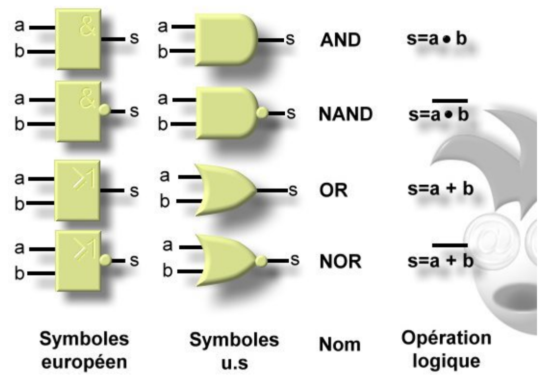
Chapitre 2 : Algèbre de Boole

Institut des Sciences et Techniques Appliquées (ISTA) UFMC1



ASSABAA Mohamed

Janvier 2018
1.0

Table des matières

Objectifs

À l'issu de ce cours, l'apprenant sera capables de :

- Connaître les opérations de base de l'algèbre de Boole en utilisant leurs différentes propriétés.
- Comprendre le fonctionnement des portes logiques.
- Appliquer l'ensemble de théorèmes de l'algèbre de Boole.
- Simplifier les fonctions logiques par les méthodes algébriques et graphique.

Pré-requis :

- Mathématique (Algèbre Linéaire).
- Électricité de base.

Introduction

L'algèbre de Boole est une structure algébrique qui ne contient que deux éléments, que l'on appelle couramment variables logiques. Ces variables ne peuvent avoir que deux états :

- 0 : Faux (False)
- 1 : Vrai (True)

ou : *ouvert ou fermé, arrêt ou marche, inactif ou actif, relâché ou enfoncé*.

Comme n'importe quelle autre algèbre, il existe dans l'Algèbre de BOOLE, des opérations, des variables, et des fonctions. Celles-ci prennent le nom de :

- Opérations logiques

- Variables logiques

- Fonctions logiques

Alors on peut dire que l'algèbre de Boole est une algèbre qui opère sur des variables logiques à l'aide des opérateurs logiques pour réaliser une fonction logique.

Les opérations logiques

I

On définit six opérations logiques:

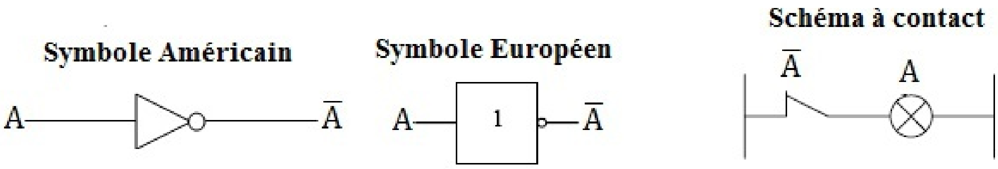
- Trois opérations principales.
- Trois opérations secondaires.

1. Les opérations principales

1.1. NON (NOT):

Appelé couramment inverseur a une seule entrée et une seule sortie, c'est un opérateur qui réalise le complément d'une variable logique A, noté :

$NOT(A) = \overline{A}$



Porte NON (NOT)

Son fonctionnement est défini par la table de vérité suivante :

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

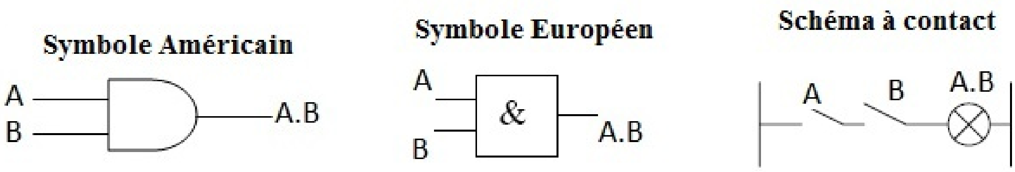
NON (NOT)

1.2. ET (AND):

C'est le produit logique de deux ou plusieurs variables logiques, le résultat de l'opération est 1, lorsque toutes les variables sont à 1. Si A et B représentent deux variables logiques, le résultat de l'opération ET entre ces deux variables est noté :

$A\ AND B = A . B$

Une porte logique AND à deux entrées est symbolisée de la manière suivante :



Porte ET (AND)

L'opération logique AND, notée '•' est définie par la table de vérité suivante :

A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

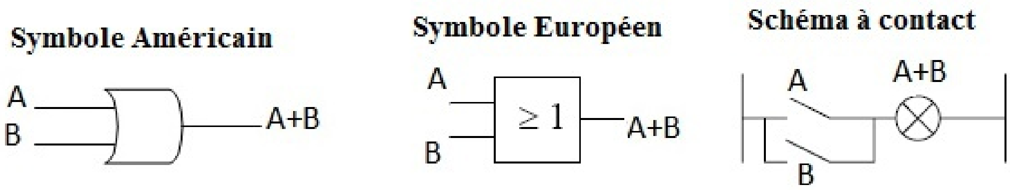
ET (AND)

1.3. OU (OR):

C'est la somme logique de deux ou plusieurs variables logiques, le résultat de l'opération est 1, lorsque au moins une des variables est égale à 1. Si A et B représentent deux variables logiques, le résultat de l'opération OU entre ces deux variables A et B est noté :

$A\,OR\,B = A + B$

Une porte logique OR à deux entrées est symbolisée de la manière suivante :



Porte OU (OR)

La fonction OR, notée +, est définie par la table de vérité suivante :

