



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des frères Mentouri Constantine

Faculté des Sciences de la Technologie – Département ELT



MASTER I COMMANDES ELECTRIQUES & ELT INDUSTRIELLE
SEMESTRE 2

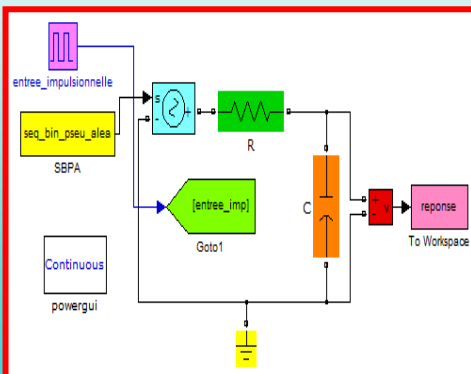
MODULE

MODELISATION ET IDENTIFICATION DES SYSTEMES ELECTRIQUES

Cours conçu par:

Dr. Hind DJEGHLOUD
Email: hinddjeghloud@yahoo.fr

Mis à jour 2020



```
function thetael=teta_elec(in)
Ra=0.515;La=6.9e-3;
thetael_an=[Ra La]';Pel_an=1000*eye(2);
Kfi=0.765;
y=in(1)-Kfi*in(4);%y=u-E
lambdael=0.6;T=1e-3;
H=[in(2) (in(2)-in(3))/T]';
%%Gain de Kalman L
L=(Pel_an*H)/(lambdael+H'*Pel_an*H);
%%Equation de Ricatti
Pel=1/lambdael*Pel_an-L*H'*1/lambdael*Pel_an;
thetael=thetael_an+L*(y-H'*thetael_an);
Pel_an=Pel;
thetael_an=thetael;
```

Modélisation et Identification des Systèmes Électriques

Introduction

Modélisation

Interprétation mathématique d'un phénomène physique

Exemple:

$$\text{Loi de Faraday } e = N \frac{d\phi}{dt}$$

Qui exprime qu'une tension peut être induite dans une bobine de N spires à partir d'un flux magnétique variable

Identification

Détermination **off-line** ou **on-line** des paramètres du système

Exemple:

$$\phi = L * i$$

Si i est connu mais L n'est pas connue on ne peut pas avoir ϕ , de même pour N afin d'avoir e

PLAN DU MODULE & ECHEANCIER

A. MODELISATION

Chapitre 1

→ **Systemes et expériences (02 semaines)**

Généralités, types de modèles, modèles et simulation, comment obtenir un modèle

Chapitre 2

→ **Modèle mathématique (02 semaines)**

Schéma bloc d'un système, variables caractéristiques, représentations interne et externe d'un système

Chapitre 3

→ **Modélisation des systèmes électriques (02 semaines)**

Modélisation d'un composant passif, d'un composant actif, des circuits électriques de base

Chapitre 4

→ **Outils de modélisation (02 semaines)**

Bond graph (BG) ou Graphe informationnel causales (GIC), applications aux circuits électriques

B. IDENTIFICATION

Chapitre 5

Généralités sur l'identification (02 semaines)
Définitions, étapes, génération SBPA, choix de la structure du modèle

Chapitre 6

Méthodes d'identification graphiques (02 semaines)
Méthode de Strejc, méthode de Broïda...

Chapitre 7

Méthodes d'identification numériques (03 semaines)
Méthodes récursives, méthode non récursives.

Chapitre 8

Estimation et Observation (2 Semaines)
Estimation des systèmes électriques (exemple : Estimateur de Gopinath)
Observation déterministe (Observateur de Luenberger)
Observateurs Non-déterministes ou stochastiques (Filtre de Kalman)

Chapitre 1

Systemes & Expériences

Chapitre 1 : Systèmes et expériences

1.1. Généralités

Les systèmes électriques sont un ensemble de dipôles passifs ou actifs comportant des entrées et des sorties liées par des lois mathématiques contenues dans le système, telles que les sorties sont l'effet des entrées et les entrées sont les causes des sorties (systèmes causals) → Fig. 1.

