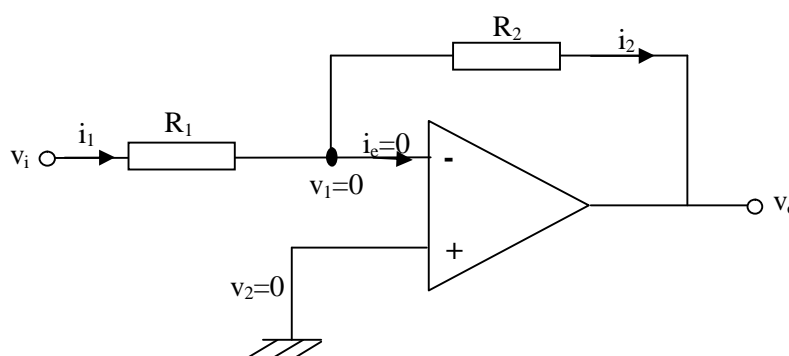


Fig. 5 AOP inverseur

Le gain en boucle fermée de ce circuit est :

$$A_v = \frac{v_o}{v_i}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{od} \gg \Rightarrow v_1 = v_2 \\ \text{comme } v_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow v_1 = v_2 = 0$$

On dit que v_1 a une masse virtuelle.

$$i_1 = \frac{v_i - v_1}{R_1} = \frac{v_i}{R_1}, \text{ par ailleurs } i_1 = i_2 \text{ (} Z_e \infty \text{ implique } i_e \approx 0\text{)}$$

$$v_o = v_1 - R_2 i_2 = 0 - R_2 \left(\frac{v_i}{R_1} \right) \text{ donc } A_v = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Le signe (-) indique l'inversion.

- L'impédance d'entrée de ce circuit est : $R_e = \frac{v_i}{i_1} = R_1$

2.2. Amplificateur inverseur avec un circuit a T

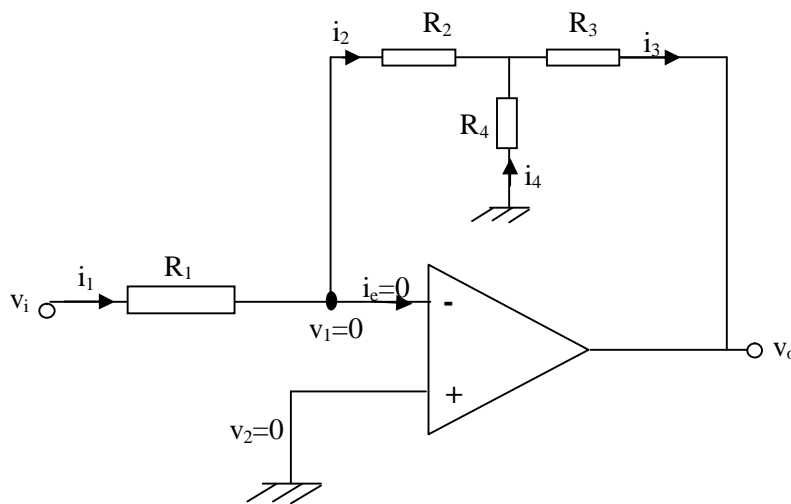


Fig. 6 AOP inverseur a circuit en T

$$i_1 = \frac{v_i}{R_1} = i_2$$

$$v_x = v_1 - R_2 i_2 = 0 - R_2 i_2 \Rightarrow v_x = -v_i \frac{R_2}{R_1}$$

Si on applique la loi des nœuds en v_x , nous avons : $i_2 + i_4 = i_3$

$$-\frac{v_x}{R_2} - \frac{v_x}{R_4} = \frac{v_x - v_o}{R_3} \Rightarrow v_x \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} \right] = \frac{v_o}{R_3}$$

Et on tire v_x de l'équation : $v_x = -v_i \frac{R_2}{R_1}$, on obtient :

$$-v_i \frac{R_2}{R_1} \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} \right] = \frac{v_o}{R_3}$$

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1} \left[1 + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_3}{R_2} \right]$$

2.3.Effet d'un gain fini

Si on suppose un gain en boucle ouverte A_{od} fini, nous allons refaire le calcul du gain de l'AOP inverseur :

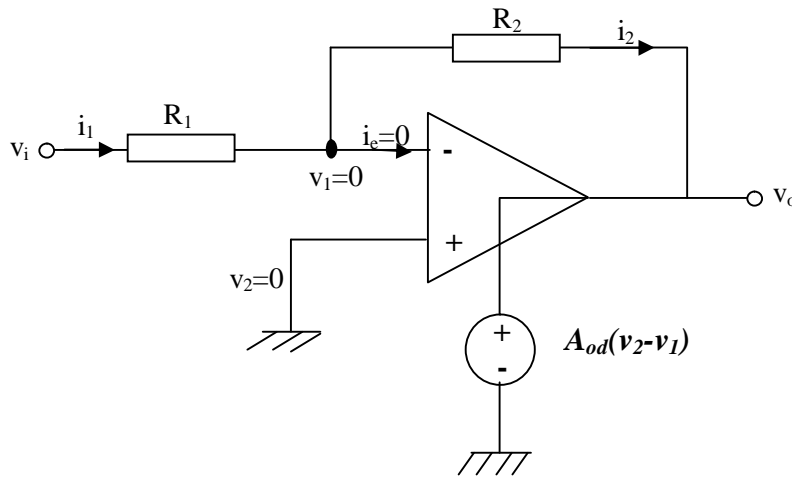


Fig. 7 Effet d'un gain fini

$$i_1 = \frac{v_i - v_1}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{v_1 - v_o}{R_2}$$

La tension de sortie est : $v_o = -A_{od} v_1$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{-v_o}{A_{od}}$$

$$i_1 = \frac{v_i + \frac{v_o}{A_{od}}}{R_1} = i_2 = \frac{-\frac{v_o}{A_{od}} - v_o}{R_2}$$

$$\Rightarrow A_v = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{A_{od}} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\right]}$$

Cette équation montre que si A_{od} tend vers ∞ implique que : $\Rightarrow A_v \rightarrow -\frac{R_2}{R_1}$ qui est le gain que nous avons trouvé en supposant $A_{od} \rightarrow \infty$.

2.4. Amplificateur sommateur

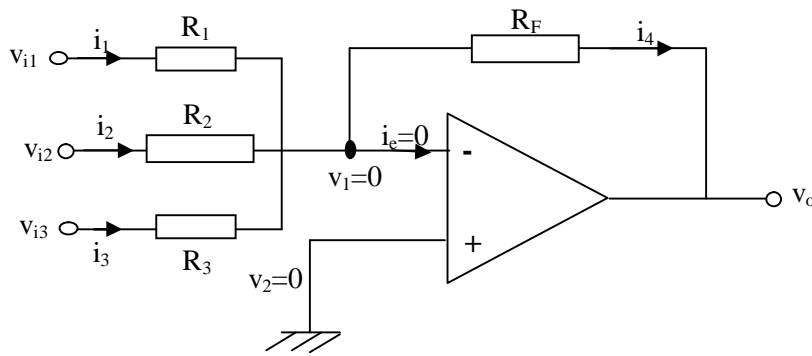


Fig. 8 AOP sommateur

Pour analyser ce circuit, nous allons utiliser le théorème de superposition en calculant la tension de sortie due à chaque tension d'entrée agissant seule, puis on fait la somme des trois contributions.

- Si on prend : $v_{i2} = v_{i3} = 0$, le courant i_1 est :

$$i_1 = \frac{v_{i1}}{R_1}, \text{ puisque } v_{i2} = v_{i3} = 0 \Rightarrow i_1 = i_4 \Rightarrow v_o(v_{i1}) = -i_1 R_F = -\left(\frac{R_F}{R_1}\right)v_{i1}$$

- Prenons : $v_{i1} = v_{i3} = 0$:

$$v_o(v_{i2}) = -i_2 R_F = -\left(\frac{R_F}{R_2}\right)v_{i2}$$

- Prenons : $v_{i1} = v_{i2} = 0$:

$$v_o(v_{i3}) = -i_3 R_F = -\left(\frac{R_F}{R_3}\right)v_{i3}$$

La tension de sortie v_o sera la somme algébrique de chacune des contributions des trois tensions d'entrées :

$$v_o = v_o(v_{i1}) + v_o(v_{i2}) + v_o(v_{i3})$$

$$v_o = -\left[\frac{R_F}{R_1}v_{i1} + \frac{R_F}{R_2}v_{i2} + \frac{R_F}{R_3}v_{i3}\right]$$

Si on prend $R_1 = R_2 = R_3 = R$, alors :

$$v_o = -\frac{R_F}{R}[v_{i1} + v_{i2} + v_{i3}]$$

Qui signifie que la tension de sortie est la somme des tensions d'entrées avec un facteur d'amplification.

3. Amplificateur non-inverseur

Dans les montages précédents nous avons obtenu une contre réaction en connectant un circuit entre la sortie et l'entrée inverseuse, puis nous avons appliqué la tension d'entrée à l'entrée inverseuse.

Cependant, nous pouvons appliquer le signal à l'entrée non-inverseuse ; nous obtenons un amplificateur non-inverseur.

3.1. Amplificateur de base

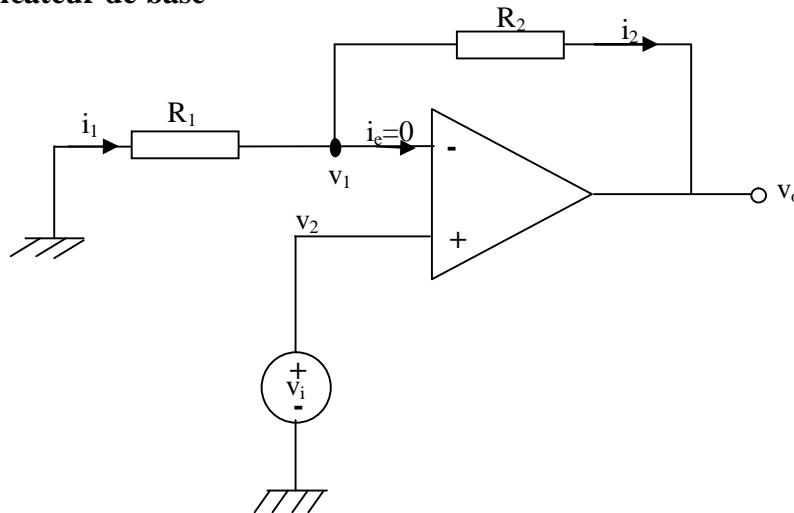


Fig. 9 AOP non-inverseur

L'analyse d'un AOP non-inverseur est la même que celle de l'AOP inverseur.

Puisque il n'y a pas de courant d'entrée dans l'AOP $\Rightarrow v_1 = v_2$

$$v_1 = v_i \Rightarrow i_1 = -\frac{v_1}{R_1} = -\frac{v_i}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{v_1 - v_o}{R_2} = \frac{v_i - v_o}{R_2}, \text{ or } i_1 = i_2$$

$$-\frac{v_1}{R_1} = \frac{v_i}{R_2} - \frac{v_o}{R_2} \Rightarrow A_v = \frac{v_o}{v_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

3.2. Amplificateur suiveur de tension

Une propriété intéressante de l'amplificateur non-inverseur, c'est quand $R_2 = 0 \Rightarrow$ dans ce cas :

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow A_v = 1$$

La tension de sortie suit la tension d'entrée, c'est pourquoi ce montage est appelé suiveur de tension.

Il est utilisé pour l'adaptation d'impédance (Z_e de l'AOP $\rightarrow \infty$)

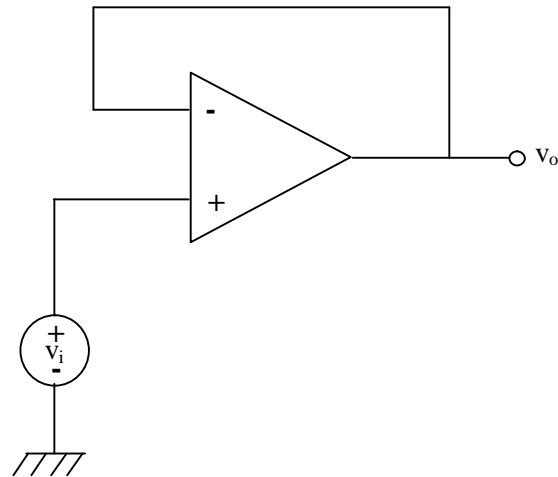


Fig. 10 AOP suiveur de tension

4. Application des amplificateurs opérationnels

L'amplificateur sommateur est un exemple de fonctions que l'AOP est capable de remplir. Nous allons dans ce qui suit donner d'autres applications de l'AOP.