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

OU (OR)

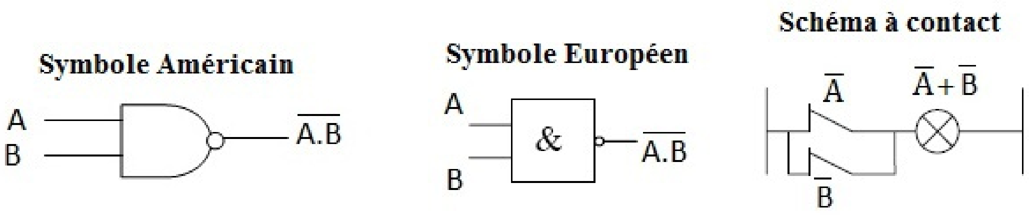
2. Les opérations secondaires

2.1. NON ET (NAND):

C'est le complément de produit logique de deux variables logiques A et B noté :

$A\,NAND\,B = \overline{A\,.\,B}$

Le symbole graphique d'une porte logique NAND est représenté comme suit:



Porte NON ET (NAND)

Une opération logique NAND fonctionne selon la table de vérité suivante :

A	B	$\overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

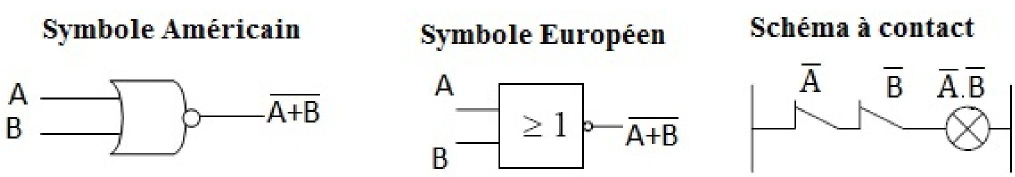
NON ET (NAND)

2.2. NON OU (NOR):

C'est l'équivalent d'une opération OU suivie d'une opération NON de la somme logique de deux variables logiques A et B notée :

$A\,NOR\,B = \overline{A+B}$

L'opération logique NOR a pour symbole :



Porte NON OU (NOR)

L'opération logique NOR a pour table de vérité suivante :

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

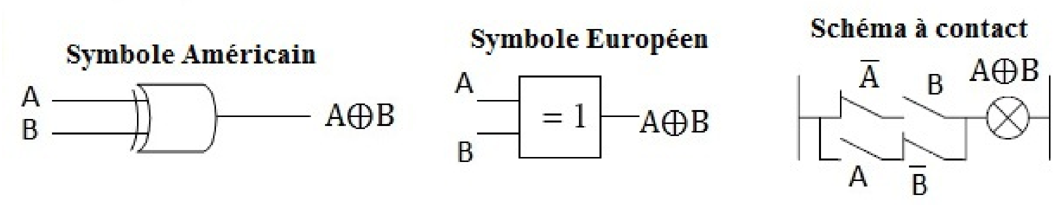
NON OU (NOR)

2.3. OU exclusif (XOR):

Cette opération donne comme résultat 1, si et seulement si une des deux variables est égale à 1, elle est définit par :

$A\ XOR\ B = A \oplus B$

Elle a pour représentation symbolique :



Sa table de vérité est la suivante :

A	B	A ***XOR*** B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

OU Exclusif (XOR)

XOR est égal à 1 si et seulement si A = 1 ou B = 1 mais pas simultanément

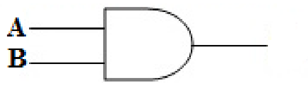
Une opération XOR fournit un comparateur d'inégalité : XOR ne vaut 1 que si A et B sont différents. Le complément du XOR correspond à un détecteur d'égalité.

$A \oplus B = \overline{A}.B + A.\overline{B}$

3. Exercice : Exercice 1

[solution n°1 p.34*]*

La porte logique suivante est une porte :

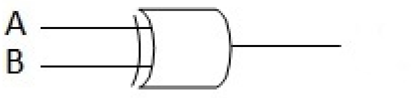


- AND
- OR
- NAND
- NOT

4. Exercice : Exercice 2

[solution n°2 p.34*]*

La porte logique suivante est une porte :

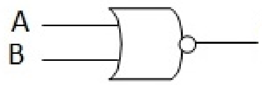


- NAND
- NOR
- XOR

5. Exercice : Exercice 3

[solution n°3 p.34*]*

La porte logique suivante est une porte :



- NOT
- XOR
- AND
- NOR

6. Exercice : Exercice 4

[solution n°4 p.35*]*

A quelle condition la sortie d'une porte logique Ou-Exclusif (XOR) est elle à 1 :

- Si les deux entrées sont dans le même état ?
- Si au moins une entrée est à 0 ?
- Si au moins une entrée est à 1 ?
- Si les deux entrées sont dans un état différent ?

Théorème de De-Morgan

II

Deux des plus importants théorèmes de l'algèbre booléenne nous ont été légués par le mathématicien De Morgan. Les théorèmes de De Morgan se révèlent d'une grande utilité pour simplifier des expressions comprenant des sommes ou des produits de variables complémentés. Voici ces deux théorèmes:

1. Théorème :

- Le complément d'un produit logique égal à la somme des compléments
- Le complément d'une somme logique égal au produit des compléments

$$\overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

Les théorèmes de DE Morgan permettent de transformer les ET en OU et vice-versa. Le couple (ET,NON) ou le couple (OU,NON) suffisent donc à exprimer n'importe quelle formule algébrique combinatoire.