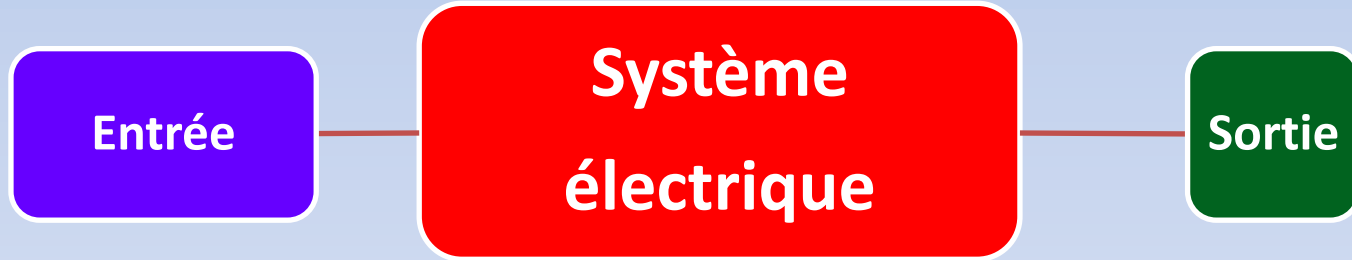
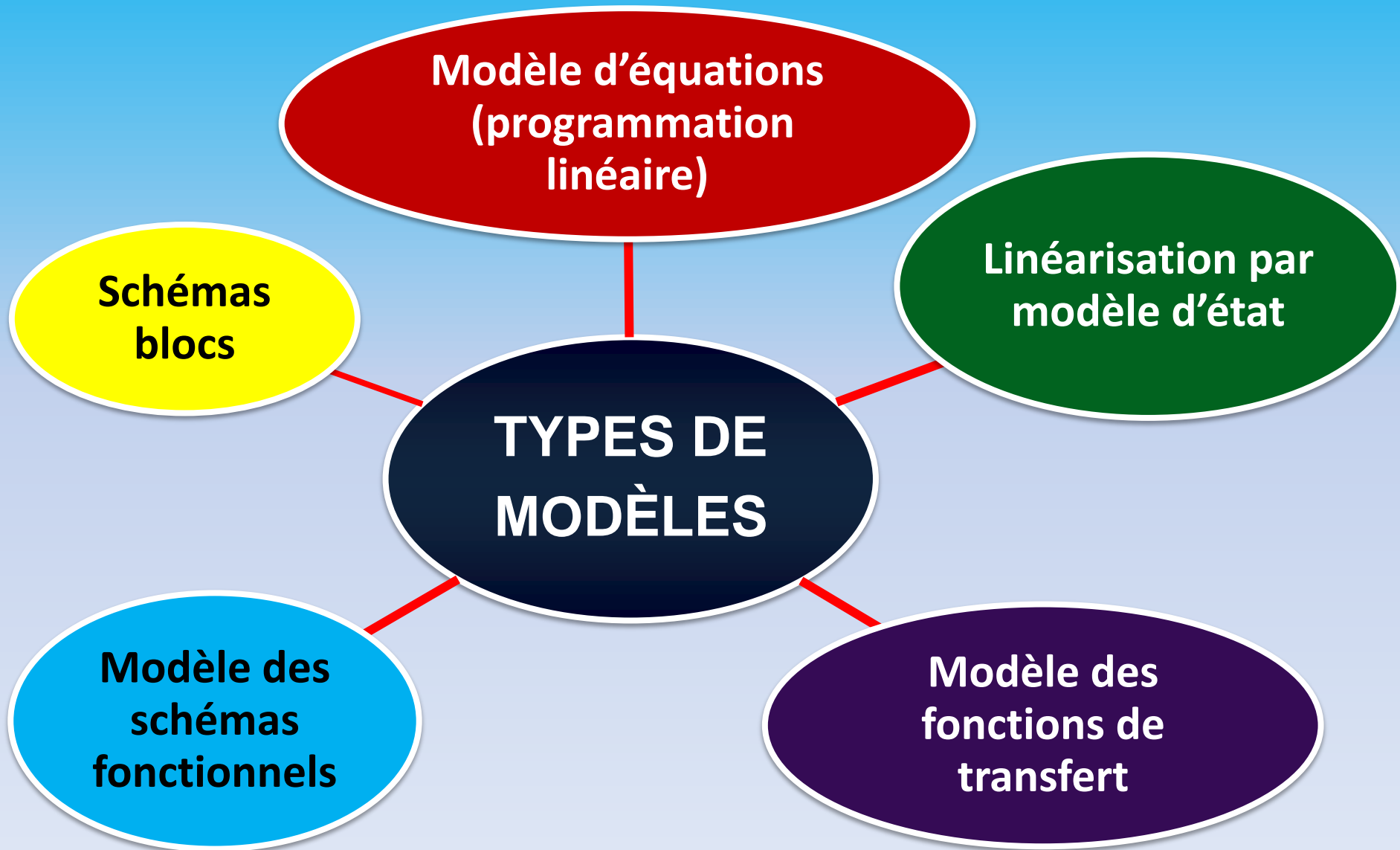


Fig. 1. Définition d'un système électrique

Le plus souvent l'entrée est la tension d'alimentation du système électrique. La sortie peut être le courant du système ou la tension de l'un des dipôles constituant le système.

1.2. Types de Modèles



1.3. Modèles & Simulation

Modèle + Simulation = validation du modèle si on obtient la sortie désirée

Car c'est en simulant le modèle qu'on peut exploiter les résultats et voir les caractéristiques. Le modèle qui donne les caractéristiques les plus proches de la théorie est le plus réaliste (le plus exact).



Celui qui conçoit le modèle doit connaître la théorie du système avant de procéder à la modélisation: connaissance du principe et des caractéristiques usuelles.

1.4. Comment obtenir un modèle?

Pour obtenir un modèle il faut connaître les équations mathématiques qui régissent le système, notamment l'équation de l'entrée et l'équation de la sortie.

Chapitre 2

Modèle Mathématique

Chapitre 2 : Modèle Mathématique

2.1. Schéma bloc d'un système

2.1.1. Modèle d'état

X

Vecteur qui regroupe les éléments dérivables (**variables d'état**) de dimension n