4.1. Convertisseur courant tension

Dans certaines situations, la sortie d'un dispositif ou d'un circuit est un courant (par exemple : la sortie d'une photodiode).

Nous avons besoin de convertir cette source de courant en source de tension ; on procède comme suit :

La résistance d'entrée R_e à l'entrée inverseuse (qui représente une masse virtuelle dans ce cas) est :

$$R_e = \frac{v_1}{i_1} \approx 0$$

Dans la majorité des cas, on suppose :

$$R_s \gg R_e \Rightarrow i_1 \approx i_2 = i_s \text{ et } v_o = -i_2 R_F \Rightarrow v_o = -i_s R_F$$

Donc la tension v_o de sortie est directement proportionnelle au courant de la source i_s , et le facteur de proportionnalité est R_F .

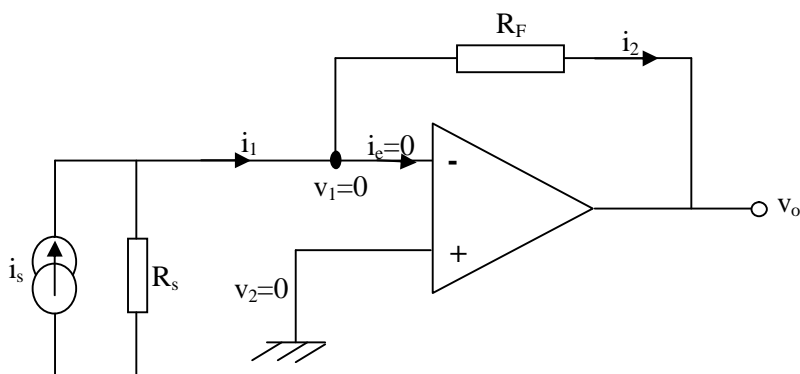


Fig. 11 Convertisseur courant tension

4.2. Convertisseur tension courant

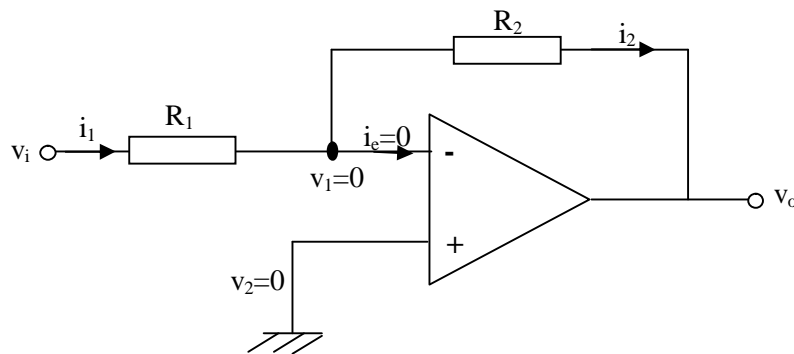


Fig. 12 Convertisseur tension courant

$$i_2 = i_1 = \frac{v_i}{R_1} \Leftrightarrow \text{Conversion tension} \rightarrow \text{courant.}$$

i_2 : le courant convertit doit alimenter une charge reliée à la masse \Rightarrow ce circuit n'est pas pratique pour les applications en électronique, on va considérer un autre type de circuit convertisseur tension-courant plus pratique :

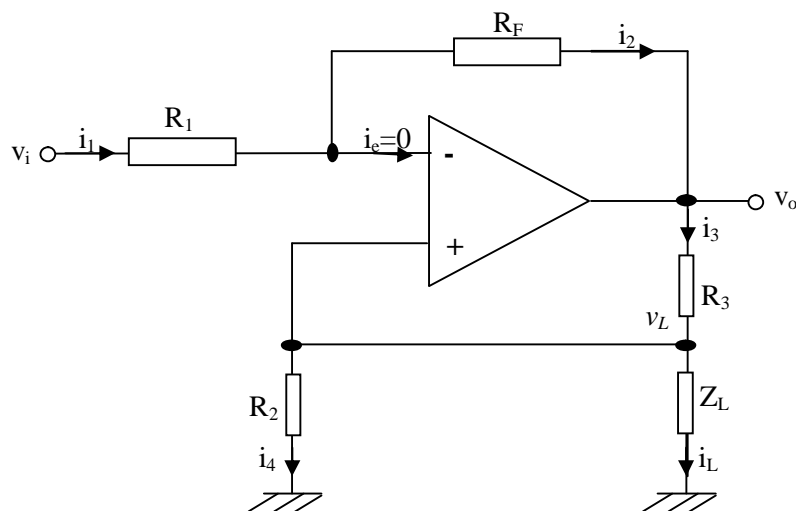


Fig. 13 Convertisseur tension courant

Dans ce cas de figure la charge Z_L est reliée à la masse.

L'entrée inverse n'est pas à la masse virtuelle (à partir du concept court circuit virtuel entre les deux

entrées $\Rightarrow v_1 = v_2$ on peut écrire : $i_1 = i_2$, ou encore : $\frac{v_i - v_1}{R_1} = \frac{v_1 - v_o}{R_F}$

d'où on peut tirer v_o :

$$v_o = R_F \left[v_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_F} \right) - \frac{v_i}{R_1} \right] \quad (1)$$

Sachant que v_L est la ddp aux bornes de Z_L , on peut écrire :

$$v_1 = v_2 = v_L$$

Au nœud v_L on peut écrire : $i_3 = i_L + i_4$ ou encore :

$$\frac{v_o - v_L}{R_3} = \frac{v_L}{Z_L} + \frac{v_L}{R_2} \text{ ce qui permet de calculer } v_o.$$

$$v_o = v_L \left[1 + \frac{R_3}{Z_L} + \frac{R_3}{R_2} \right] \quad (2)$$

en égalant (1) et (2), et sachant que $v_1 = v_L$ on a :

$$v_L \left[1 + \frac{R_3}{Z_L} + \frac{R_3}{R_2} \right] = R_F \left[v_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_F} \right) - \frac{v_i}{R_1} \right]$$

$$\text{où } v_L \left[\frac{R_3}{Z_L} + \frac{R_3}{R_2} - \frac{R_F}{R_1} \right] = -v_i \left(\frac{R_F}{R_1} \right)$$

$$\text{si on suppose } \frac{R_3}{R_2} = \frac{R_F}{R_1} \quad (3) \Rightarrow \frac{R_F}{R_3 R_1} = \frac{1}{R_2}$$

$$\text{on peut écrire : } v_L \left[\frac{R_3}{Z_L} \right] = -v_i \left(\frac{R_F}{R_1} \right) \text{ en divisant par } R_3 :$$

$$\frac{v_L}{Z_L} = i_L = -v_i \left(\frac{R_F}{R_3 R_1} \right), \text{ or d'après l'équation (3) :}$$

$$\frac{R_F}{R_3 R_1} = \frac{1}{R_2} \text{ donc :}$$

$$\frac{v_L}{Z_L} = i_L = \frac{-v_i}{R_2}$$

La tension v_i à été convertie en courant :

$$i_L = \frac{-v_i}{R_2}$$

4.3. Amplificateur de différence

Un amplificateur opérationnel idéal de différence est celui qui amplifie la différence entre deux signaux présents à ces deux entrées.

Considérons le circuit suivant :

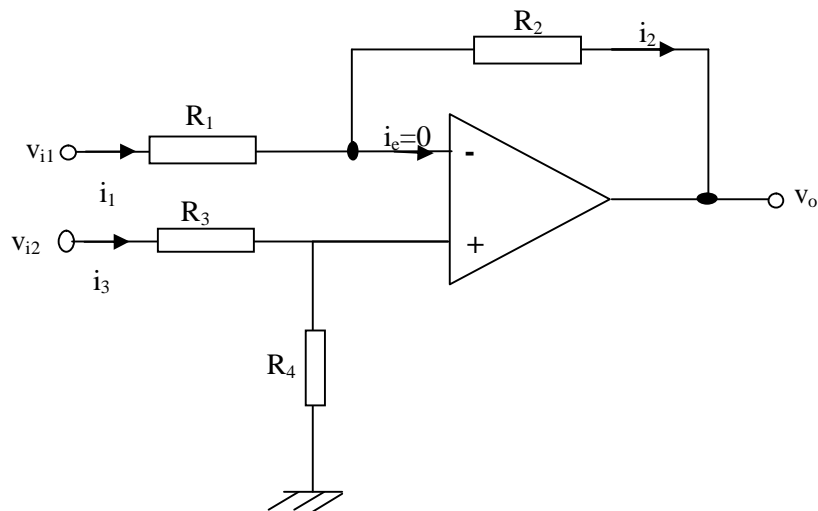
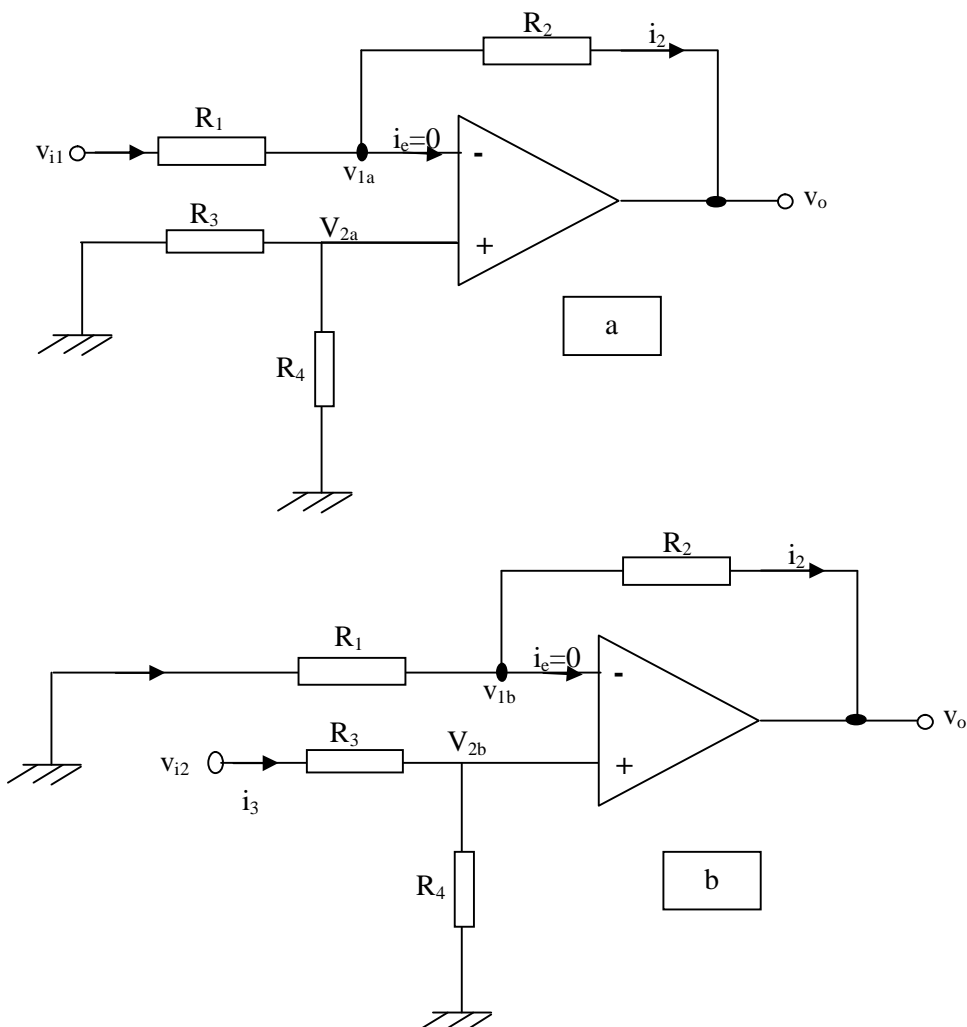


Fig. 14 AOP de différence

Pour appliquer le théorème de superposition, on suppose une fois $v_{i2}=0$ et l'autre fois $v_{i1}=0$.