2. Exercice : Exercice 1

Simplifier en utilisant le théorème de Morgan les fonctions suivantes :

$$F1 = \overline{A\bar{B}(A+B)} + \bar{A}B\overline{(A+\bar{B}+\bar{C})} \quad F2 = \overline{(C+D)A\bar{C}D(\bar{A}C+\bar{D})}$$

Solution :

En utilisant le théorème de Morgan on trouve :

$$\begin{aligned}
F1 &= \overline{A\bar{B}(A+B)} + \bar{A}B\overline{(A+\bar{B}+\bar{C})} \\
F1 &= \overline{A\bar{B}} + \overline{(A+C)} + \bar{A}B(\bar{A}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{C}}) \\
F1 &= \bar{A} + \bar{\bar{B}} + (\bar{A}\bar{C}) + \bar{A}B(\bar{A}BC) \\
F1 &= \bar{A} + B + \bar{A}\bar{C} + \bar{A}BC \\
F1 &= \bar{A}(1+\bar{C}+BC) + B \\
F1 &= \bar{A} + B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F2 &= \overline{(C+D)A\bar{C}D(\bar{A}C+\bar{D})} \\
F2 &= \overline{C+D} + \overline{\overline{A\bar{C}D}} + \overline{\bar{A}C+\bar{D}} \\
F2 &= \bar{C}\bar{D} + A\bar{C}D + \overline{\bar{A}C}\,\bar{\bar{D}} \\
F2 &= \bar{C}\bar{D} + A\bar{C}D + (\bar{\bar{A}}+\bar{C})D \\
F2 &= \bar{C}\bar{D} + A\bar{C}D + (A+\bar{C})D \\
F2 &= \bar{C}\bar{D} + A\bar{C}D + AD + \bar{C}D \\
F2 &= AD(1+\bar{C}) + \bar{C}(D+\bar{D}) \\
F2 &= AD + \bar{C}
\end{aligned}$$

3. Exercice : Exercice 2

[*solution* n°5 p.35]

En logique l'équation suivante $F1=\overline{A(\overline{B+C})}$ est :

- $F1=(A+\overline{B})C$
- $F1=\overline{A}+B+C$
- $F1=(A+B)C$

4. Exercice : Exercice 3

[*solution* n°6 p.35]

En logique l'équation suivante $F=\overline{A}(\overline{B}+A+\overline{B})$ est :

- $F=\overline{AB}$
- $F=A\overline{B}$
- $F=\overline{A}\,\overline{B}$
- $F=\overline{A+B}$
- Aucune de ces propositions

Propriétés des opérateurs logiques

III

Les opérateurs vus ci-dessus respectent les lois suivantes, qu'il est facile de vérifier par *induction parfaite*, c'est à dire en vérifiant tous les cas possibles à partir des tables de vérité.

1. Propriétés des opérateurs AND et OR

1.1. Associativité

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

$$A.(B.C)=(A.B).C$$

1.2. Commutativité

$$A+B=B+A$$

$$A.B=B.A$$

1.3. Distributivité

$$A+(B.C)=(A+B)(A+C)$$

$$A(B+C)=(A.B)+(A.C)$$

1.4. L'élément neutre

$$A+0=A$$

$$A.1=A$$

1.5. Complémentarité

$$A+\overline{A}=1$$

$$A.\overline{A}=0$$

1.6. Involution de la négation

$$\overline{\overline{A}}=A$$

1.7. L'invariance

$$A+1=1$$

$$A.0=0$$

1.8. L'idempotence

$$A+A=A$$

$$A.A=A$$

1.9. Les identités remarquables

$$A+AB=A(1+B)=A$$

$$A(A+B)=A+AB=A$$

$$(A+\overline{B})B=AB$$

$$A\overline{B}+B=A+B$$

$$(A+B)(B+C)(C+\overline{A})=(A+B)(C+\overline{A})$$

2. Propriétés des opérateurs NAND et NOR

2.1. Associativité

$$\overline{\overline{(A.B)}.C} \neq \overline{A.\overline{(B.C)}}$$

$$\overline{\overline{(A+B)}+C} \neq \overline{A+\overline{(B+C)}}$$

2.2. Commutativité

$$\overline{A+B}=\overline{B+A}$$

$$\overline{A.B}=\overline{B.A}$$

2.3. Distributivité

NAND :

$$A+\overline{(B.C)} \neq \overline{(A+B)}\,\overline{(A+C)}$$

$$\overline{A.(B+C)} \neq \overline{(A.B)}.\overline{(A.C)}$$

$$\overline{A.(B.C)} \neq \overline{(A.B)}+\overline{(A.C)}$$

$$A\overline{(B.C)} \neq \overline{(A.B)(A.C)}$$

NOR :

$$A+\overline{(B+C)} \neq \overline{(A+B)+(A+C)}$$

$$A+\overline{(B+C)} \neq \overline{(A+B)}\,\overline{(A+C)}$$

$$\overline{A+(B+C)} \neq \overline{(A+B)}+\overline{(A+C)}$$

$$A\overline{(B+C)} \neq \overline{(A.B)+(A.C)}$$

3. Exercice : Exercice 1

[solution n°7 p.35*]*

La simplification de A.1 est :

- ○ $\overline{A}$
- ○ 0
- ○ A
- ○ 1

4. Exercice : Exercice 2

[solution n°8 p.36*]*

La simplification de A+1 est :