U

Vecteur qui regroupe les entrées ou (**vecteur de commande**) de dimension m

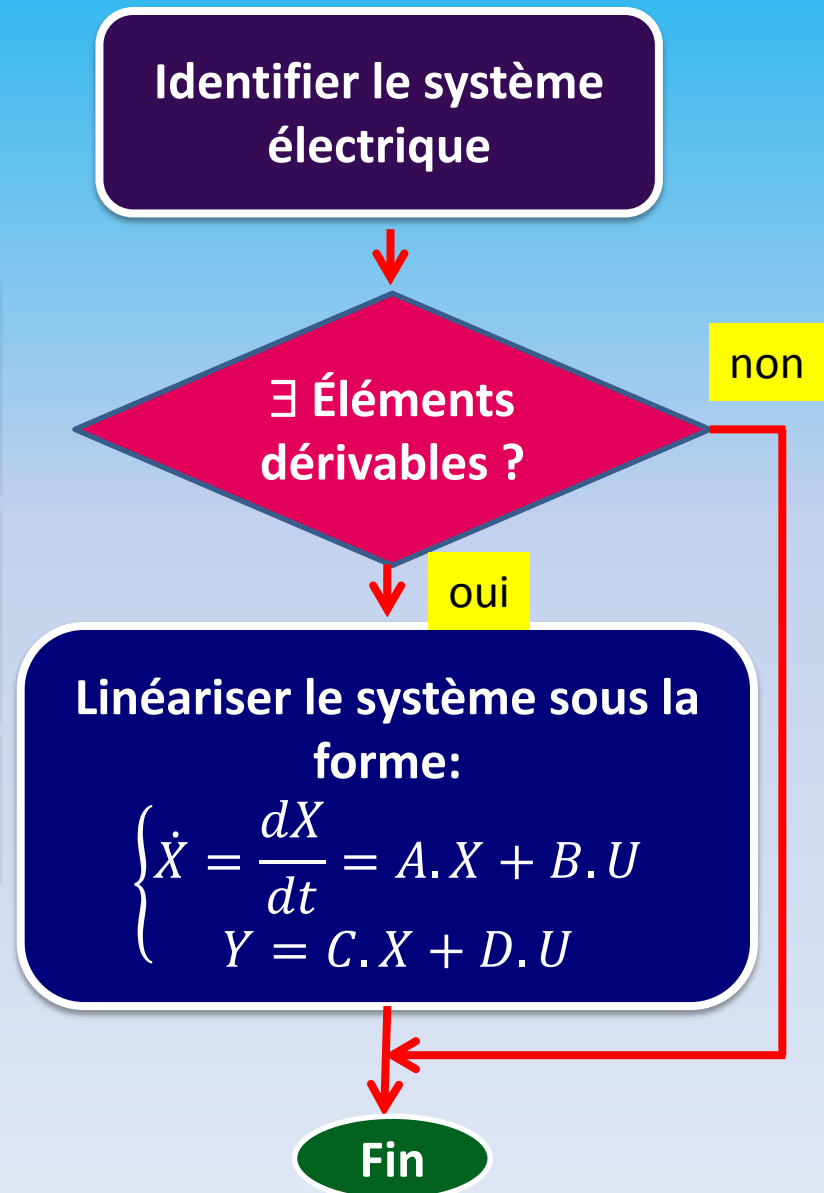
Y

Vecteur qui regroupe les sorties ou (**vecteur de mesure**) de dimension r

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$$





Matrice dynamique de dimension $n \times n$



Matrice de commande de dimension $n \times m$

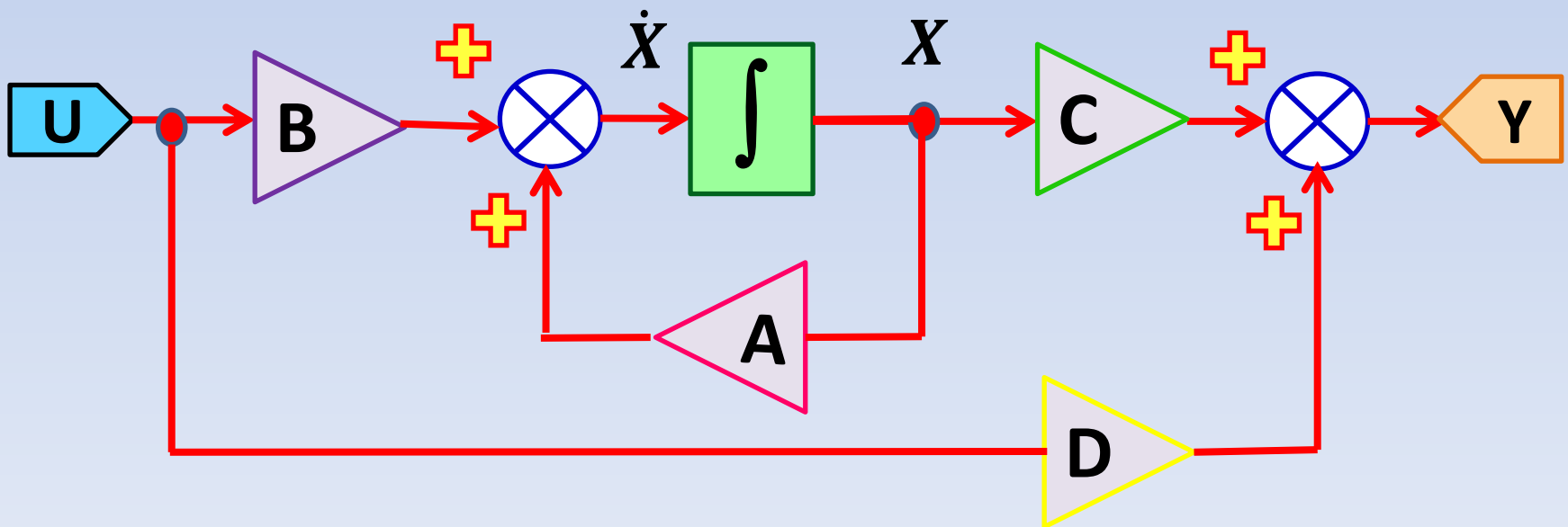


Matrice de d'observation de dimension $r \times n$



Matrice de transmission directe de dimension $r \times m$

schéma bloc du Modèle d'état



2.1.2. Fonction de transfert

$$\text{FT}(\mathbf{p}) = \frac{\text{Signal de sortie}}{\text{Signal d'entrée}} = \mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{Y}/\mathbf{U} \rightarrow \text{Boucle ouverte}$$

$G(p)$ est la fonction de transfert qui lie la sortie à l'entrée et dont l'expression ne doit contenir que les paramètres du système en plus de l'opérateur de Laplace \mathbf{p} qui correspond à d/dt du domaine temporel et à $j.\omega$ du domaine fréquentiel (ou régime périodique).

L'établissement de $G(p)$ permet de rendre la commande et la régulation du système en **boucle fermée** aisée. Par exemple on ne peut déterminer les coefficients d'un correcteur PI sans connaître $G(p)$ au préalable.