a) Prenons $v_{i2} = 0 \Rightarrow$ il n'y a pas de courant dans R_3 et $R_4 \Rightarrow v_{2a} = 0$, $v_{o1} = -\frac{R_2}{R_1} v_{i1}$

b) Prenons $v_{i1} = 0 \Rightarrow$ il n'y a pas de courant dans l'AOP est nul, R_3 et R_4 forment un diviseur

de tension $\Rightarrow v_{2b} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_{i2}$, or $v_{1b} = v_{2b}$

$$v_{o2} = -(R_2 + R_1)i_1 \text{ et } i_1 = -\frac{v_{1b}}{R_1}$$

$$v_{o2} = \left(\frac{R_2 + R_1}{R_1} \right) v_{1b}$$

$$v_{o2} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v_{1b} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v_{2b}$$

En remplaçant v_{2b} par son expression : $v_{o2} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) v_{i2}$

qui peut être arrangé comme suit :

$$v_{o2} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \left(\frac{\frac{R_4}{R_3}}{1 + \frac{R_4}{R_3}} \right) v_{i2}$$

c) En appliquant le théorème de superposition : $v_o = v_{o1} + v_{o2}$

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_{i1} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \left(\frac{\frac{R_4}{R_3}}{1 + \frac{R_4}{R_3}} \right) v_{i2}$$

Un amplificateur de différence idéal donne une tension de sortie nulle quand : $v_{i1} = v_{i2} \Rightarrow$ ceci

pose une condition sur les résistances : $\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$ et dans ce cas là :

$$v_o = \frac{R_2}{R_1} (v_{i2} - v_{i1})$$

4.4.Circuit intégrateur et circuit différentiateur

Dans les circuits étudiés précédemment les éléments extérieurs utilisés de l'AOP sont des résistances. D'autres éléments peuvent être utilisés donnant lieu à d'autres applications :

Dans le circuit inverseur ci-dessous :

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

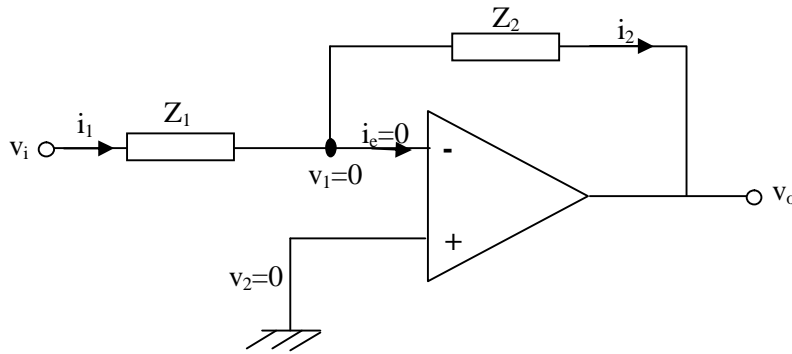


Fig. 15 AOP inverseur

a) Z_1 : une résistance et Z_2 : condensateur.

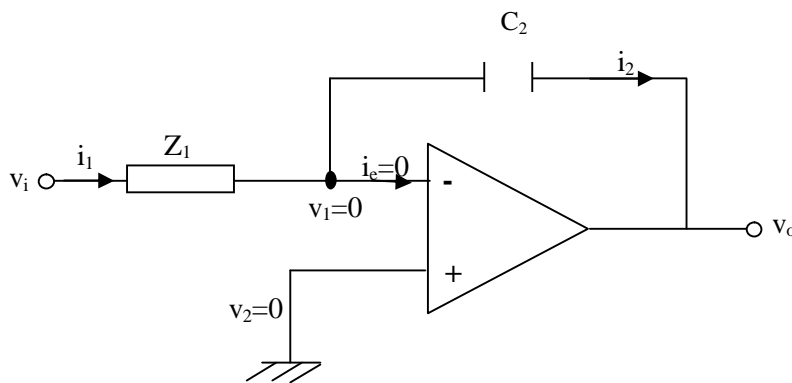


Fig. 16 Circuit intégrateur

$$Z_1 = R_1, \quad Z_2 = \frac{1}{C_2 P}, \quad \text{où } P = j\omega$$

$$v_o = -\frac{Z_2}{Z_1} v_i = -\frac{1}{R_1 C_2 P} v_i$$

Cette équation montre que la tension de sortie est l'intégrale de la tension d'entrée.

Si v_c est la tension aux bornes du condensateur, à $t=0$, la tension de sortie :

$$v_o = v_c = -\frac{1}{R_1 C_2} \int_0^t v_i(t) dt$$

C'est pour cela que le circuit précédent est appelé circuit intégrateur. Il faut noter que si v_i est une rampe, v_o sera une forme linéaire du temps.

b) Z_1 : condensateur et Z_2 : une résistance.

$$Z_1 = \frac{1}{C_1 P}, \quad Z_2 = R_2, \quad \text{où } P = j\omega$$

$$v_o = -\frac{Z_2}{Z_1} v_i = -R_2 C_1 P v_i \Rightarrow v_o = -R_2 C_1 \frac{dv_i}{dt}$$

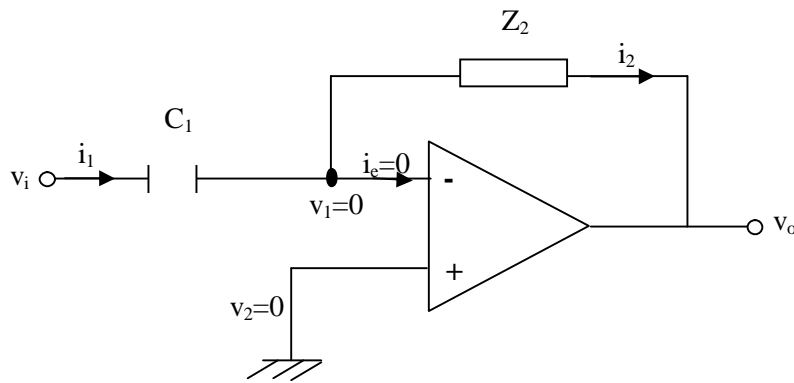


Fig. 17 Circuit différentiateur

La tension de sortie est proportionnelle à la dérivée du signal d'entrée, c'est pourquoi ce circuit est appelé différentiateur.

4.5. Amplificateur logarithmique

Soit le circuit suivant :

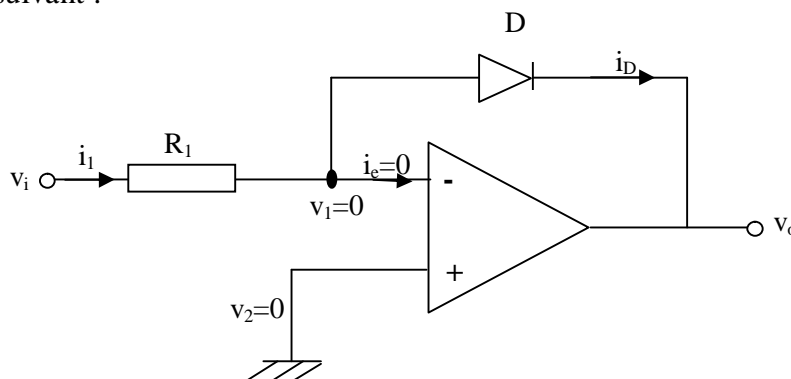


Fig. 18 Circuit logarithmique

Pour que la diode soit polarisée en direct il faut que $v_i > 0$ dans ce cas là :

$$i_D = I_s \left[\exp\left(\frac{v_D}{u_T}\right) - 1 \right]$$

$$\Rightarrow i_D \approx I_s \exp\left(\frac{v_D}{u_T}\right)$$

$$i_1 = i_D \approx I_s \exp\left(\frac{v_D}{u_T}\right) = \frac{v_i}{R_1}$$

$$v_o = -v_D = -u_T \ln\left(\frac{v_i}{I_s R_1}\right)$$

$$\Rightarrow v_o = -u_T \ln\left(\frac{v_i}{I_s R_1}\right) \Rightarrow \text{la tension de sortie est égale au logarithme de la tension d'entrée.}$$

5. Oscillateur à pont de Wien

5.1.Principe de fonctionnement

Le montage de la figure 19 représente un oscillateur à pont de Wien qui produit sinusoïdale. Il ne s'agit sans doute pas là du meilleur oscillateur qui soit, mais ce dispositif montre à la fois la grande versatilité des amplificateurs opérationnels et la manière de produire un signal sinusoïdale à partir d'un système régi par une équation différentielle de l'oscillateur harmonique du type :

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + \omega^2 v_o = 0$$

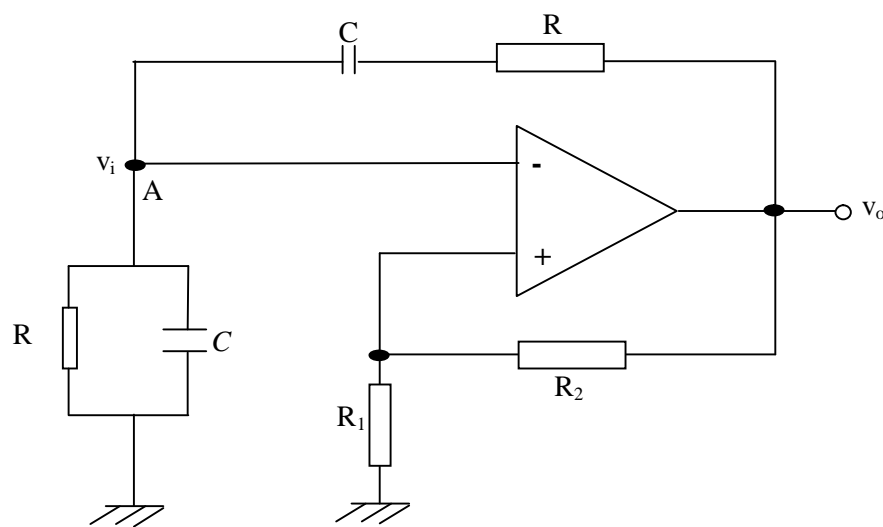


Fig. 19 Oscillateur à pont de Wien

5.2.Mise en équation

L'amplificateur opérationnel est monté en amplificateur non inverseur.

Les tensions v_o et v_i sont donc liées par la relation : $v_o = \alpha v_i$ avec $\alpha = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

Par ailleurs, appelons i le courant circulant entre v_o et v_i dans la résistance R et dans le condensateur C situé en haut du schéma. Aux bornes de l'association série de R et C , on a :

$$v_o - \frac{v_o}{\alpha} = Ri + \frac{1}{C} \int i dt$$

$$\text{Soit : } \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{dv_o}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{C}$$

En appliquant la loi des nœuds au point A, compte tenu qu'aucun courant n'entre dans

l'amplificateur opérationnel, on obtient : $i = \frac{v_o}{\alpha R} + \frac{C}{\alpha} \frac{dv_o}{dt}$

Remplaçant le courant i par cette expression dans la première équation :

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{dv_o}{dt} = R \frac{d}{dt} \left(\frac{v_o}{\alpha R} + \frac{C}{\alpha} \frac{dv_o}{dt} \right) + \frac{1}{C} \left(\frac{v_o}{\alpha R} + \frac{C}{\alpha} \frac{dv_o}{dt} \right)$$

Ordonnons les différents termes : $\frac{RC}{\alpha} \frac{d^2 v_o}{dt^2} + \left(\frac{3}{\alpha} - 1\right) \frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{\alpha RC} = 0$

En multipliant pour finir par αRC : $R^2 C^2 \frac{d^2 v_o}{dt^2} + \alpha \left(\frac{3}{\alpha} - 1\right) RC \frac{dv_o}{dt} + v_o = 0$

5.3. Réglage de l'oscillateur

On remarque immédiatement que si $\alpha=3$, le terme correspondant à la dérivée première est nul.

L'équation différentielle devient alors : $R^2 C^2 \frac{d^2 v_o}{dt^2} + v_o = 0$. Elle correspond à l'équation de

l'oscillateur harmonique. La tension v_o sera donc sinusoïdale. Cela correspond à : $\alpha = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 3$,

autrement dit si $R_2 = 2R_1$.