- ○ A
- ○ 0
- ○ 1

5. Exercice : Exercice 3

[solution n°9 p.36*]*

Cocher toutes les équations logique qui sont correctes parmi les suivante :

- ☐ (A+C)(B+C)=A.B+BC
- ☐ $A\overline{B}+B=A+B$
- ☐ (A+B)C=A.C+B.C
- ☐ (A+B)B=B
- ☐ $\overline{A+(B+C)}=\overline{(A+B)}+\overline{(A+C)}$
- ☐ $(A+\overline{B})B=B$
- ☐ Toutes ces relations sont fausses

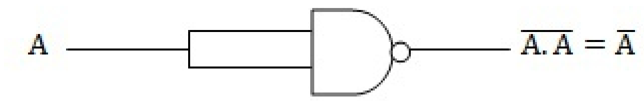
Universalité des opérateurs NAND et NOR

IV

Il s'agit de réaliser les opérations principales à l'aide des portes logiques NAND et NOR

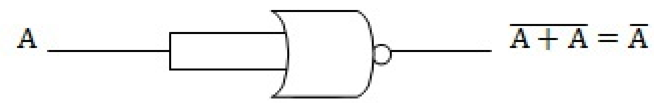
1. Opération NOT

Réalisation par la porte NAND



Opération NOT par NAND

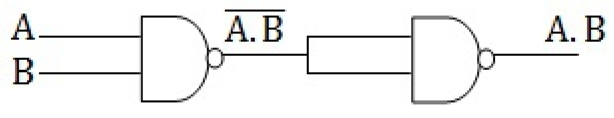
Réalisation par la porte NOR



Opération NOT par NOR

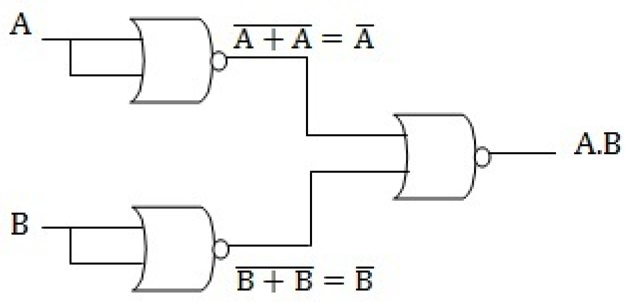
2. Opération AND

Réalisation par la porte NAND



Opération AND par NAND

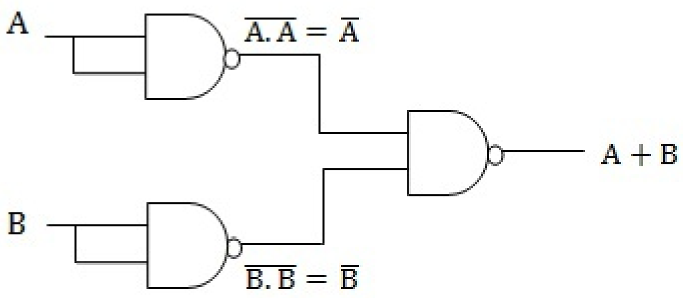
Réalisation par la porte NOR



Opération AND par NOR

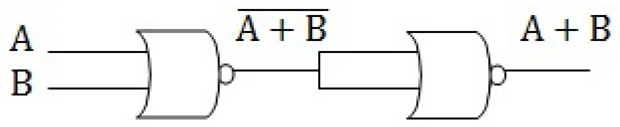
3. Opération OR

Réalisation par la porte NAND



Opération OR par NAND

Réalisation par la porte NOR



Opération OR par NOR

Les fonctions logiques

V

1. Définition

Définition

C'est un ensemble de variables logiques reliées par des opérateurs logiques (+, . , NON, ...). Une fonction logique ne peut prendre que deux valeurs: 0 ou 1. Si le nombre de variables logiques égal à N on dit que la fonction est d'ordre N.

2. Représentations des fonctions logiques

Une fonction logique est une combinaison de variables logiques reliées par les opérateurs ET, OU et NON. Elle peut être représentée par une écriture algébrique ou une table de vérité ou un tableau de KARNAUGH ou un logigramme.

2.1. Expression algébrique

Définition

Une fonction logique peut être représentée sous forme algébrique, Il s'agit d'une représentation sous forme d'expression. Elle peut s'exprimer comme une association de sommes et de produits logiques:

Exemple

$$F = BCD + ACD + \bar{B}C\,\bar{D} + AB + \bar{A}C$$

2.2. Table de vérité

La représentation la plus courante d'une fonction logique, est la table de vérité. Une fonction F de N variables est entièrement décrite par l'énoncé de l'ensemble des combinaisons des variables d'entrées et de la valeur de la fonction correspondant à chaque combinaison. Cet énoncé prend généralement la forme d'un tableau à N+1 colonnes (N entrées + 1 sortie) et 2^N lignes (sur N bits, on peut coder 2^N valeurs différentes), La $(N+1)^{ème}$ colonne contient les valeurs que prend la fonction pour chaque combinaison des variables.

Exemple

Soit :

$$F = \bar{A}\,BC + A\,\bar{B}\,C + AB\,\bar{C} + ABC$$

décrire sa table de vérité

Solution :

3 variables → 2^3 combinaisons

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Représentation de la fonction F

2.3. Tableau de Karnaugh

Le tableau de Karnaugh est un outil graphique qui permet de simplifier de manière méthodique une équation logique, c'est une représentation en deux dimensions d'une fonction logique, il comprend 2^N cases. Il est constitué de cases adjacentes et symétriques. Le passage d'une case à une autre entraîne le changement d'un seul bit, Il permet de simplifier les fonctions logiques de manière graphique. Pour une fonction à deux variables, on a un tableau de Karnaugh à 4 cases, pour une fonction à 3 variables, on a un tableau à 8 cases, etc...