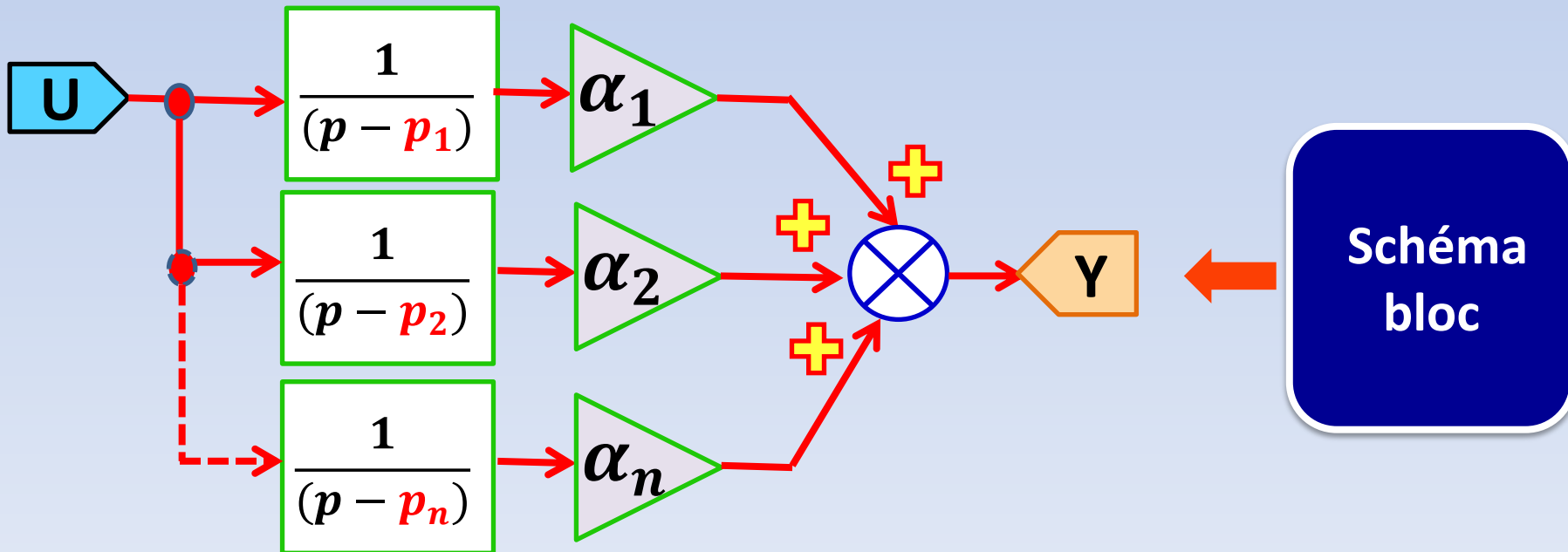
$$\text{FTBF}(\mathbf{p}) = \frac{\text{FT}(\mathbf{p})}{1+\text{FT}(\mathbf{p})} \rightarrow \text{Boucle fermée}$$

2.1.3. Schéma fonctionnel 1

Il découle de $G(p)$ après l'avoir exprimée en décomposition en éléments simples:

$$G(p) = \frac{\alpha_1}{(p-p_1)} + \frac{\alpha_2}{(p-p_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{(p-p_n)}$$

$$\alpha_n = \lim_{p \rightarrow p_n} (p - p_n) \cdot G(p)$$

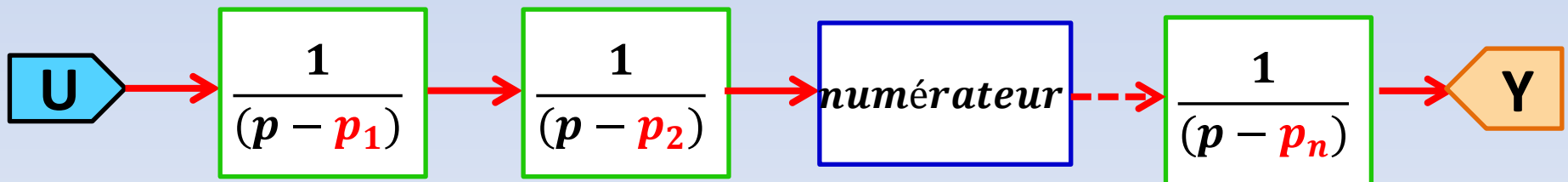


2.1.4. Schéma fonctionnel 2 (cascade)

Il découle lui aussi de $G(p)$ après avoir exprimé son dénominateur sous forme de produits : $\prod_{i=1}^n (p - p_i)$ où p_i représente l'un des pôles de $G(p)$.

$$G(p) = \frac{\text{numérateur de } G(p)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdots (p - p_n)}$$