La solution de l'équation différentielle a pour expression :

$$v_o(t) = A \cos \omega t + B \quad \text{Avec} \quad \omega = \frac{1}{RC}$$

Pour conclure, le circuit proposé est bien donc un oscillateur sinusoïdale de pulsation $\omega = \frac{1}{RC}$ à

condition que $\alpha = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 3$, autrement dit si $R_2 = 2R_1$

Remarque :

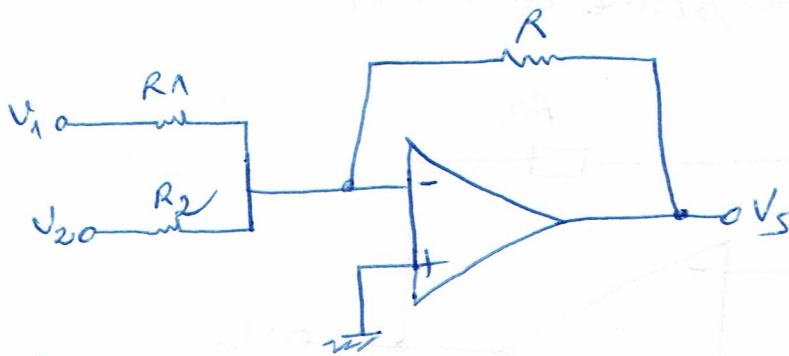
Il ne s'agit pas d'un montage de grande qualité, pour la bonne et simple raison que ses réglages s'avèrent difficile. Les incertitudes sur les valeurs de R et de C rendent la mise au point difficile.

Il existe de nombreux autres montage permettant de produire des signaux sinusoïdaux, soit à partir de circuits RC comme dans la présente étude, soit à partir de circuits intégrés spécialisés, soit encore en utilisant des dispositifs à quartz ou des systèmes particuliers appelés conformateurs.

TD : Les AOP

Exo1:

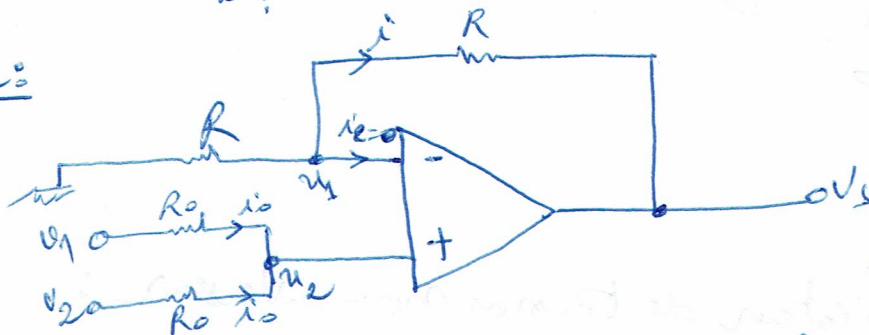
soit le montage ci-dessous avec un AOP idéal :



$$\begin{aligned} V_1 &= 515 \text{ mV} \\ V_2 &= 372 \text{ mV} \\ V_s &= -3,29 \text{ V} \\ R &= 47 \text{ k}\Omega \\ R_1 &= 10 \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$

- calculer R_2 ?

Exo2:



Soit le circuit ci-circuité :

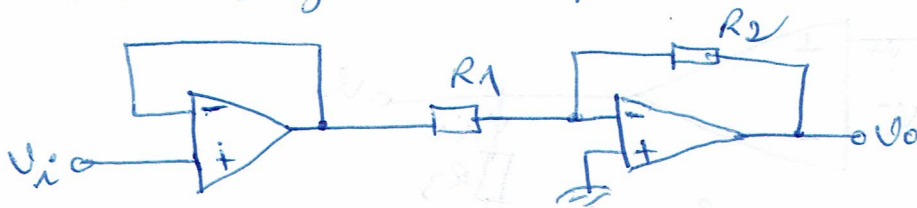
$$R = 33 \text{ k}\Omega, R_0 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$V_s = 4,713 \text{ V}, V_2 = 1,213 \text{ V}$$

- Sachant que $V_2 = \frac{V_s}{2}$, calculer V_1 ? L'AOP est idéal.

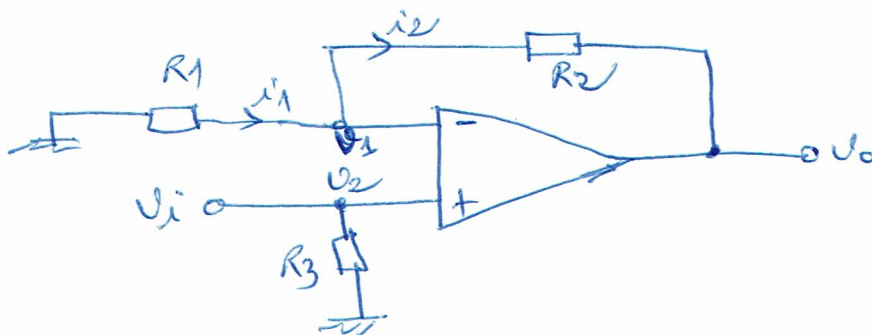
Exo3: Sachant que $R_1 = 25 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 25 \text{ k}\Omega$

Trouver le gain de l'AOP suivant :



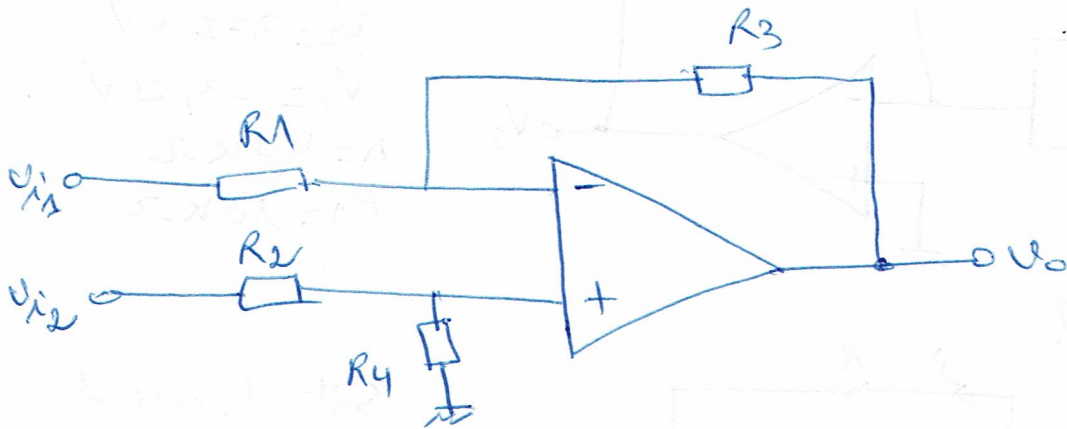
Exo4: Sachant que $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ et $R_3 = 100 \text{ k}\Omega$

Trouver le gain de l'AOP suivant :



Exo 5: sachant que $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $R_2 = 1\text{k}\Omega$, $R_3 = 12\text{k}\Omega$
 $R_4 = 15\text{k}\Omega$, $U_1 = 3\text{V}$ et $U_2 = 1,5\text{V}$.

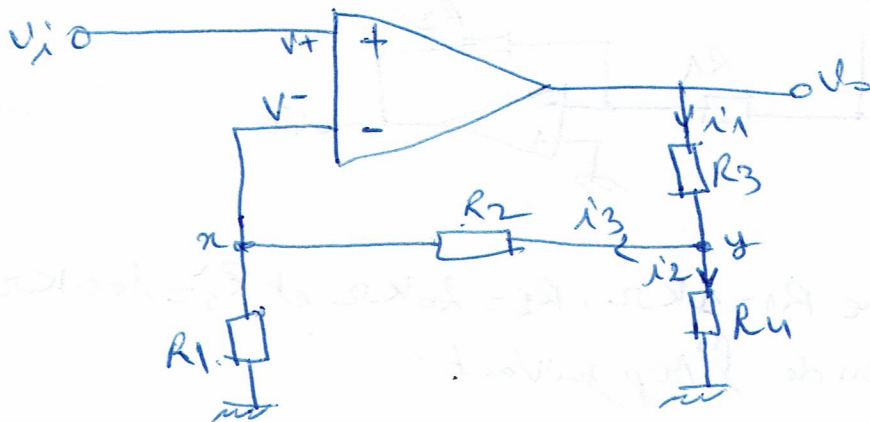
- Trouver la tension de sortie de l'AOP suivant :



Exo 6:

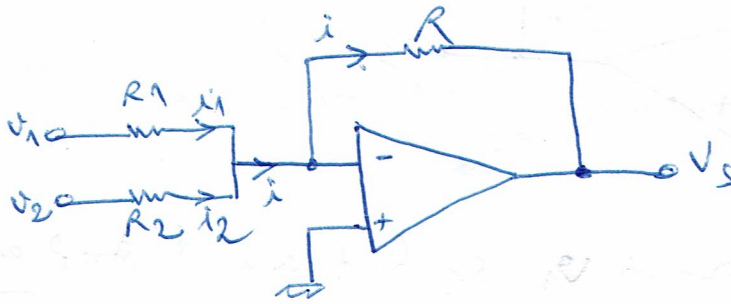
Soit un amplificateur de tension non-inverseur :

- 1/ Trouver le gain de l'amplificateur en fonction des résistances.
- 2/ En déduire le comportement du circuit pour $R_1 = \infty$ et $R_2 = 0$.



TD: Les AOP

Exo 1: soit le montage ci-dessous avec un AOP idéal:



$$V_1 = 515 \text{ mV}$$

$$V_2 = 372 \text{ mV}$$

$$V_S = -3,29 \text{ V}$$

$$R = 47 \text{ k}\Omega$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

- calculer R_2 ?

Solution:

on applique le théorème de superposition.

$$V_S = -\frac{R}{R_1} V_1 - \frac{R}{R_2} V_2$$

$$\Rightarrow \left(V_S + \frac{R}{R_1} V_1 \right) = -\frac{R}{R_2} V_2 \Rightarrow R_2 = -\frac{R V_2}{V_S + \frac{R}{R_1} V_1} = \frac{-47 \cdot 10^3 \cdot 372 \cdot 10^{-3}}{-3,29 + \frac{47 \cdot 10^3 \cdot 515 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_2 = 20 \text{ k}\Omega}$$

une autre méthode :

$$V_1 = R_1 i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{V_1}{R_1} = 5,15 \cdot 10^{-5} \text{ A}$$

$$V_2 = R_2 i_2$$

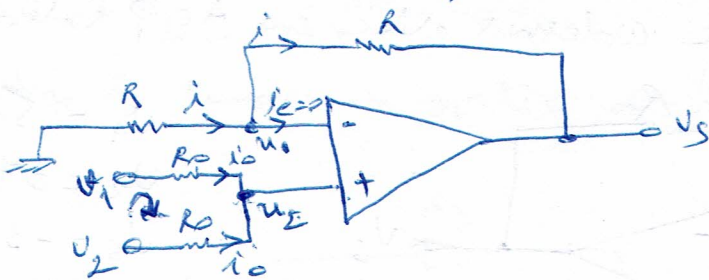
$$V_S = -R i \Rightarrow i = \frac{-V_S}{R} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ A}$$

$$i_1 + i_2 = i \Rightarrow i_2 = i - i_1 = (7 - 5,15) \cdot 10^{-5} \Rightarrow \boxed{i_2 = 1,85 \cdot 10^{-5} \text{ A}}$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{V_2}{i_2} = \frac{372 \cdot 10^{-3}}{1,85 \cdot 10^{-5}} \Rightarrow \boxed{R_2 = 20 \text{ k}\Omega}$$

Exo 2:

Soit le circuit suivant :

- Calculer la valeur de V_s , sachant que l'AOP est idéal ?

$$R = 33\text{K}\Omega, R_0 = 10\text{K}\Omega, V_s = 4,713\text{V}, V_2 = 1,213\text{V}$$

sachant que $V_2 = \frac{V_s}{2}$.

Solution: V_1 ?

Sachant que $V_2 = \frac{V_s}{2}$

$$V_s = -(R+R)i \Rightarrow V_s = -2Ri$$

on a $V_2 = \frac{V_s}{2}$

$$* V_1 - V_2 = R_0 i_0 \Rightarrow V_1 - \frac{V_s}{2} = R_0 i_0 \quad \text{--- (1)}$$

$$* V_2 - V_2 = R_0 i_0 \Rightarrow \frac{V_s}{2} - V_2 = R_0 i_0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{(2)} \Rightarrow i_0 = \frac{V_s - 2V_2}{2R_0}$$

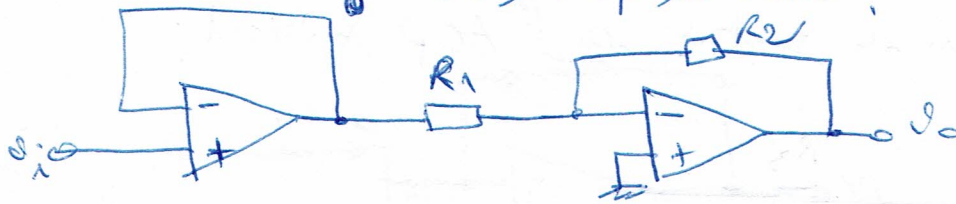
$$\text{(1)} \Rightarrow V_1 - \frac{V_s}{2} = R_0 \left(\frac{V_s - 2V_2}{2R_0} \right)$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{V_s}{2} + \frac{V_s - 2V_2}{2} = \frac{4,713}{2} + \frac{4,713 - 2 \times 1,213}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1 = 3,15\text{V}}$$

Exo 3: sachant que $R_1 = 2,5 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 25 \text{ k}\Omega$.