- Tableau de Karnaugh à 2 variables A et B

B \ A	0	1
1	2	3
0	0	1

- Tableau de Karnaugh à 3 variables A, B et C

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

- Tableau de Karnaugh à 4 variables A, B, C et D

A B / C D	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

- Tableau de Karnaugh à 5 variables A, B, C, D et E

ABC / DE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

A=0 A=1

Exemple

Représenter par un tableau de Karnaugh la fonction :

$$F(A,B,C)=A(B\bar{C}+\bar{B})+AC(B+C)$$

Solution :

On écrit f sous la forme d'une somme de produits de toutes les variables logiques :

$$F(A,B,C)=A(B\bar{C}+\bar{B})+AC(B+C)=AB\bar{C}+A\bar{B}+ABC+AC$$

$$F(A,B,C)=AB\bar{C}+A\bar{B}(C+\bar{C})+ABC+AC(B+\bar{B})$$

$$F(A,B,C)=AB\bar{C}+A\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+ABC$$

Ensuite on met des 1 dans les cases du tableau qui correspondent aux combinaisons :

$$AB\bar{C}(110),\ A\bar{B}C(101),\ A\bar{B}\bar{C}(100),\ ABC(111)$$

Pour les autres combinaisons la fonction vaut 0

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1

2.4. Par une expression numérique

Pour simplifier la représentation de la fonction, on peut l'exprimer sous forme numérique. Cette forme indique la valeur décimale correspondant aux combinaisons binaires des variables, pour lesquelles la fonction vaut 1.

Exemple

$F = \sum(0,4,5,6,7)$

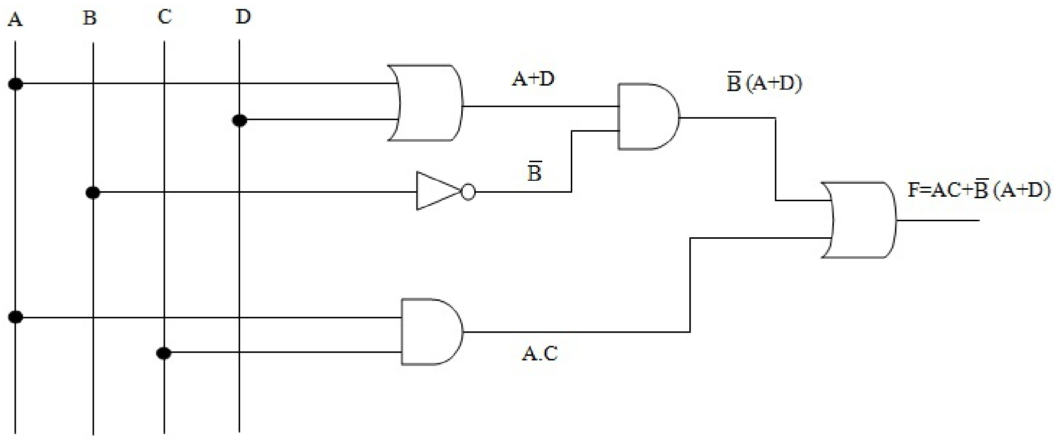
2.5. Représentation par un Logigramme

C'est une méthode graphique basée sur la représentation des équations de sorties par des portes logiques.

Exemple

Représenter à l'aide des portes logiques l'équation suivante :

$F = AC + \overline{B}(A + D)$



Les formes canoniques

VI

C'est une équation qui permet de localiser directement chaque case du tableau de Karnaugh comportant un «1» logique ou un «0» logique. On distingue principalement deux formes canoniques qui sont :

1. 1ère forme canonique

Sous la 1ère forme canonique, la fonction est exprimée sous la forme d'une somme de toutes les combinaisons de toutes les variables logiques pour lesquelles la fonction vaut « 1 », chaque terme est appelé min-terme ou produit fondamental

Exemple

$F(A,B,C)=AB\bar{C}+A\bar{B}C+A\bar{B}\bar{C}+ABC$

2. 2ème forme canonique

Sous la 2ème forme canonique, la fonction est exprimée sous la forme d'un produit de sommes, comprenant toutes les variables, chaque terme est appelé max-terme ou somme fondamentale

Exemple

$F(A,B,C)=(A+B+\bar{C})(A+\bar{B}+C)(A+\bar{B}+\bar{C})(A+B+C)$

3. Méthodes de calcul

Il existe plusieurs méthodes pour le calcul de la 1ère et la 2ème forme canonique d'une fonction.

Méthode : La méthode graphique

La fonction logique est représentée par le tableau de Karnaugh ; la 1ère forme canonique correspond à la somme de toutes les combinaisons pour lesquelles la fonction vaut 1.

Pour la 2ème forme canonique, on exprime $\bar{f}$ à partir du tableau de Karnaugh, ensuite on complémente l'expression.