Schéma bloc du schéma fonctionnel 2



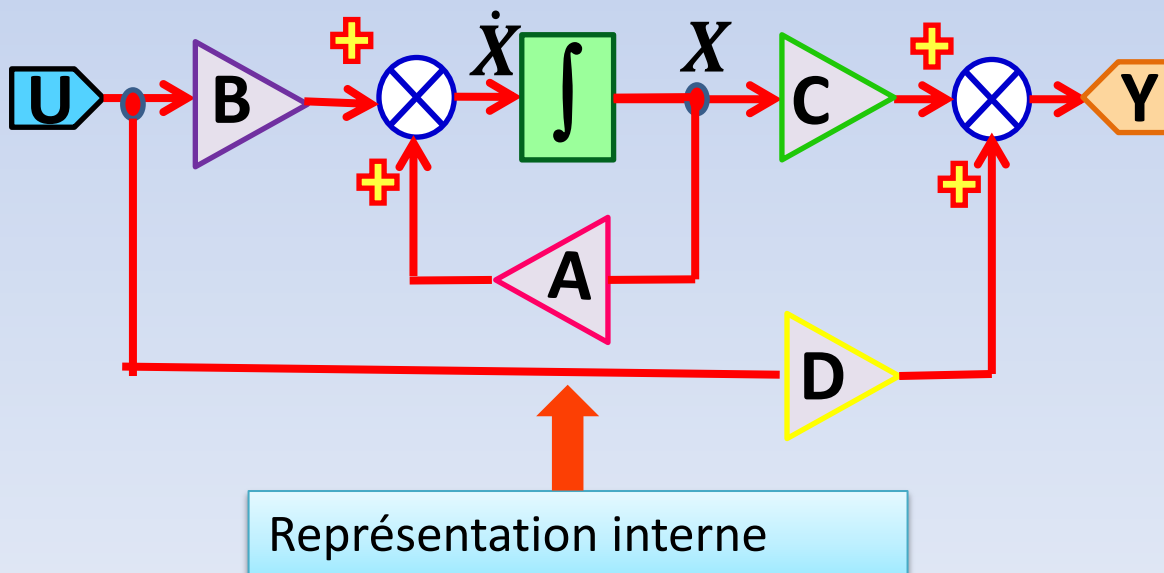
2.2. Variables caractéristiques et représentation interne et externe

2.2.1. Variables caractéristiques

U est la variable connue tandis que X et Y sont des variables inconnues

2.2.2. Représentation interne et externe

Exemple d'un modèle d'état



Représentation externe

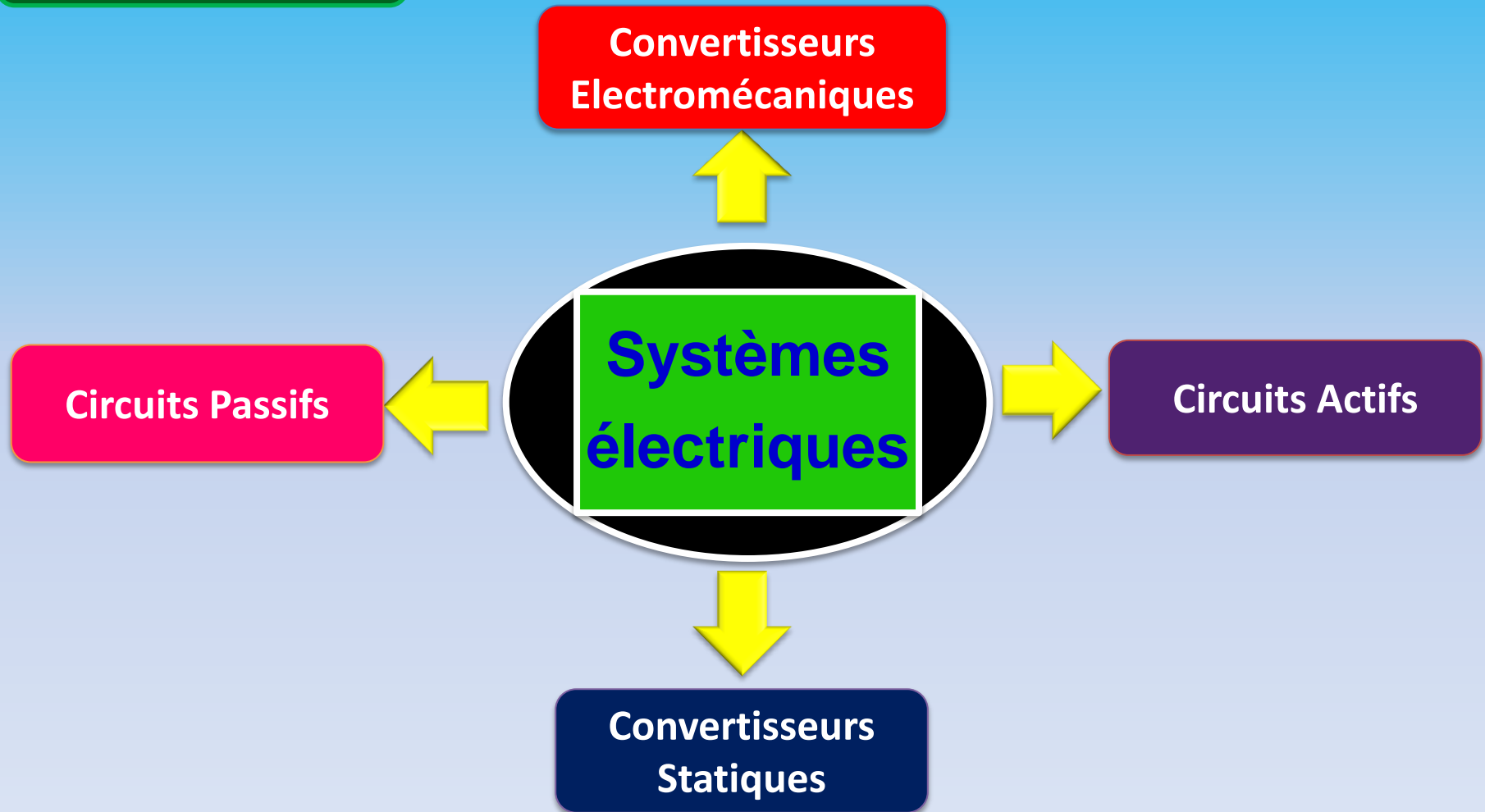
$$U \rightarrow \begin{cases} \dot{X} = A.X + B.U \\ Y = C.X + D.U \end{cases} \rightarrow Y$$

Chapitre 3

Modélisation des Systèmes électriques

Chapitre 3 : Modélisation des systèmes électriques

3.1. Introduction



Circuits Passifs



Circuits à base de composants passifs RLC

Circuits Actifs



Un composant est dit 'actif' lorsqu'il est capable de fournir un courant à une charge qui est connectée à ses bornes même lorsqu'il est soumis à une tension nulle (ex sources de courants, interrupteurs électroniques)