Trouver le gain de l'Aop suivant :



Solution:

le circuit a un Aop niveur à l'entrée suivi d'un Aop inverseur, le niveur a toujours un gain = 1.

le gain d'un Aop inverseur est :

$$\text{gain partiel} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{25}{2,5} = 10.$$

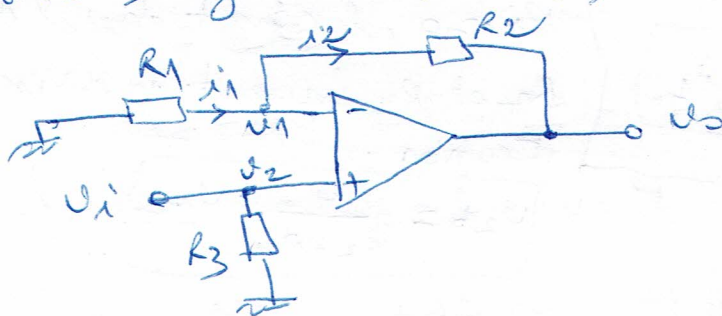
* le gain global est le produit des gains des deux Aop

en cascade donc : gain global = (gain niveur) × (gain partiel)

$$\text{gain global} = (1) \times (10) \Rightarrow \text{gain global} = 10$$

Exo 4: sachant que $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ et $R_3 = 100 \text{ k}\Omega$

Trouver le gain de l'Aop suivant :



Solution: le circuit est un Aop non inverseur donc :

$$G_V = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 1 + \frac{20}{1} \Rightarrow G_V = 21$$

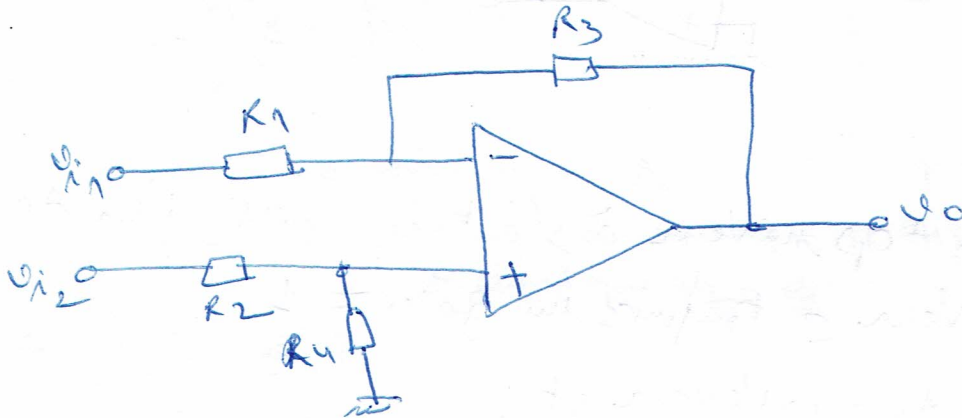
$$\left. \begin{aligned} v_o &= -(R_2 + R_1)i_2 \\ v_i &= -R_1 i_1 \end{aligned} \right\} i_1 = i_2 \Rightarrow \frac{v_o}{v_i} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 1 + \frac{20}{1}$$

$$\Rightarrow G_V = 21$$

EX05: Sachant que $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$, $R_3 = 12k\Omega$, $R_4 = 15k\Omega$

$V_1 = 3V$ et $V_2 = 1,5V$.

Trouver la tension de sortie de l'AOP suivant;



Solution: le circuit est un AOP soustracteur (différentiateur)

est la sortie est exprimée par $V_0 = \frac{R_3}{R_1} (V_{i2} - V_{i1}) = \frac{12}{1} (1,5 - 3)$
 $\Rightarrow V_0 = -18V$

En appliquant le théorème de superposition!

a)

$V_{i2} = 0$ pas de courant dans R_2 et R_4
 $\Rightarrow V_{2a} = 0 \Rightarrow V_{01} = -\frac{R_3}{R_1} V_{i1}$

b)

$V_{i1} = 0$, le courant dans l'AOP = 0
 R_2 et R_4 forment un diviseur de tension.
 $V_{2b} = \frac{R_4}{R_2 + R_4} V_{i2}$

ou $V_{1b} = V_{2b}$
 $V_{02} = -(R_3 + R_1) i_1$ et $i_1 = -\frac{V_{1b}}{R_1} \Rightarrow V_{02} = \frac{(R_3 + R_1)}{R_1} V_{1b}$
 $\Rightarrow V_{02} = \left(1 + \frac{R_3}{R_1}\right) V_{1b} = \left(1 + \frac{R_3}{R_1}\right) V_{2b} \Rightarrow V_{02} = \left(\frac{R_1 + R_3}{R_1}\right) \left(\frac{R_4}{R_2 + R_4}\right) V_{i2}$

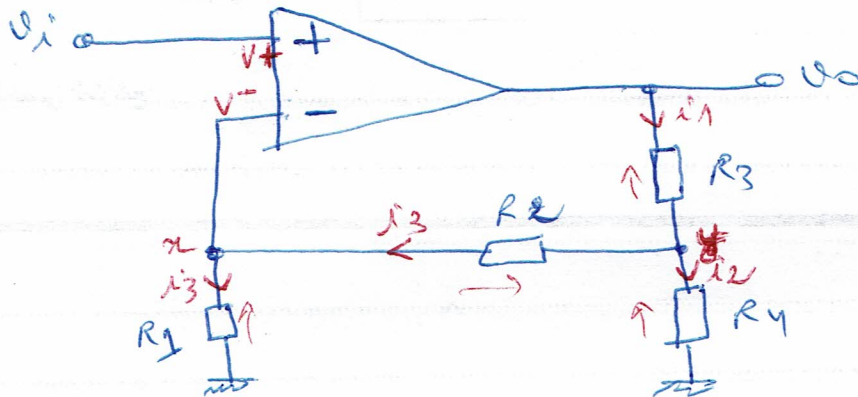
$\Rightarrow V_{02} = \left(1 + \frac{R_3}{R_1}\right) \left(\frac{R_4/R_2}{1 + R_4/R_2}\right) V_{i2}$ d'où: $V_0 = V_{01} + V_{02}$
 AOP de différence idéal
 $\Rightarrow V_0 = 0$ qd $V_{i1} = V_{i2}$
 $V_0 = -\frac{R_3}{R_1} V_{i1} + \left(1 + \frac{R_3}{R_1}\right) \left(\frac{R_4/R_2}{1 + R_4/R_2}\right) V_{i2}$
 $\frac{R_3}{R_1} = \left(1 + \frac{R_3}{R_1}\right) \left(\frac{R_4/R_2}{1 + R_4/R_2}\right) \Rightarrow \frac{R_3 R_4}{1 + R_3/R_1} = \frac{R_4/R_2}{1 + R_4/R_1} \Rightarrow \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_4}{R_2} \Rightarrow V_0 = \frac{R_3}{R_1} (V_{i2} - V_{i1})$
 $\Rightarrow V_0 = -18V$

4

Exo 6

Soit un amplificateur de tension non inverseur.

- 1) Trouver le gain de l'amplificateur en fonction des résistances et en déduire le comportement du circuit pour $R_1 = \infty$ et $R_2 = 0$.



Solution

- 1) en observant la figure et en se basant sur les équations de base de l'Aop, on peut écrire : $V^+ = V^-$
Comme $V^+ = V_i$ et $V^- = V_x$, alors on déduit que $V^+ = V^- = V_i = V_x$
de plus, le courant entrant dans la borne + et la borne - est nul.
Maintenant en se basant sur la figure, on peut écrire les équations suivantes :

$$V_x = V_i$$

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad \text{--- (1)}$$

$$V_y - V_x = R_2 i_3 = V_y - V_i \Rightarrow V_y = V_i + R_2 i_3 \quad \text{--- (2)}$$

$$V_o - V_y = R_3 i_1 \Rightarrow V_o = V_y + R_3 i_1 \quad \text{--- (3)}$$

$$V_y = R_4 i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{V_y}{R_4} \quad \text{--- (4)}$$

$$V_x = V_i = R_1 i_3 \Rightarrow i_3 = \frac{V_i}{R_1} \quad \text{--- (5)}$$

en utilisant (2), (4) et (5) on a :

$$i_1 = i_2 + i_3 = \frac{V_y}{R_4} + \frac{V_i}{R_1}$$

$$\text{(5)} \quad i_1 = \frac{V_i + R_2 i_3}{R_4} + \frac{V_i}{R_1} = \frac{V_i + R_2 \frac{V_i}{R_1}}{R_4} + \frac{V_i}{R_1}$$

$$i_1 = V_i \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_4} + \frac{1}{R_1} \right] \dots \textcircled{6}$$

en utilisant $\textcircled{2}$, $\textcircled{5}$ et $\textcircled{6}$ on a:

$$V_0 - V_y = R_3 i_1 \Rightarrow V_0 = (V_i + R_2 i_1) = R_3 i_1$$

$$\Rightarrow V_0 - \left(V_i + R_2 \frac{V_i}{R_1} \right) = R_3 \left[V_i \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_4} + \frac{1}{R_1} \right) \right]$$

$$V_0 = V_i \left[\frac{R_2}{R_1} + 1 + R_3 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_4} + \frac{1}{R_1} \right) \right]$$

$$\frac{V_0}{V_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1} + R_3 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_4} + \frac{1}{R_1} \right)$$

donc le gain $G_V = \frac{V_0}{V_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3}{R_4} + \frac{R_2 R_3}{R_1 R_4} + \frac{R_3}{R_1}$

$$= \frac{R_1 R_4}{R_1 R_4} + \frac{R_2 R_4}{R_1 R_4} + \frac{R_3 R_4}{R_1 R_4} + \frac{R_2 R_3}{R_1 R_4} + \frac{R_3 R_4}{R_1 R_4}$$

$$\Rightarrow G_V = \frac{R_1 R_4 + R_2 R_4 + R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_1 R_4}$$

$$\Rightarrow G_V = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3 R_4}{R_1 R_4}$$

2) Si $R_1 = \infty$ et $R_2 = 0$ on a:

* Si $R_1 \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow G_V = \frac{R_1(R_3 + R_4) + R_3 R_4}{R_1 R_4} = \frac{R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_3 R_4}{R_1 R_4} \quad \text{négligeable}$$

$$\Rightarrow G_V = \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 R_4} \Rightarrow G_V = 1 + \frac{R_3}{R_4}$$

* Si $R_2 = 0 \Rightarrow G_V = \frac{R_1 R_4 + R_1 R_3 + R_3 R_4}{R_1 R_4}$

$$\Rightarrow G_V = 1 + \frac{R_3(R_1 + R_4)}{R_1 R_4}$$

$\textcircled{6}$

Chapitre 3 LES FILTRES ACTIFS

1. HISTORIQUES

Les filtres électriques, inventés par Zobel dès 1923 ont permis l'extension considérable des télécommunications. Jusqu'à ces dernières années, ils étaient presque uniquement réalisés à l'aide de composants passifs doués de propriétés résonnantes : inductances, capacités, quartz...etc. L'avènement du transistor, et plus récemment de l'amplificateur opérationnel intégré, a permis de construire des résonateurs d'un type nouveau, ne mettant en œuvre que des résistances et des condensateurs associés à ces éléments actifs. Les filtres actifs, présentent de nombreux avantages surtout dans le domaine des basses fréquences. Ils sont légers, peu encombrants et d'un coût modique.

2. Définition

Si on fait varier la fréquence d'opération d'un circuit, l'impédance des capacités et inductances variera aussi. Il est important de bien comprendre le comportement de ces éléments lorsque la fréquence varie. On verra qu'un choix judicieux de ces composantes permettra de créer des circuits où on peut bloquer ou laisser passer des signaux de certaines fréquences voulues. On appelle ce genre de circuit un filtre.