Exemple

Déterminer la 1ère forme canonique de la fonction :

$F = AC + B\bar{C}$

La représentation par le tableau de Karnaugh de la fonction f est la suivante :

C \ AB	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1

- la 1ère forme canonique :

$$F = \bar{A}\,B\bar{C} + AB\,\bar{C} + ABC + A\,\bar{B}\,C$$

- la 2ème forme canonique :

$$\bar{F} = \bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}\,C + \bar{A}\,BC + A\,\bar{B}\,\bar{C}$$
$$F = \bar{\bar{F}} = \overline{\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}C + \bar{A}\,BC + A\,\bar{B}\bar{C}}$$
$$F = (A + B + C)(A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + B + C)$$

La 1ère forme canonique :

Chaque terme de la somme est multiplié par la somme de(s) variable(s) manquante(s) et de leur complément.

La 2ème forme canonique :

Comme pour la méthode graphique, on détermine d'abord l'expression de sous la $1^{ère}$ forme canonique, ensuite, on calcule son complément.

Exemple

Mettre sous la 1ère et 2ème forme canonique la fonction suivante :

$F = AC + B\bar{C}$

- la 1ère forme canonique :

$$F = AC\,(B + \bar{B}) + B\,\bar{C}\,(A + \bar{A}) = ABC + A\,\bar{B}\,C + AB\bar{C} + \bar{A}\,B\,\bar{C}$$

La 2ème forme canonique :

$$\bar{F} = \overline{AC + B\,\bar{C}} = (\overline{AC})(\overline{B\,\bar{C}}) = (\bar{A} + \bar{C})(\bar{B} + C) = \bar{A}\,\bar{B} + \bar{A}\,C + \bar{B}\,\bar{C}$$

$$\bar{F} = \bar{A}\,\bar{B} + \bar{A}\,C + \bar{B}\,\bar{C} = \bar{A}\,\bar{B}(C + \bar{C}) + \bar{A}\,C\,(B + \bar{B}) + \bar{B}\,\bar{C}\,(A + \bar{A})$$

$$\bar{F} = \bar{A}\,\bar{B}C + \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,BC + A\,\bar{B}\,\bar{C}$$

$$F = \bar{\bar{F}} = \overline{\bar{A}\,\bar{B}\,C + \bar{A}\,\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\,BC + A\,\bar{B}\bar{C}}$$

$$F=\left(A+B+\bar{C}\right)\left(A+B+C\right)\left(A+\bar{B}+\bar{C}\right)\left(\bar{A}+B+C\right)$$

Simplification des fonctions logiques

VII

L'objectif de la simplification des fonctions logiques est de minimiser le nombre de termes afin d'obtenir la forme la plus simple de la fonction, ou plus exactement sa forme minimale.

Deux méthodes de simplification sont utilisées :

- La simplification algébrique.
- La simplification graphique par tableau de KARNAUGH.

1. Cas des fonctions complètement définies

Il s'agit des fonctions dont leurs valeurs sont définies pour toutes les combinaisons des variables logiques

Définition : Simplification algébrique

Par application des lois de l'algèbre de Boole, le résultat de la simplification dépend de la manière dont ont été menés les calculs. Il est à noter qu'un même terme peut être utilisé plusieurs fois pour la simplification.

Exemple

soit la fonction :

$$F(A,B,C)=\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}C+AB\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+A\bar{B}\bar{C}$$

Simplifier algébriquement cette fonction.

On peut simplifier F, en procédant comme suit :

$$F(A,B,C)=\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}C+AB\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+A\bar{B}\bar{C}$$

$$F(A,B,C)=(\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}C)+(\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC)+(A\bar{B}\bar{C}+AB\bar{C})$$

$$F(A,B,C)=\bar{B}C+\bar{A}B+A\bar{C}$$

Les règles et propriétés de l'algèbre de Boole permettent de simplifier les fonctions mais reste une méthode relativement lourde. Elle ne permet jamais de savoir si l'on aboutit ou pas à une expression minimale de la fonction.

Nous pourrons alors utiliser la méthode du tableau de KARNAUGH

Définition : Simplification par tableau de Karnaugh

Le tableau de KARNAUGH permet de visualiser une fonction et d'en tirer intuitivement une fonction simplifiée. La simplification d'une fonction logique par le tableau de Karnaugh, est une méthode graphique très efficace. Elle se base sur le principe que les produits logiques correspondant à des états adjacents se simplifient.

La simplification va consister à représenter dans un premier temps, la fonction logique par un tableau de Karnaugh, ensuite procéder au regroupement de tous les « 1 » se trouvant dans des cases symétriques ou adjacentes.

Les règles de simplification par le tableau de Karnaugh, sont les suivantes :

- Les « 1 » figurant dans des cases voisines ou symétriques peuvent être groupés.

- Le groupement de deux cases adjacentes ou symétriques, réduit d'une variable les min-termes initiaux.

- Le groupement de 2^P cases adjacentes ou symétriques, réduit de p variable les min-termes initiaux.

- Le groupement doit porter sur un nombre puissance de 2 cases. On doit toujours chercher à grouper le plus grand nombres de cases possibles.

- Tous les « 1 » doivent être contenus dans au moins un groupement.

- Une même case peut être utilisée pour des groupements différents.

Chaque groupement obtenu représente un *impliquant premier*.

Un impliquant premier qui contient au moins 1 ne pouvant être inclus dans aucun autre impliquant premier est dit *impliquant premier essentiel*.

Pour obtenir la forme minimale, on choisit en premier lieu les impliquants premiers essentiels. Ensuite, on choisit parmi les impliquants premiers restants ceux qui sont nécessaires pour couvrir complètement la fonction originale.

Si la forme minimale ne contient que des impliquants premiers essentiels, alors elle est unique.