**Convertisseurs
Electromécaniques**



Moteurs et génératrices

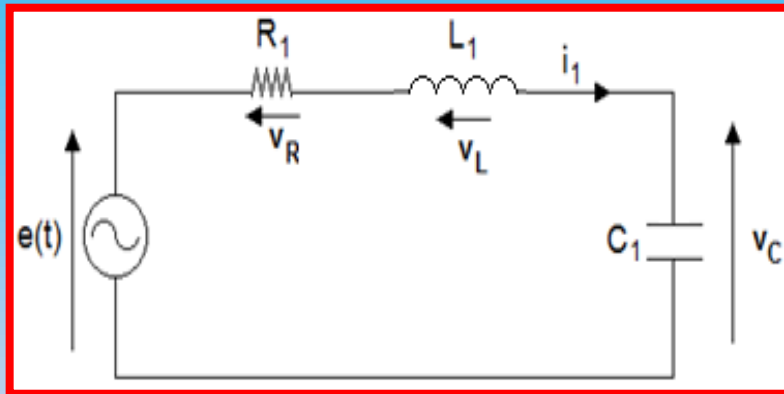
**Convertisseurs
Statiques**



**Hacheurs, redresseurs,
gradateurs et onduleurs**

3.2. Modélisation d'un circuit passif

Circuit RLC série



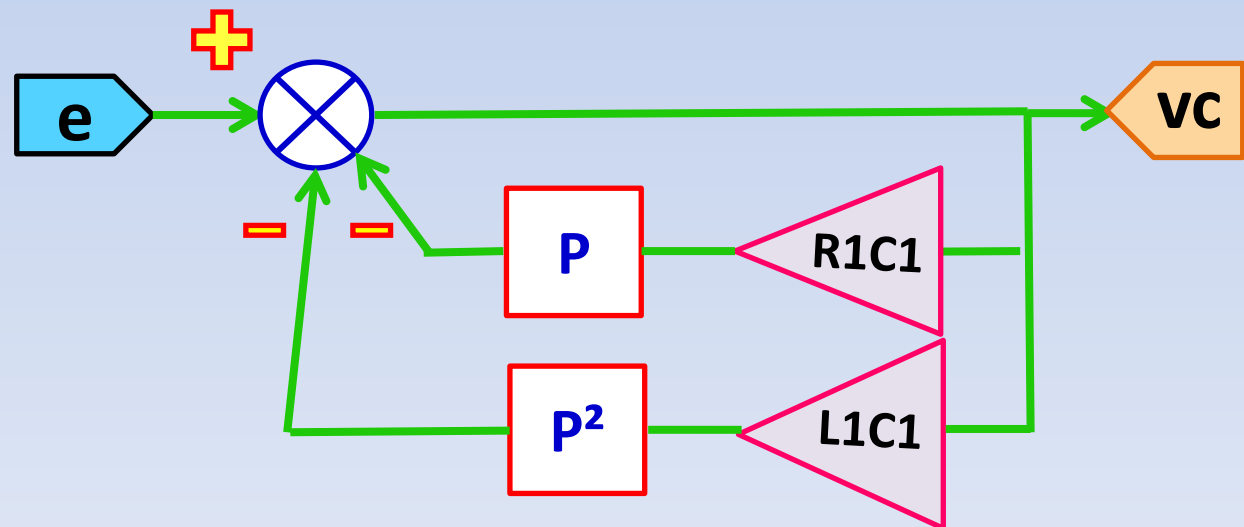
$$v_C = e - v_R - v_L \quad (1)$$

$$i_1(p) = C_1 \cdot p \cdot v_C \quad (2)$$

$$v_R(p) = R_1 \cdot C_1 \cdot p \cdot v_C \quad (3)$$

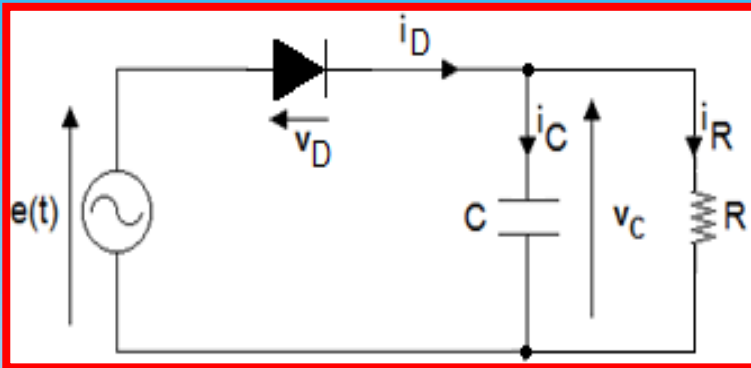
$$v_L(p) = L_1 \cdot C_1 \cdot p^2 \cdot v_C \quad (4)$$

Schéma
bloc de (1)



3.3. Modélisation d'un circuit actif

Redressement à diode mono-alternance avec filtrage capacitif



$$v_C = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{p} \cdot i_C \quad (1)$$