La fonction filtrage de fréquence sert à assurer la suppression des signaux de fréquences non désirée et conserver ou même amplifier, les signaux de fréquence désirée.

Un filtre est un quadripôle passif (ou une association de quadripôles passifs), qui est intercalé entre une source et une impédance d'utilisation qui laisse passer les signaux de certaines fréquences sinusoïdales en principe sans atténuation et arrête complètement les signaux des autres fréquences.

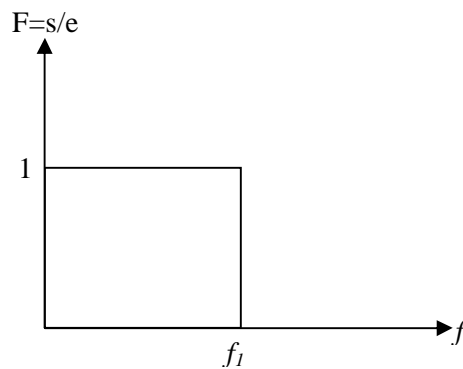
Les filtres se présentent sous différentes formes. Lorsqu'il n'y a pas d'amplification de la puissance du signal d'entrée par un élément actif (transistor, AOP), il est passif ; dans le cas contraire il est actif. Les filtres actifs sont constitués uniquement de résistances, de condensateurs et d'éléments actifs (amplificateurs opérationnels la plupart du temps).

3. Action des différents filtres

Suivant le domaine de fréquences éliminées, on classe les filtres en quatre catégories : passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe bande.

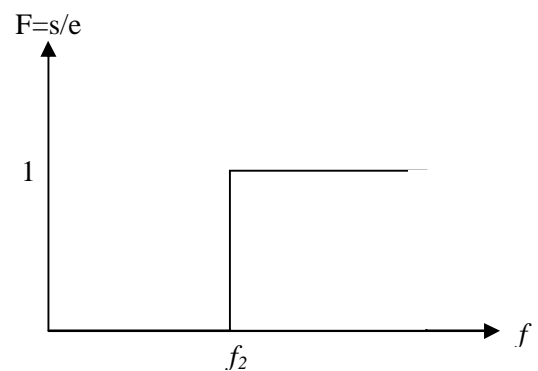
- **Filtre passe-bas**

Il laisse passer sans atténuation des signaux dont la fréquence $0 < f < f_1$ et atténue les fréquences de f_1 à f_∞



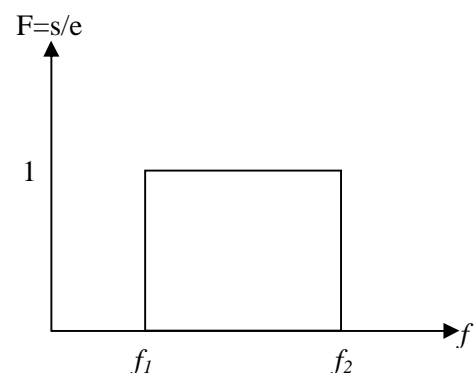
- **Filtre passe-haut**

Il laisse passer sans atténuation des signaux dont la fréquence $f > f_2$ et atténue les fréquences $f < f_2$



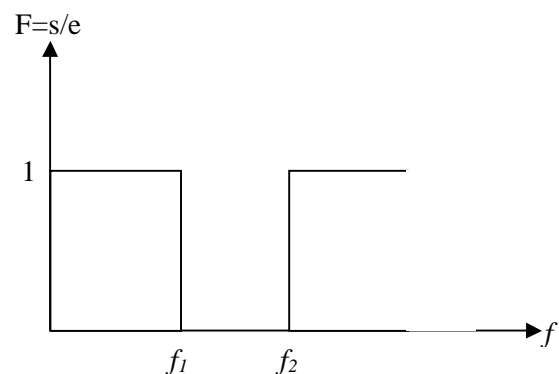
- **Le filtre passe bande :**

Il laisse passer sans atténuation des signaux dont les fréquences $f_1 < f < f_2$ et atténue les autres fréquences



- **Le filtre coupe-bande :**

Il laisse passer sans atténuation des signaux dont les fréquences non comprises entre f_1 et f_2 .



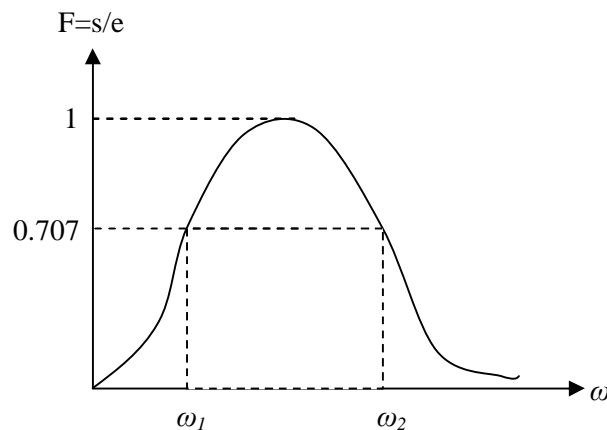
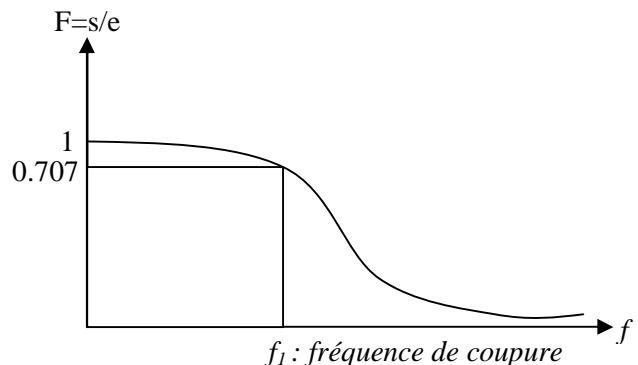
En réalité les filtres transmettent plus ou moins bien les signaux de fréquences transmises dans leurs domaines de définitions, et atténuent plus ou moins bien les autres.

- **Exemple :**

La courbe de gain d'un filtre passe bas réel est :

On considère alors que la fréquence f_1 appelée fréquence de **coupure** est celle pour laquelle l'atténuation est **-3dB**

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707; 20 \log(0.707) = -3dB$$



4. Caractéristiques d'un filtre

Les principales caractéristiques d'un filtre actif sont :

- sa ou ses fréquence(s) de coupure,
- sa bande passante (filtres passe-bande et coupe-bande),
- son coefficient d'amplification en tension maximal et son gain maximum.

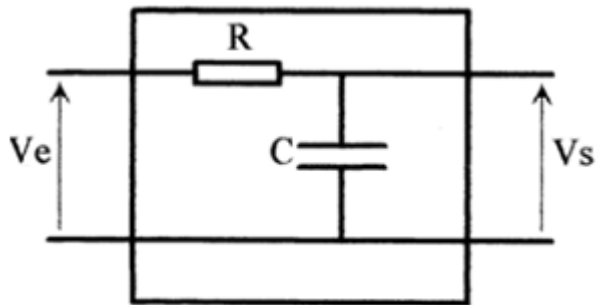
Elles ne dépendent, en première approximation, que des composants passifs utilisés.

5. Structure des filtres actifs Il existe un grand nombre de montages pour la réalisation des filtres actifs. Nous allons citer dans quelques structures typiques que l'on rencontre très fréquemment.

6. Filtres classiques du premier ordre

Selon le domaine de fréquences transmises sans atténuation on distingue :

6.1. Filtre passe-bas



La fonction de transfert se met sous la forme :

$$F(j\omega) = \frac{k}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

où k est une constante réelle et ω_0 est la pulsation de coupure.

6.1.1. Diagramme de Bode

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Forme générale

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{k}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = F$$

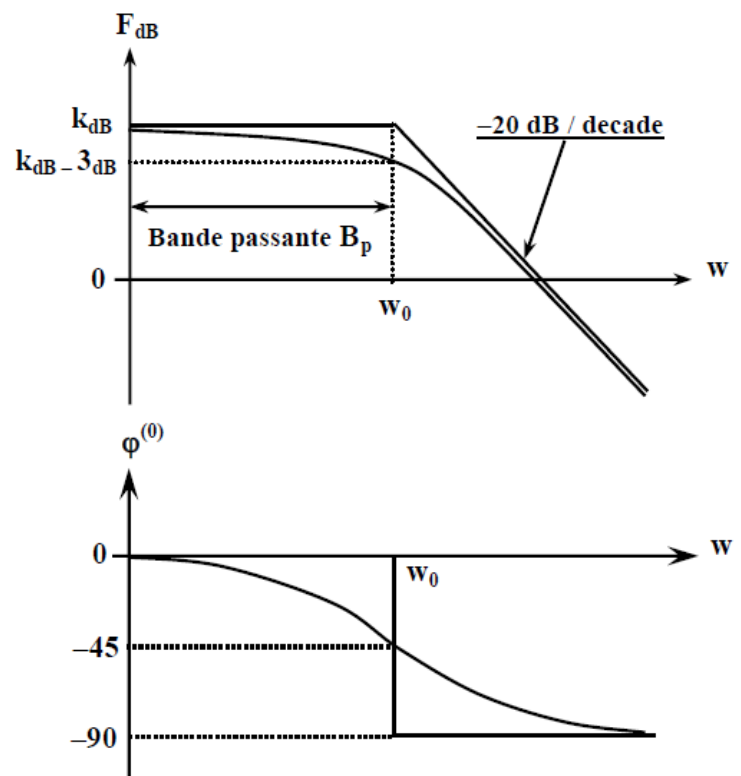
$$k = 1, \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$F = \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow F_{dB} = 20 \log F$$

$$F_{dB} = 20 \log k - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\varphi = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$



Courbes de gain et de phase

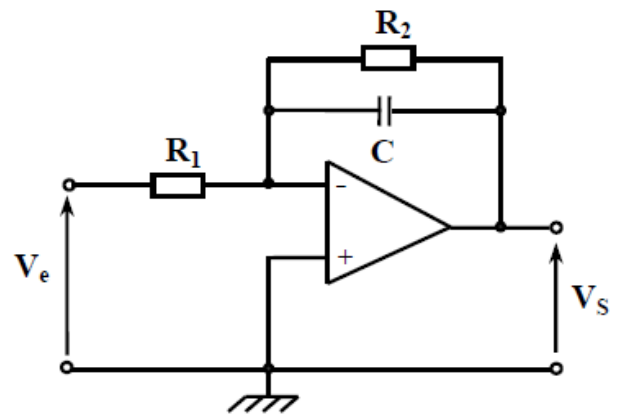
$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} F_{dB} \rightarrow k_{dB} \\ \varphi \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} F_{dB} \rightarrow k_{dB} - 3dB \\ \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} F_{dB} \rightarrow k_{dB} - 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \\ \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

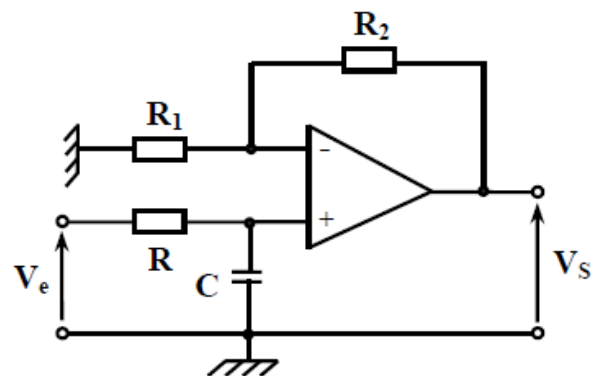
6.1.2. Exemples

$$\left\{ \begin{array}{l} V^+ = 0 \\ V^- = \frac{R_1 V_s + (R_2 // C) V_e}{R_1 + (R_2 // C)} \end{array} \right. \Rightarrow F(p) = \frac{-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{1 + R_2 C p}$$



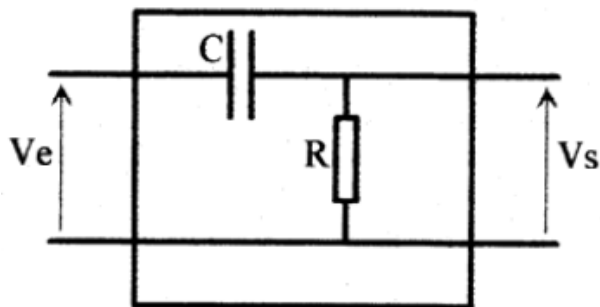
Filtre passe-bas

$$\left\{ \begin{array}{l} V^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s \\ V^+ = \frac{1}{1 + RCp} V_e \end{array} \right. \Rightarrow F(p) = \frac{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}{1 + RCp}, V^+ = V^-$$



Filtre passe-bas

6.2. Filtre passe-haut



La fonction de transfert se met sous la forme :

$$F(j\omega) = k \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

où k est une constante réelle et ω_0 est la pulsation de coupure.

