3.1 REPRÉSENTATION D'UN SIGNAL SINUSOÏDAL

3.1.1 Représentation vectorielle

Nous avons vu au chapitre 2 la représentation cartésienne d'une fonction sinusoïdale. Cette représentation, qui peut être qualifiée comme étant la plus courante, souffre du nombre limité d'opérations qu'elle permet : addition de deux ou trois signaux au maximum et à la rigueur intégration ou dérivation.

a) Représentation de Fresnel

À l'inverse, dans la représentation vectorielle ou cinématique, appelée aussi *représentation de Fresnel*, le signal $s(t) = S_m \cos(\omega t + \phi)$ est considéré comme la projection, sur l'axe Ox d'un repère orthonormé d'un vecteur $\overrightarrow{S}$, de module S_m, tournant dans le sens trigonométrique à la vitesse angulaire ω, et confondu avec l'axe Ox aux instants t :

$$t = -\frac{\phi}{\omega} + 2K\frac{\pi}{\omega} = -\frac{\phi}{\omega} + 2KT$$

La figure 3.1 en donne une illustration lorsque $\cos(\phi)$ est positif.

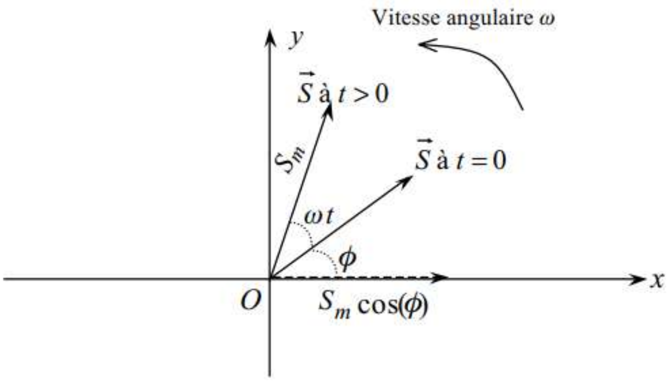

Figure 3.1 Représentation de Fresnel pour $\cos(\phi)$ positif.

La situation du vecteur à l'origine des temps définit la phase à l'origine. La phase instantanée est l'angle que fait le vecteur à un instant quelconque avec l'axe Ox, ce qui donne dans le cas de la figure 3.1 une phase instantanée égale à : $\omega t + \phi$.

b) Opérations linéaires sur les vecteurs de Fresnel

La représentation de Fresnel donne donc une image des différentes grandeurs à un instant donné, l'image devant tourner à la vitesse ω autour de l'origine. Souvent, pour simplifier la représentation, les vecteurs sont dessinés dans leurs positions à l'instant $t = 0$ et l'ensemble du dessin est supposé tourner à la vitesse ω.

Nous venons de voir qu'à la condition que les fonctions sinusoïdales aient la même pulsation, les vecteurs représentatifs gardent la même position relative les uns par rapport aux autres au cours de la rotation.

➤ Somme de deux vecteurs de même pulsation

Représentons par exemple deux vecteurs tensions $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ à l'instant $t = 0$:

$$u_1(t) = U_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad \text{et} \quad u_2(t) = U_2 \ \cos(\omega t + \phi_2)$$

Cherchons maintenant la somme de ces deux vecteurs.

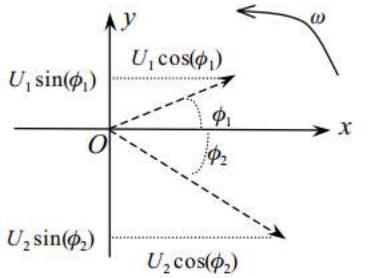

Figure 3.2 Représentation de Fresnel de deux vecteurs tensions.

Pour effectuer la somme de deux vecteurs, il faut les mettre bout à bout. Le vecteur ayant comme origine l'origine du premier vecteur, et comme extrémité l'extrémité du second est le vecteur somme. La figure 3.3 montre la construction de ce vecteur somme. Cette figure n'est représentative de la tension $u = U \cos(\omega t+\phi)$ qu'à l'instant $t = 0$. Pour obtenir les différentes valeurs temporelles, il suffit de faire tourner le plan à la vitesse angulaire ω autour de l'origine.