Exemple : Exemple1

Simplifier par le tableau de Karnaugh la fonction complètement définie :

$$F(A,B,C)=\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC$$

C \ AB	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	1	0

$$F(A,B,C)=\bar{A}B+\bar{A}C+BC$$

Exemple : Exemple2

Simplifier par le tableau de Karnaugh la fonction complètement définie :

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1

$$F(A,B,C)=\bar{A}\bar{C}+\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B+BC+A\bar{B}+AC$$

2. Exercice : Exercice 1

Simplifier en utilisant la méthode algébrique les relation suivante :

1. $ABC+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}=BC+AC+AB$
2. $ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}CD=AB+ACD$

Solution :

1.

$$ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}CD=AB+ACD$$
$$ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}CD=AB(C+\bar{C})+A\bar{B}CD$$
$$ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}CD=AB+AB\bar{C}D$$
$$ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}CD=A(B+\bar{B}(CD))$$
$$ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}CD=A(B+CD)$$
$$ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}CD=AB+ACD$$

2.

$$ABC+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}=BC+AC+AB$$
$$ABC+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}=ABC+A\bar{B}C+ABCAB\bar{C}+ABC+AB\bar{C}$$
$$ABC+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}=BC(A+\bar{A})+AC(B+\bar{B})+AB(C+\bar{C})$$
$$ABC+\bar{A}BC+A\bar{B}C+AB\bar{C}=BC+AC+AB$$

3. Exercice : Exercice 2

Simplifier en utilisant le tableau de Karnaugh les fonctions suivantes :

1. $F(A,B,C)=\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC+A\bar{B}C+A\bar{B}C$
2. $F(A,B,C,D)=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}BCD+AB\bar{C}D+ABCD+A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}D+A\bar{B}C\bar{D}$

Solution :

En simplifiant l'équation 1 par le tableau de Karnaugh $F(A,B,C)=\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC+A\bar{B}C+A\bar{B}C$:

C \ AB	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	1	1

du tableau de Karnaugh après simplification, on trouve :

$$F(A,B,C)=C+\bar{A}B$$

de l'équation 2 donnée par : $F(A,B,C,D)=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}BCD+AB\bar{C}D+ABCD+A\bar{B}\bar{C}\bar{D}+A\bar{B}\bar{C}D+A\bar{B}C\bar{D}$, on peut la simplifiée en utilisant le tableau de Karnaugh comme suit :

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	1	1	1
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

du tableau de Karnaugh après simplification, on trouve :

$$F(A,B,C,D)=\bar{C}D+BD+\bar{B}\bar{D}=D(\bar{C}+B)+\bar{B}\bar{D}$$

4. Cas des fonctions incomplètement définies

Une fonction est incomplètement définie quand sa valeur est indifférente ou non spécifiée pour certaines combinaisons des variables d'entrées. Ce cas se rencontre lorsque certaines combinaisons sont impossibles physiquement. On notera Ø la valeur de la fonction dans ce cas. Ces cas non définis sont très intéressants pour la simplification des fonctions. pour la simplification de fonctions incomplètement définie, les états indifférents sont inclus de manière à rendre maximale la grandeur du groupement. Les états Ø peuvent ne pas être inclus dans aucun groupement.

Exemple

simplifier la fonction incomplètement représentée par le tableau de Karnaugh ci-dessous:

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	Φ	0
01	1	1	Φ	1
11	0	0	Φ	Φ
10	1	1	Φ	Φ

$F(A,B,C,D)=\bar{C}\,D+C\,\bar{D}$

5. Exercice : Exercice :

Trouver l'équation la plus simple possible du tableau suivant :

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	Ø	Ø	1
01	0	1	1	0
11	1	0	0	1
10	Ø	0	0	Ø

Après simplification, on trouve :

$F=\bar{C}\,\bar{D}+\bar{B}\,C+B\,\bar{C}=\bar{C}\,\bar{D}+B\oplus C$

Exercice : VIII

Exercice 1 :

En utilisant la méthode algébrique simplifier les fonctions suivantes :

$$S1 = a(a+b)$$
$$S2 = (a+b)(\bar{a}+b)$$
$$S3 = (a\bar{b}+c)(a+\bar{b})c$$
$$S4 = (a+b)c + \bar{a}(b+c) + \bar{b}$$
$$S5 = (a+b+c)(\bar{a}+b+c) + ab + bc$$
$$S6 = a + \bar{a}b + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$$
$$S7 = a + abc + \bar{a}bc\bar{a}b + ad + a\bar{d}$$
$$S8 = ab\bar{c} + b(a+\bar{c})\overline{\bar{a}+b+\bar{a}c}$$

Exercice 2 :

Utilisez les tables de Karnaugh pour déterminer l'équation la plus simple et tracer le logigramme correspondant :

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	1

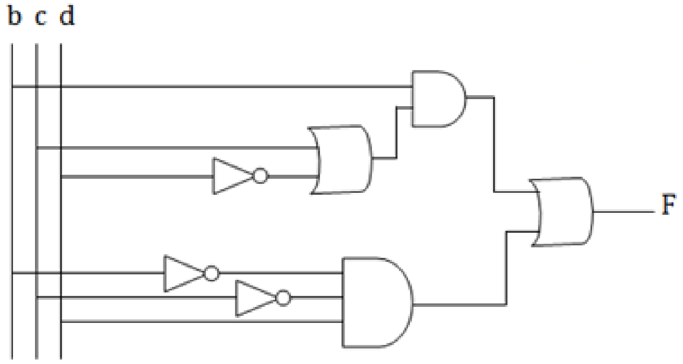
E=

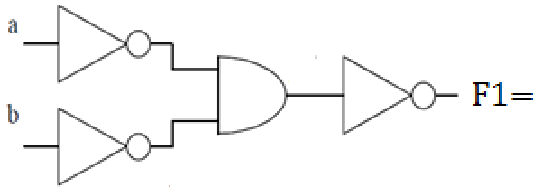
cd \ ab	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