6.2.1. Diagramme de Bode

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

Forme générale

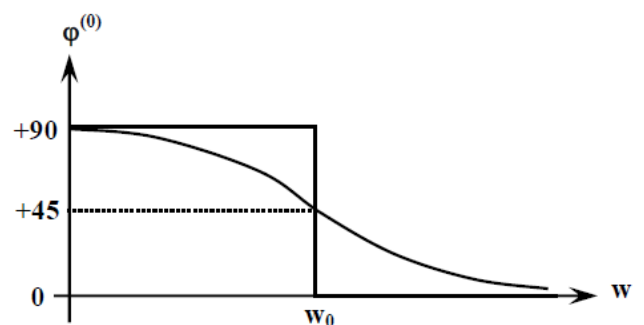
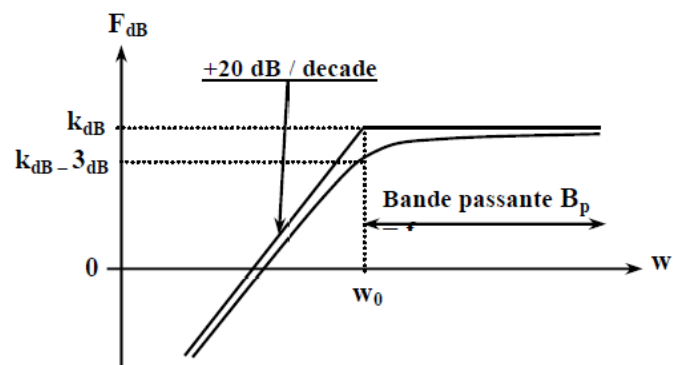
$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{k \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} = F$$

$$k = 1, \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$F = k \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \Rightarrow F_{dB} = 20 \log F$$

$$F_{dB} = k_{dB} + 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctg \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$



Courbes de gain et de phase

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} F_{dB} \rightarrow -\infty \\ \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

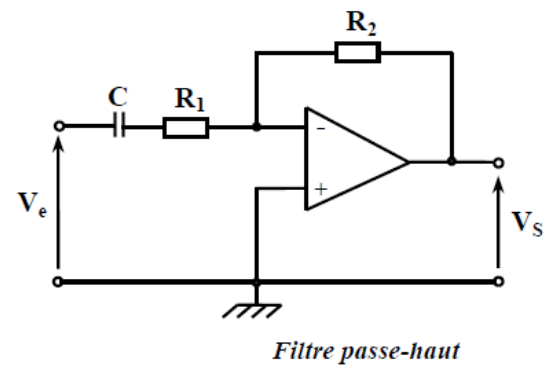
$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} F_{dB} \rightarrow k_{dB} - 3dB \\ \varphi \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} F_{dB} \rightarrow 20 \log k = k_{dB} \\ \varphi \rightarrow 0 \end{cases}$$

6.2.2. Exemples

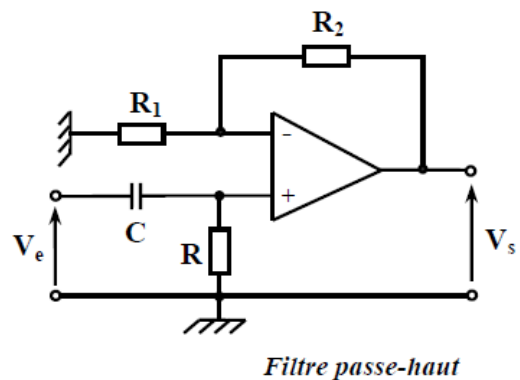
$$\left\{ \begin{array}{l} V^+ = 0 \\ V^- = \frac{R_2 V_e + \left(R_1 + \frac{1}{Cp}\right) V_s}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cp}} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow F(p) = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \left(\frac{R_1 Cp}{1 + R_1 Cp}\right)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} V^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s \\ V^+ = \frac{RCp}{1 + RCp} V_e \end{array} \right.$$

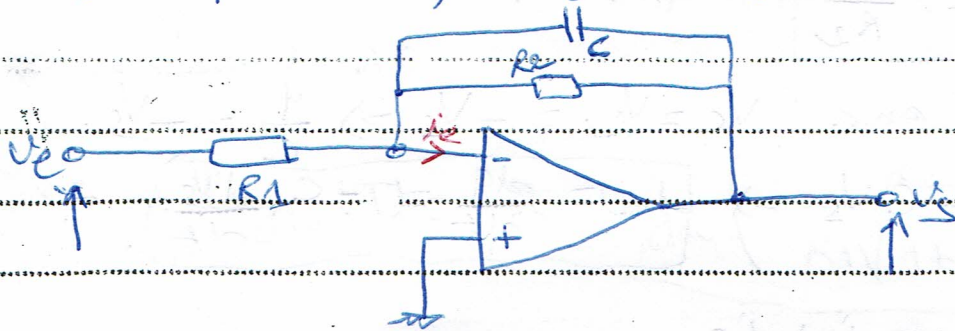
$$\Rightarrow F(p) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{RCp}{1 + RCp}$$



ID. Les Filtrés Actifs

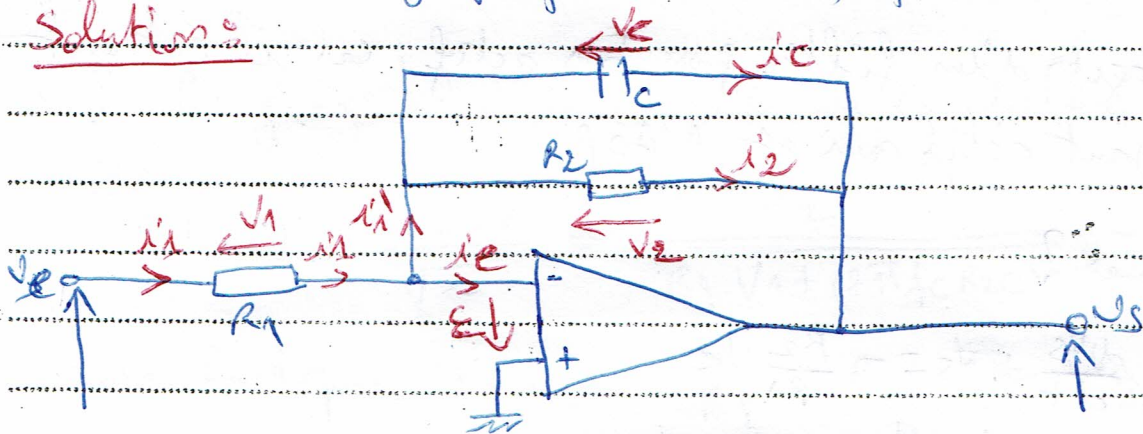
Exo 1: Filtre passe bas actif

Soit l'Aop suivant; il est idéal.



- 1°) a) Trouver la relation entre les courants i_1 , i_2 et i_c
b) donner l'équation différentielle en fonction de $v_s(t)$
- 2°) a) de quoi s'agit-il ce montage?
b) Trouver \mathcal{D}_{max}
- 3°) a) Trouver la Fonction de Transfert de ce montage.
b) Trouver le gain maximal de ce montage en dB.
- 4°) Déterminer graphiquement la fréquence de coupure f_c .

Solution:



1°) a) la relation entre i_1 , i_2 et i_c .

on a : $i_1 = i_2 + i_c$, or l'Aop est idéal donc $i_2 = 0$
alors $i_1 = i_c$, par le suite :

$$i_1 = i_2 + i_c \quad (1)$$

b) l'équation différentielle relative à la tension de sortie $v_s(t)$:
en appliquant la loi des mailles on a :

• Maille d'entrée : $v_e - v_1 + \epsilon = 0$, or $\epsilon = 0$, car l'Aop fonctionne
en régime linéaire $\Rightarrow v_e - v_1 = 0 \Rightarrow v_e = v_1 = R_1 i_1 \Rightarrow$

$$i_1 = \frac{v_e}{R_1} \quad (2)$$

(1)

Maille de sortie :

$$V_s + V_2 + e = 0 \Rightarrow V_s + V_2 = 0 \Rightarrow V_s = -V_2 = -R_2 i_2$$

$$\Rightarrow \boxed{i_2 = \frac{-V_s}{R_2}}$$

d'autre part on a : $V_c = V_2 = -V_s \Rightarrow \frac{q}{C} = -V_s$.

$$\Rightarrow q = -C V_s \Rightarrow \boxed{i_c = \frac{dq}{dt} = -C \frac{dV_s}{dt}}$$

on a de (1) : $i_1 = i_2 + i_c$

$$\Rightarrow \frac{V_e}{R_1} = \frac{-V_s}{R_2} - C \frac{dV_s}{dt} \Rightarrow C \frac{dV_s}{dt} + \frac{V_s}{R_2} = -\frac{V_e}{R_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_2 C \frac{dV_s}{dt} + V_s = -\frac{R_2}{R_1} V_e}$$

C'est l'équation différentielle qui a pour solution :

$$V_s(t) = V_{s\max} \sin(2\pi f t + \phi_s)$$

2°) a) il s'agit d'un filtre passe bas actif, car il contient un composant actif qui est l'AOP.

b) $V_{s\max}$?

$$R_2 C \frac{dV_s}{dt} + V_s = -\frac{R_2}{R_1} V_e$$

$$\Rightarrow R_2 C p V_s + V_s = -\frac{R_2}{R_1} V_e$$

$$\Rightarrow (R_2 C p + 1) V_s = -\frac{R_2}{R_1} V_e$$

$$\Rightarrow V_s = \frac{(-R_2/R_1) \cdot V_e}{1 + R_2 C p} \quad ; \quad p = j\omega \Rightarrow V_s = \frac{-\frac{R_2}{R_1} V_e}{1 + R_2 C j\omega}$$

$$\Rightarrow |V_{s\max}| = \frac{\frac{R_2}{R_1} V_{e\max}}{\sqrt{1 + R_2^2 C^2 \omega^2}} = \frac{R_2 |V_{e\max}|}{R_1 \sqrt{1 + R_2^2 C^2 \omega^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{s\max} = \frac{R_2 V_{e\max}}{R_1 \sqrt{1 + (2\pi f R_2 C)^2}}}$$

il s'agit d'un filtre passe bas, car pour les très basses

fréquences ($f_c \ll$) $\Rightarrow V_{s\max}$ tend vers $\boxed{V_{s\max} = \frac{R_2}{R_1} V_{e\max}}$ (2)

3) a) La FT de ce montage et le gain en dB.

$$T = \frac{V_{s\max}}{V_{e\max}} = \frac{R_2}{R_1 \sqrt{1 + (2\pi f R_2 C)^2}}$$

* le gain en dB.

$$G_0 = 20 \log_{10}(T) = 20 \log_{10} \left(\frac{R_2}{R_1 \sqrt{1 + (2\pi f R_2 C)^2}} \right) = G_0$$

b) le gain maximal en dB:

$$G_0 = 20 \log_{10}(T_{\max}) \text{ or!}$$

$$T_{\max} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow G_0 = 20 \log_{10} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

alors, le gain maximal ne dépend que du rapport $\frac{R_2}{R_1}$ et par suite il est indépendant de "C",

5°) la fréquence de coupure de ce filtre :

$$T(f_c) = \frac{T_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{R_2}{R_1 \sqrt{1 + (2\pi f_c R_2 C)^2}}$$

sachant que $T_{\max} = \frac{R_2}{R_1}$, pour trouver f_c on a:

$$\text{alors: } \sqrt{2} = \sqrt{1 + (2\pi f_c R_2 C)^2}$$

$$\Rightarrow 2 = 1 + (2\pi f_c R_2 C)^2$$

$$\Rightarrow (2\pi f_c R_2 C)^2 = 1 \Rightarrow 2\pi f_c R_2 C = 1$$

$$\Rightarrow f_c = \frac{1}{2\pi R_2 C}$$

6°) déterminer R_1 sachant que $G_0 = +1 \text{ dB}$, $R_2 = 10000 \Omega$.