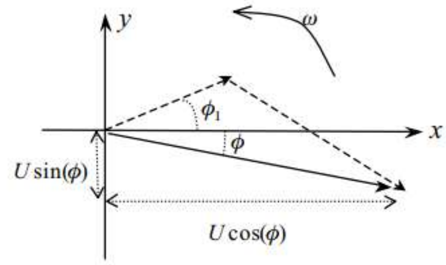

Figure 3.3 Somme des deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Pour calculer les composantes du vecteur somme, il suffit comme le montre la figure 3.3 d'ajouter les composantes de chaque vecteur. En projetant, sur l'axe des ordonnées, l'extrémité des deux vecteurs, nous obtenons $U_1 \ \sin(\phi_1)$ et $U_2 \ \sin(\phi_2)$. En projetant sur l'axe des abscisses ces mêmes vecteurs, on trouve $U_1 \cos(\phi_1)$ et $U_2 \cos(\phi_2)$. Les composantes du vecteur somme sont donc :

$$U \cos(\phi) = U_1 \cos(\phi_1) + U_2 \cos(\phi_2)$$

$$U \sin(\phi) = U_1 \ \sin(\phi_1) + U_2 \sin(\phi_2)$$

Pour obtenir le module, appelé aussi amplitude du vecteur somme, nous appliquons le théorème de Pythagore. Le module noté U est :

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

La tangente de la phase à l'origine est obtenue en faisant le rapport des composantes :

$$\tan(\phi) = \frac{U_1 \sin(\phi_1) + U_2 \sin(\phi_2)}{U_1 \cos(\phi_1) + U_2 \cos(\phi_2)}$$

Ces résultats peuvent être obtenus en utilisant la méthode du calcul trigonométrique.

➤ Changement de l'origine des temps

Soit le signal : $u(t) = U \cos(\omega t + \phi)$ représenté à l'instant $t = 0$ à la figure 3.4 (a). Si nous posons maintenant : $t' = t - t_0$, la tension $u(t)$ s'écrit : $u(t') = U \cos(\omega t' + \phi + \omega t_0)$ ce qui donne à l'instant $t' = 0$, pris maintenant comme origine, le résultat de la figure 3.4 (b).

Nous avançons ainsi le signal, si nous prenons pour origine des temps un instant ultérieur.

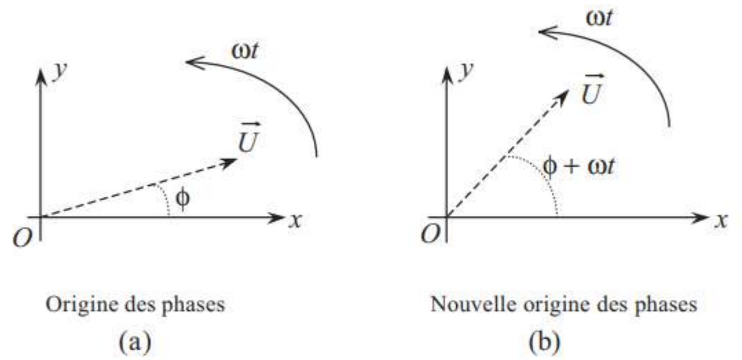

Figure 3.4 Effet du changement de l'origine du temps sur la phase.

➤ Dérivation et intégration par rapport au temps

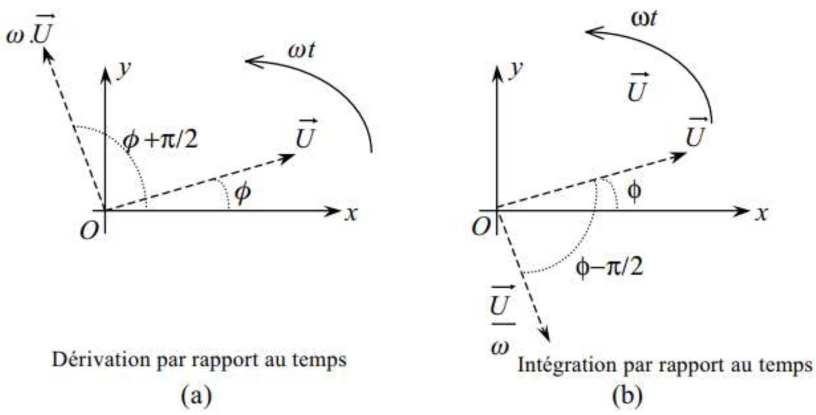

Figure 3.5 Effet de la dérivation et de l'intégration.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(\omega t + \phi) = -\omega \sin(\omega t + \phi) = \omega \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

La dérivation se traduit en représentation de Fresnel par une rotation de $+\pi/2$ et une multiplication du module du vecteur par la quantité ω.

Inversement, l'intégration se traduit par une rotation de $-\pi/2$ et une division du module par la quantité ω.

Le schéma de la figure 3.5 illustre le principe de la dérivation et de l'intégration. Les amplitudes des vecteurs dépendent de la valeur de la pulsation ω.

Remarque : Ces propriétés ne sont valables qu'en régime *sinusoïdal permanent*, seul concerné par la représentation de Fresnel.