1.1 Forces

1.1.1 Rappel

Pour décrire les effets d'une *force*, nous devons préciser toutes ses propriétés :

• son *point d'application* ;

• sa *droite d'action*, c'est-à-dire sa direction ;

• son *sens* ;

• son *intensité*.

On peut réunir toutes ces propriétés en une seule grandeur mathématique, le *vecteur*. Une force est donc représentée par un vecteur force (figure 1.1).

L'intensité du vecteur force $\vec{F}$ sera notée *F*. L'unité d'intensité de force dans le Système international est le *newton* (N)

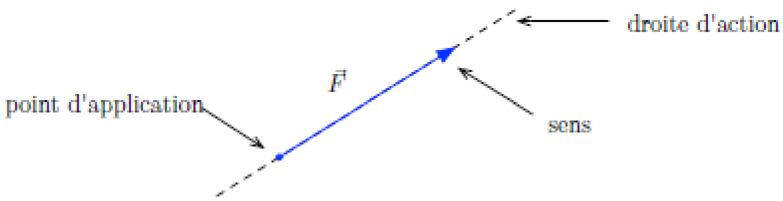


Figure 1.1 : Une force est représentée par un vecteur

1.1.2 Projection d'un vecteur

On choisit un système d'axes perpendiculaires *Ox* et *Oy*. La *projection* du vecteur $\vec{F}$ sur l'axe *Ox* est obtenue en traçant deux perpendiculaires à cet axe qui passent par les extrémités du vecteur ; la projection F_x est le segment de droite sur l'axe *Ox* délimité par les deux perpendiculaires (figure 1.2). On procède de la même façon pour déterminer la projection F_y du vecteur sur l'axe *Oy*.

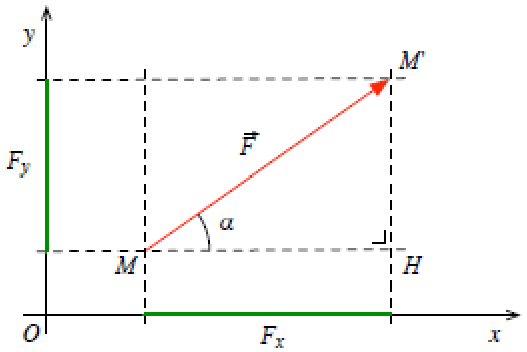


Figure 1.2 : Projections d'un vecteur sur deux axes perpendiculaires

On considère le triangle rectangle MHM_0. Dans ce triangle, l'intensité F est l'hypoténuse, F_x est le côté adjacent et F_y le côté opposé à l'angle α . Il en suit :

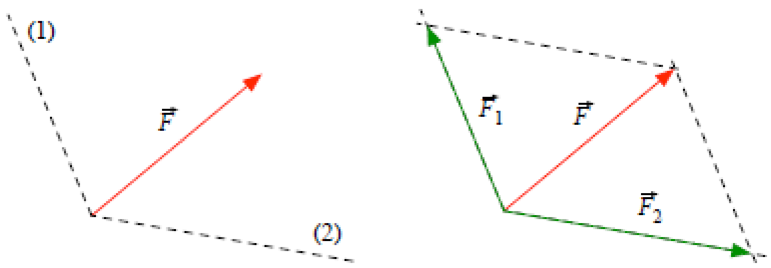
$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F\ \cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F\ \sin\alpha.$$

1.1.3 Décomposition d'un vecteur

La décomposition d'un vecteur $\vec{F}$ consiste à écrire le vecteur comme une somme de deux autres vecteurs $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ appelés composantes du vecteur (figure 1.3):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



(a) Directions de la décomposition (b) Composantes du vecteur

Figure 1.3 : Décomposition d'un vecteur suivant deux directions quelconques

Sur ces directions on construit le parallélogramme dont $\vec{F}$ est la diagonale. Les composantes cherchées $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont alors les côtés du parallélogramme

Pour pouvoir utiliser la condition d'équilibre, il faut décomposer une des forces suivant les directions des deux autres. Par exemple, $\overrightarrow{F_1}$ est décomposé suivant les directions de $\overrightarrow{F_2}$ et $\overrightarrow{F_3}$

$$\vec{F_1} = \vec{F'}_2 + \vec{F'}_3.$$

Chacune de ces composantes doit équilibrer la force dans la direction correspondante. Nous obtenons ainsi le système de deux équations vectorielles :

$$\begin{cases} \vec{F'}_2 + \vec{F_2} = \vec{0} \\ \vec{F'}_3 + \vec{F_3} = \vec{0} \end{cases}$$

1.1.4 Classification des forces

1°) Des forces de contact

Les forces de contact sont celles qui s'exercent sur un corps B dès qu'il est en contact avec un corps A .

- **Ex : Forces de contact localisées :**

Lancer un javelot : le contact des doigts du lanceur sur le javelot est localisé et quasiment ponctuel.

- **Forces de contact non localisées :**

Les forces de contact sont réparties quand la taille de la surface de contact n'est pas ponctuelle.

2°) Forces à distance

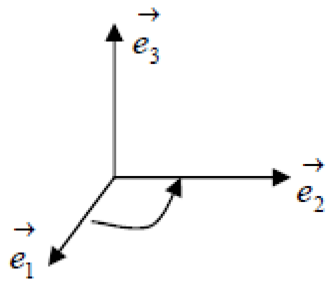
Les forces à distance agissent sans qu'un lien de matière soit nécessaire entre l'objet qui cause la force et celui qui la subit : elles agissent donc à travers le vide.