$$G_0 = 20 \log_{10} \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \Rightarrow \frac{G_0}{20} = \log_{10} \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = 10^{\frac{G_0}{20}}$$

$$\Rightarrow R_1 = R_2 / 10^{\frac{G_0}{20}} = \frac{10000}{10^{\frac{1}{20}}} \Rightarrow R_1 = 11222 \Omega$$

(3)

Determination de g_v graphiquement;

$$g_0 = 20 \log_{10} \frac{R_2/R_1}{\sqrt{1+(2\pi f_c R_2 C)^2}}$$

$$= 20 \log_{10} \frac{R_2}{R_1} - 10 \log_{10} (1+(2\pi f_c R_2 C)^2)$$

(TBF) \rightarrow (TBF) $\rightarrow g_v = 20 \log_{10} \frac{R_2}{R_1}$

(THF) \rightarrow (THF) $\rightarrow g_v = 20 \log_{10} \frac{R_2}{R_1} - 20 \log_{10} (2\pi f_c R_2 C)$

Pour $f_c = \frac{1}{2\pi R_2 C} \rightarrow g_v = 20 \log_{10} \left(\frac{R_2}{R_1}\right) - 20 \log_{10} \left(\frac{1+1}{2}\right)$

$$\rightarrow g_v = 20 \log_{10} \left(\frac{R_2}{R_1}\right) - 3 \text{ dB}$$

on a: $g_v(f_c) = G_0 - 3 \text{ dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{10000}{1122}\right) - 3 \text{ dB}$

$$\Rightarrow g_v(f_c) = -1 - 3 \Rightarrow g_v(f_c) = -4 \text{ dB}$$

Pour $C = 0,8 \mu\text{F} \rightarrow f_c?$ donc $f_c = 200 \text{ Hz}$

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_2 C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow f_c \approx 200 \text{ Hz}$$

Controle écrit de :

Norm et prénom du candidat :

NUMÉRO
47

47

جامعة منتوري

Faculté des sciences de la technologie

جامعة منتوري

Université des frères MENTOURI

جامعة منتوري

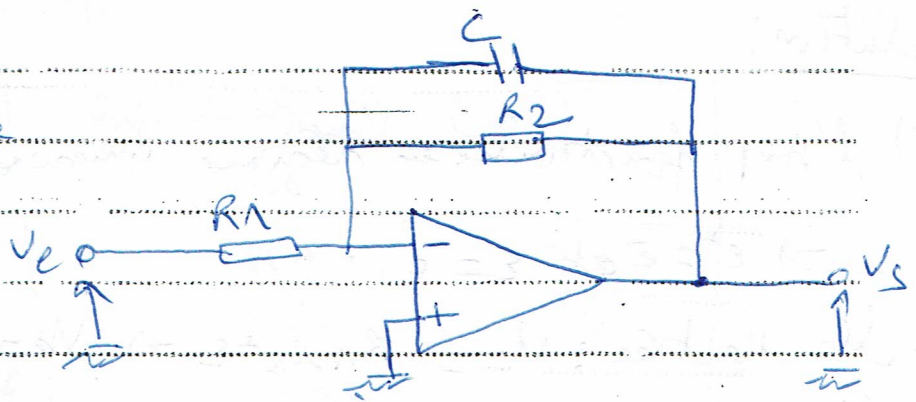
Exo 2!

on considère le filtre ci-contre

$$R_1 = 100 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 1 \text{ M}\Omega$$

$$C = 100 \text{ nF}$$



1°) En déduire la réponse du filtre en régime sinusoïdal. Établir la Fonction de Transfert et la mettre sous la forme:

$$T = T_0 \frac{1}{1 + jf/f_0}$$

2°) Donner les expressions de T_0 et f_0 et leurs valeurs numériques.

3°) Exprimer le module T de T

4°) Faire un Tableau et calculer T et G_V pour $f=0$, $f=f_0$, $f=500 \text{ Hz}$, $f=1 \text{ kHz}$, $f=3 \text{ kHz}$.

5°) Tracer G_V sur papier semi-logarithmique et relier les points particuliers.

6°) En déduire la nature du filtre, préciser la valeur de la bande passante.

7°) le signal d'entrée est maintenant le suivant:

$$V_e(t) = U_0 + U_{1 \text{ max}} \sin(2\pi F t + \phi_1) + U_{2 \text{ max}} \sin(2\pi F t + \phi_2)$$

avec $F = 500 \text{ Hz}$, et $U_0 = 1 \text{ V}$, $U_{1 \text{ max}} = 0,5 \text{ V}$, $U_{2 \text{ max}} = 0,2 \text{ V}$,

a) que représente U_0 et les termes suivants,

b) quelle est l'action du Filtre sur ce signal?

c) que vaut alors le tension de sortie?

Solution:

1°) l'AOP fonctionne en régime linéaire (contre réaction)

$$\Rightarrow e^+ = \bar{e} \text{ et } e^- = 0$$

maille d'entrée: $V_e = R_1 i_1 + \bar{e} \Rightarrow V_e = R_1 i_1$

maille de sortie: $V_e = -Z_e i_1$, Z_e : impédance équivalente.

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{-Z_e i_1}{R_1 i_1} \Rightarrow \boxed{\frac{V_s}{V_e} = -\frac{Z_e}{R_1}}$$

$$Z_e = \frac{Z_c \cdot R_2}{Z_c + R_2} = \frac{\frac{R_2}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R_2} = \frac{R_2}{1 + jR_2\omega C}$$

$$\Rightarrow \frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_2}{R_1(1 + jR_2\omega C)} \Rightarrow \underline{T} = \frac{-R_2/R_1}{1 + jR_2\omega C}$$

$$\Rightarrow \underline{T} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + jR_2\omega C}; \omega = 2\pi f$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{T} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + jR_2C 2\pi f}} \Rightarrow \underline{T} = T_0 \frac{1}{1 + j f/f_0}$$

$$2^\circ) \underline{T} = T_0 \frac{1}{1 + j f/f_0}; \quad \boxed{T_0 = -\frac{R_2}{R_1}} \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi R_2 C}}$$

$$\text{AN: } \Rightarrow T_0 = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{10^6}{10^5} \Rightarrow \boxed{T_0 = -10}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_2 C} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-9}} \Rightarrow \boxed{f_0 = 1,6 \text{ Hz}}$$

3°) le module T de \underline{T}

$$\boxed{|T| = \|T_0\| \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_0)^2}} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + (2\pi R_2 C f)^2}}$$

4°) Étude fréquentielle :

$$10^9 \times 10^6 \rightarrow 10^7 \times 10^6 = 10^1$$

f (Hz)	T	G _V = 20 log ₁₀ (T) (dB)
0	10	20
116	7,11	17
500	0,1032	-30
1000	0,1016	-36
3000	0,10053	-46

5°) G_V (graphe) en dB.

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_0)^2}} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{\sqrt{1 + (R_2 R_2 C f)^2}}$$

$$T = 10 \frac{1}{\sqrt{1 + 0,14 f^2}} \quad , \quad G_V = 20 \log_{10} \left(\frac{10}{\sqrt{1 + 0,14 f^2}} \right)$$

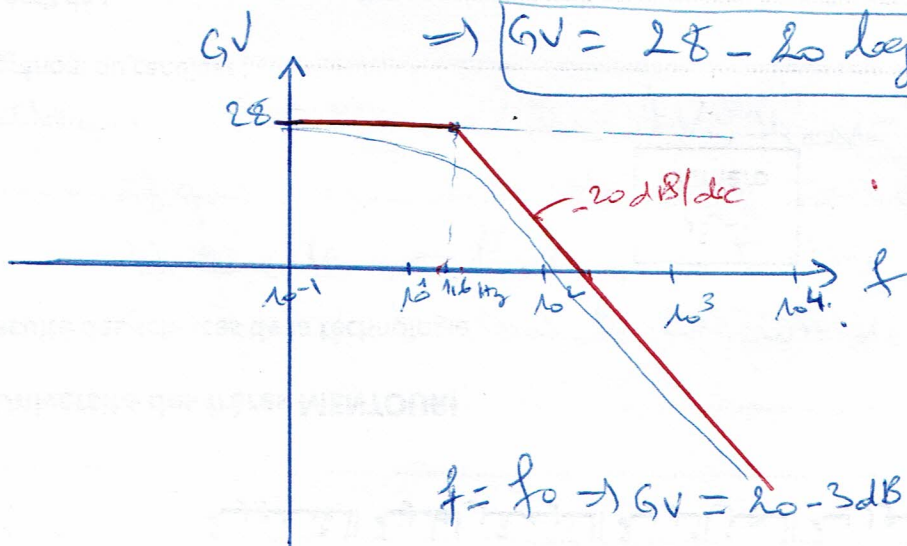
$$G_V = 20 \log_{10}(10) - 10 \log_{10}(1 + 0,14 f^2)$$

$$\Rightarrow G_V = 20 - 10 \log_{10}(1 + 0,14 f^2)$$

TBF $\Rightarrow f \ll \Rightarrow G_V = 20$

THF $\Rightarrow f \gg \Rightarrow G_V = 20 - 20 \log_{10}(0,14 \times f)$
 $= 20 - 20 \log_{10}(0,14) - 20 \log_{10}(f)$
 $= 20 + 8 - 20 \log_{10}(f)$

$$\Rightarrow G_V = 28 - 20 \log_{10}(f)$$



6°) le filtre est un filtre passe bas.

la bande passante $\rightarrow \Delta f = f_c - 0 \rightarrow \Delta f = 1,6 \text{ Hz}$

7°) $V_e = U_0 + U_{\text{max}} \sin(2\pi f_1 t + \phi_1) + U_{2\text{max}} \sin(2\pi 2F t + \phi_2) + \dots$

a) U_0 est la valeur moyenne, le terme suivant est le fondamental, ensuite viennent les harmoniques,

b) le filtre élimine les composantes dont la fréquence est plus grande que f_c (1,6 Hz), F_{c1} fondamental (0,8 Hz) et harmoniques sont donc arrêtées.

c) la tension de sortie est égale à la valeur moyenne (seule composante éliminée)

multipliée par l'amplificateur $T_0 = -10$

soit $U_s = 1 \times (-10) \rightarrow U_s = -10 \text{ V}$

8

Contrôle écrit de :

Nom et prénom du candidat :

الرقم
Numéro

جامعة منتوري

Faculté des sciences de la technologie

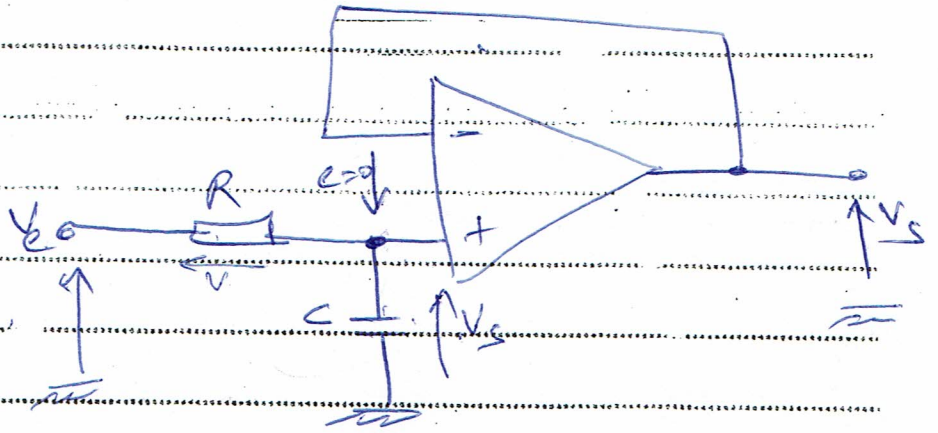
جامعة منتوري

Université des frères MENTOURI

جامعة منتوري

EX03

Soit l'Asp idéal



- 1) Montrer que le montage de la figure ci-dessus réalise la fonction du 1^{er} ordre ($n=1$) : $T_1(j\omega)$.
- 2) Déterminer la pulsation de coupure ω_1 ($\alpha=3dB$) du filtre du 1^{er} ordre en fonction de R et C.

Solution

1°) La tension V_s est répartie aux bornes du condensateur C ($e=0$)

Diviseur de tension : $V_s = V_e \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = V_e \frac{1}{1 + j\omega RC}$

$$\Rightarrow \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}$$

2°) La pulsation de coupure $\Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{RC}$