$$i_C = i_D - i_R \quad (2)$$

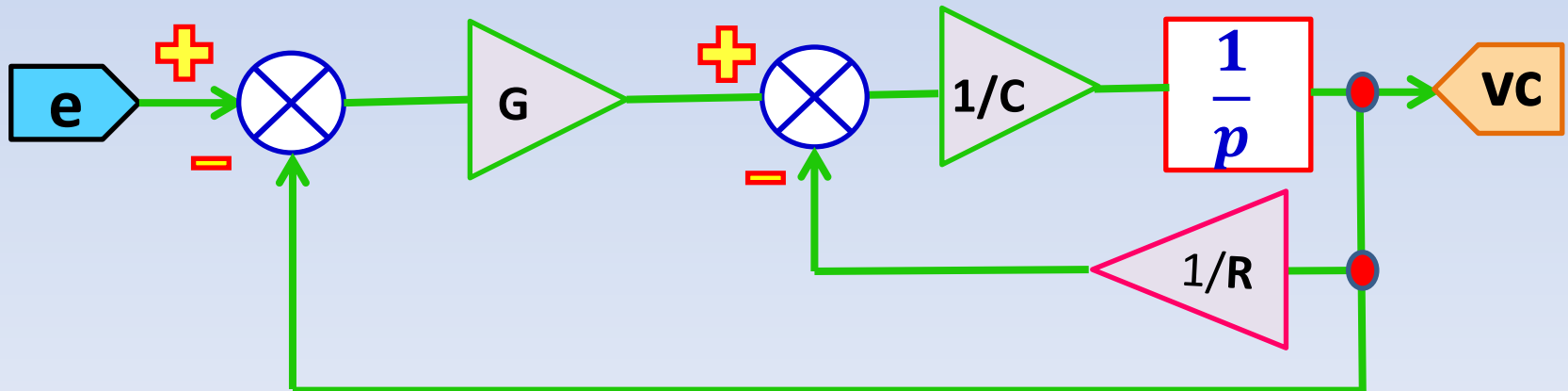
$$i_R = \frac{v_C}{R} \quad (3)$$

$$i_D = G \cdot v_D \quad (4)$$

$$v_D = e - v_C \quad (5)$$

$$G = \begin{cases} G_1 \gg qd & e - v_C \geq 0 \\ G_2 \ll qd & e - v_C < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Schéma bloc

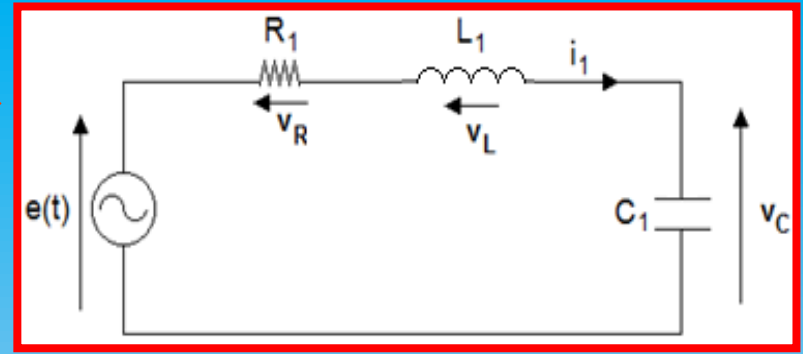


3.4. Application numérique 1



$$e(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t)$$

$$R_1 = 4\Omega, L_1 = 10\text{mH}, C_1 = 3\text{mF}$$



Modélisation

Modèle d'état: \exists 2 éléments dérivables i_1 et $v_c \rightarrow n = 2$,
 \exists 1 entrée e et 1 sortie v_c
 $\rightarrow m = 1$ et $r = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_1} \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 0], D = 0, \text{sys} = \text{ss}(A, B, C, D)$$

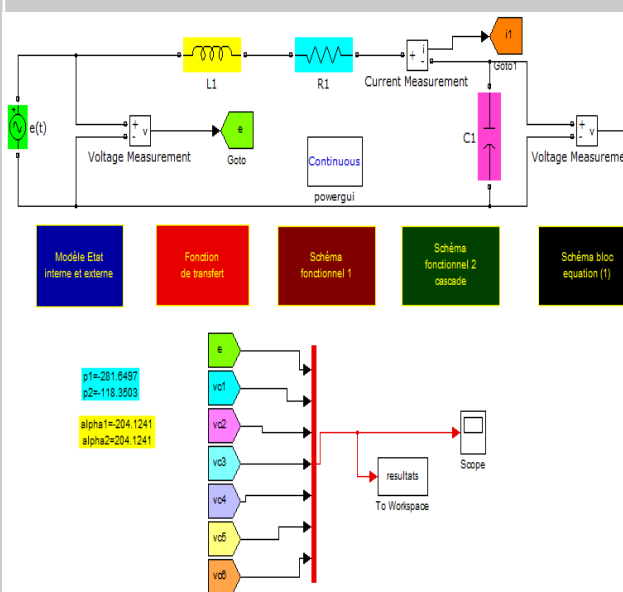
Fonction de transfert:

$$G = \text{tf}(\text{sys}) =$$

$$\frac{1}{p^2 + \frac{R_1}{L_1} \cdot p + \frac{1}{L_1 \cdot C_1}} = \frac{K}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

$$\alpha_1 = \frac{K}{(p_1 - p_2)}, \alpha_2 = -\frac{K}{(p_1 - p_2)}$$

Modèle Simulink

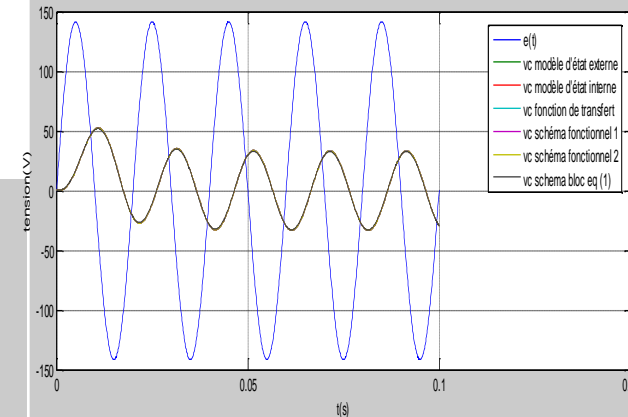


Le bloc 'To Workspace' doit être paramétré sur 'Structure with time'