- Ex : Les forces d'origine électrique (ou électrostatique)
- Les forces d'origine magnétique
- Les forces liées à l'attraction de la terre.

1.1.5 Composantes d'un vecteur

Considérons une base de l'espace 3R notée

$R_0 = ($



Cette base est orthonormée

$$\text{si :}\quad \vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \ i = j \\ 0 & \text{si } \ i \neq j \end{cases}$$

Dans cette base un vecteur $\vec{V}$ de composantes (x, y,z) ∈ R^3 s'écrirait

$$\vec{V} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3$$

Les quantités réelles x, y, z sont appelées composantes du vecteur $\vec{V}$ dans la base R^3

La notation adoptée est la suivante : $\vec{V} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$

1.1.6 Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs sont dits orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\text{Si}\quad \vec{V} \perp \vec{W} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V} \bullet \vec{W} = \vec{0}$$

Si trois vecteurs non nuls sont orthogonaux deux à deux, ils sont alors linéairement indépendant et ils constituent une base orthogonale dans R^3.

1.1.6.1 Base orthonormée

Une base est dite orthonormée si les vecteurs qui la constituent sont perpendiculaires deux à deux et si leurs normes sont égales à 1.

Si b ($\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$) est orthonormée nous avons alors :

$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = 0 \quad , \quad \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 = 0 \quad , \quad \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 = 0$$

$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 = \vec{e}_1^{\,2} = 1 \quad , \quad \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 = \vec{e}_2^{\,2} = 1 \quad , \quad \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3 = \vec{e}_3^{\,2} = 1$$

1.1.7 Somme vectorielle

La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ est un vecteur $\vec{W}$ tel que :

$$\forall \quad \vec{V}_1, \vec{V}_2 \in R^3 \quad \text{nous avons} \quad \vec{W} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \in R^3$$

1.1.7.1 Propriétés de la somme vectorielle

- La somme vectorielle est commutative

: $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$

- La somme vectorielle est associative :

$$\left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + \left(\vec{V}_2 + \vec{V}_3\right)$$

- L'élément neutre est défini par :

$\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$

- A tout vecteur correspond un vecteur opposé noté tel que :

$\vec{V}+\left(-\vec{V}\right)=\vec{0}$

1.1.8 Produit scalaire de deux vecteurs

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ une loi de composition externe qui associe aux deux vecteurs, un scalaire (nombre réel) noté : $\vec{V_1}\ .\ \vec{V_2}$ tel que :

$$\forall\ \vec{V_1},\ \vec{V_2}\in R^3 \quad \Rightarrow \vec{V_1}\bullet\vec{V_2}\in R$$

$\vec{V_1}\bullet\vec{V_2}=\left\|\vec{V_1}\right\|\left\|\vec{V_2}\right\|\cos(\vec{V_1},\vec{V_2})$; le résultat d'un produit scalaire est un scalaire.

Le produit scalaire est nul, si :

- Les deux vecteurs sont orthogonaux ;
- L'un des vecteurs est nul.
-

1.1.8.1 Propriétés du produit scalaire

a) linéarité :

$$\left(\vec{V_1}+\vec{V_2}\right)\bullet\vec{W}=\vec{V_1}\bullet\vec{W}+\vec{V_2}\bullet\vec{W}$$

$$\left(\lambda\vec{V}\right)\bullet\vec{W}=\lambda\left(\vec{V}\bullet\vec{W}\right)$$

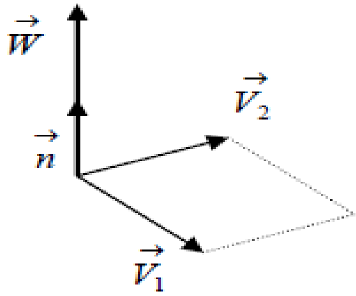
b) ***symétrie par rapport aux vecteurs :***

$\vec{V}\bullet\vec{W}=\vec{W}\bullet\vec{V}$ donc : $\vec{V}\bullet\vec{V}>0$ si $\vec{V}\neq\vec{0}$

1.1.9 Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ de l'espace R^3 est un vecteur $\vec{W}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ défini par :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \left\|\vec{V}_1\right\| \left\|\vec{V}_2\right\| \sin\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2\right) \vec{n}$$



Ou : $\vec{n}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$

1.1.9.1 Propriétés du produit vectoriel

- Le module du produit vectoriel est égal à l'aire du parallélogramme formé par $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$
- Le produit vectoriel est distributif à gauche et à droite pour la somme vectorielle :

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \wedge \vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{W} + \vec{V}_2 \wedge \vec{W}$$

$$\vec{W} \wedge (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{W} \wedge \vec{V}_1 + \vec{W} \wedge \vec{V}_2$$

- Le produit vectoriel est associatif pour la multiplication par un nombre réel :

$$(\lambda \vec{V}) \wedge \vec{W} = \lambda(\vec{V} \wedge \vec{W})$$

$$\vec{V} \wedge \lambda \vec{W}) = \lambda(\vec{V} \wedge \vec{W})$$

- Le produit vectoriel est antisymétrique (anticommutatif)

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$$

$$\text{Si } \vec{V}_1 \,//\, \vec{V}_2 \quad \text{alors} \quad \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$$