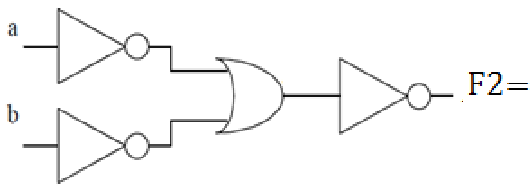
F=

Exercice 3 :

Déterminer l'équation de la sortie des logigrammes suivants :







Exercice 4 :

Considérons la fonction booléenne :

$$Y=(\overline{a+b})+(\overline{a.\overline{b}})c$$

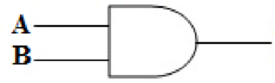
1. Représenter y par un tableau de Karnaugh.
2. Simplifier l'expression par la méthode de Karnaugh.
3. Donner l'équation de $\overline{Y}$ en prenant le regroupement des cases à 0 dans le tableau.
4. Complémenter $\overline{Y}$ (pour retrouver Y) en appliquant les théorèmes de De Morgan (on obtient une forme normale en Π).
5. À partir des formes canoniques en Σ et Π , et en utilisant les propriétés de transformation, donner les logigrammes en utilisant exclusivement des opérateurs NAND pour l'un et NOR pour l'autre.

Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 10

La porte logique suivante est une porte :



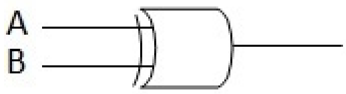
- ◉ AND
- ○ OR
- ○ NAND
- ○ NOT

La porte logique suivante est une porte : AND

> **Solution** n°2

Exercice p. 11

La porte logique suivante est une porte :



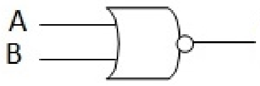
- ○ NAND
- ○ NOR
- ◉ XOR

La porte logique suivante est une porte : XOR

> **Solution** n°3

Exercice p. 11

La porte logique suivante est une porte :



- ○ NOT

- ○ XOR
- ○ AND
- ◉ NOR

La porte logique suivante est une porte : NOR

> **Solution** n°4

Exercice p. 11

A quelle condition la sortie d'une porte logique Ou-Exclusif (XOR) est elle à 1 :

- ○ Si les deux entrées sont dans le même état ?
- ○ Si au moins une entrée est à 0 ?
- ○ Si au moins une entrée est à 1 ?
- ◉ Si les deux entrées sont dans un état différent ?

La sortie d'une porte logique Ou-Exclusif (XOR) est elle à 1 : si les deux entrées sont dans un état différent

> **Solution** n°5

Exercice p. 13

En logique l'équation suivante $F1=\overline{A(\overline{B+C})}$ est :

- ○ $F1=(A+\overline{B})C$
- ◉ $F1=\overline{A}+B+C$
- ○ $F1=(A+B)C$

En logique l'équation $F1=\overline{A(\overline{B+C})}$ est : $F1=\overline{A}+B+C$

> **Solution** n°6

Exercice p. 13

En logique l'équation suivante $F=\overline{A}(\overline{B}+A+\overline{B})$ est :

- ○ $F=\overline{A\,B}$
- ○ $F=A\,\overline{B}$
- ○ $F=\overline{A}\,\overline{B}$
- ◉ $F=\overline{A+B}$
- ○ Aucune de ces propositions

En logique l'équation $F=\overline{A}(\overline{B}+A+\overline{B})$ est : $F=\overline{A+B}$

> **Solution** n°7

Exercice p. 16

La simplification de A.1 est :

- ○ $\overline{A}$
- ○ 0
- ◉ A
- ○ 1

La simplification de A.1 est : A

> **Solution** n°8

Exercice p. 17

La simplification de A+1 est :

- ○ A
- ○ 0
- ◉ 1

La simplification de A+1 est : 1

> **Solution** n°9

Exercice p. 17

Cocher toutes les équations logique qui sont correctes parmi les suivante :

- [ ] (A+C)(B+C)=A.B+BC
- [x] $A\overline{B}+B=A+B$
- [x] (A+B)C=A.C+B.C
- [x] (A+B)B=B
- [ ] $\overline{A+(B+C)}=\overline{(A+B)}+\overline{(A+C)}$
- [ ] $(A+\overline{B})B=B$
- [ ] Toutes ces relations sont fausses

Bibliographie

P. Mayé, "Électronique numérique en 26 fiches", Dunod, Paris 2010

S. Tisserant – ESIL – Architecture et Technologie des Ordinateurs - 2003

N. Alexandre, D. Damien, "ELECTRONIQUE NUMÉRIQUE - Systèmes électroniques numériques complexes - Modélisation et mise en œuvre. Cours et exercices corrigés", Technosup

N. Mansouri, "Les Systèmes Logiques", Tome 1, EUMC

R. Strandh et I. Durand. Architecture de l'ordinateur. Dunod, 2005.

M. Siadat et C. Diou "Cours d'électronique numérique", novembre 2004

Webographie

L. Lambin, "Les fonctions booléennes", http://www.lelectronique.com