Résultats

Après la simulation, écrire le petit programme suivant afin d'avoir les résultats sur un seul graphe:

```
>> t=(resultats.time);
>> e=(resultats.signals.values(:,1));
>> vc1=(resultats.signals.values(:,2));
>> vc2=(resultats.signals.values(:,3));
>> vc3=(resultats.signals.values(:,4));
>> vc4=(resultats.signals.values(:,5));
>> vc5=(resultats.signals.values(:,6));
>> vc6=(resultats.signals.values(:,7));
>> plot(t,e,t,vc1,t,vc2,t,vc3,t,vc4,t,vc5,t,vc6)
```

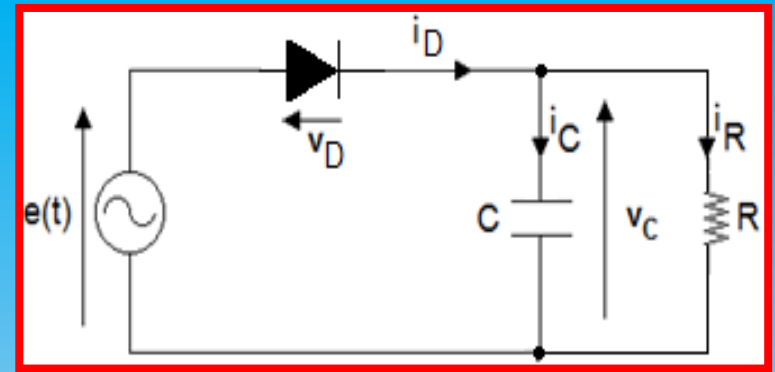


3.5. Application numérique 2



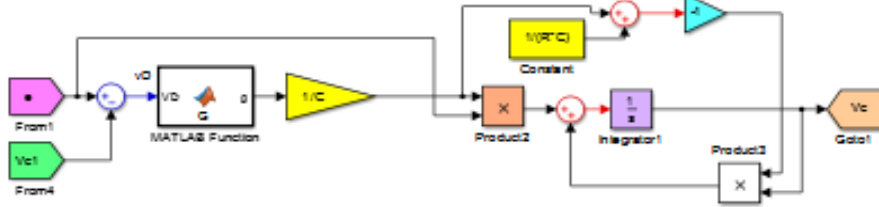
$$e(t) = 24 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t)$$

$$G_1 = 100\text{S}, G_2 = 0.1\mu\text{S}, C = 10\mu\text{F}, R = 10\text{k}\Omega$$

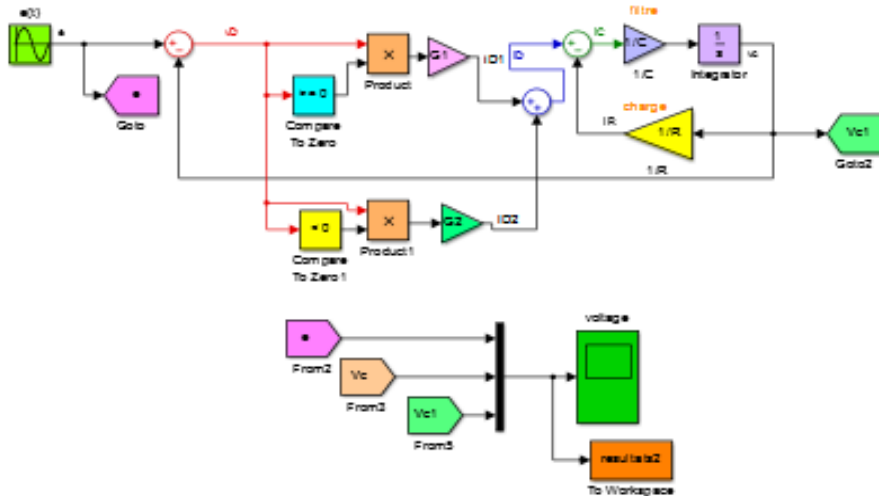


Modèle Simulink

Modélisation par modèle d'état



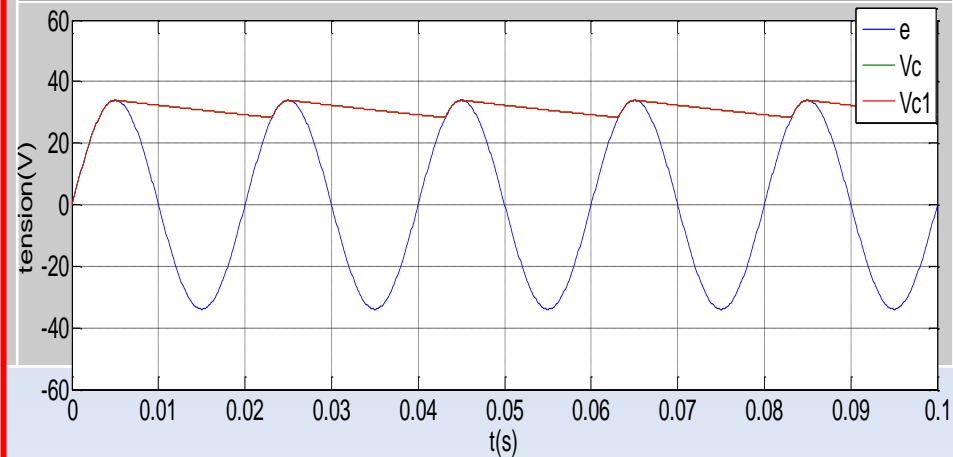
Modélisation par schémas blocs



MATLAB Function

```
function g=G(VD)
g=0;G1=100;G2=0.1e-6;
if VD>0
    g=G1;
else
    g=G2;
end
```

Résultats



Références bibliographiques

Chapitres 1, 2, et 3

- [1] M. Nakhle, P. Picard, A. Abdallah, "Outils pour la discrétisation de la représentation continue," Rapport du Project Acotris, CS Communications & Systèmes 2002.
- [2] D. Alazar, "Introduction au filtre de Kalman," Notes de cours, SUPAERO 2006.

Chapitre 4

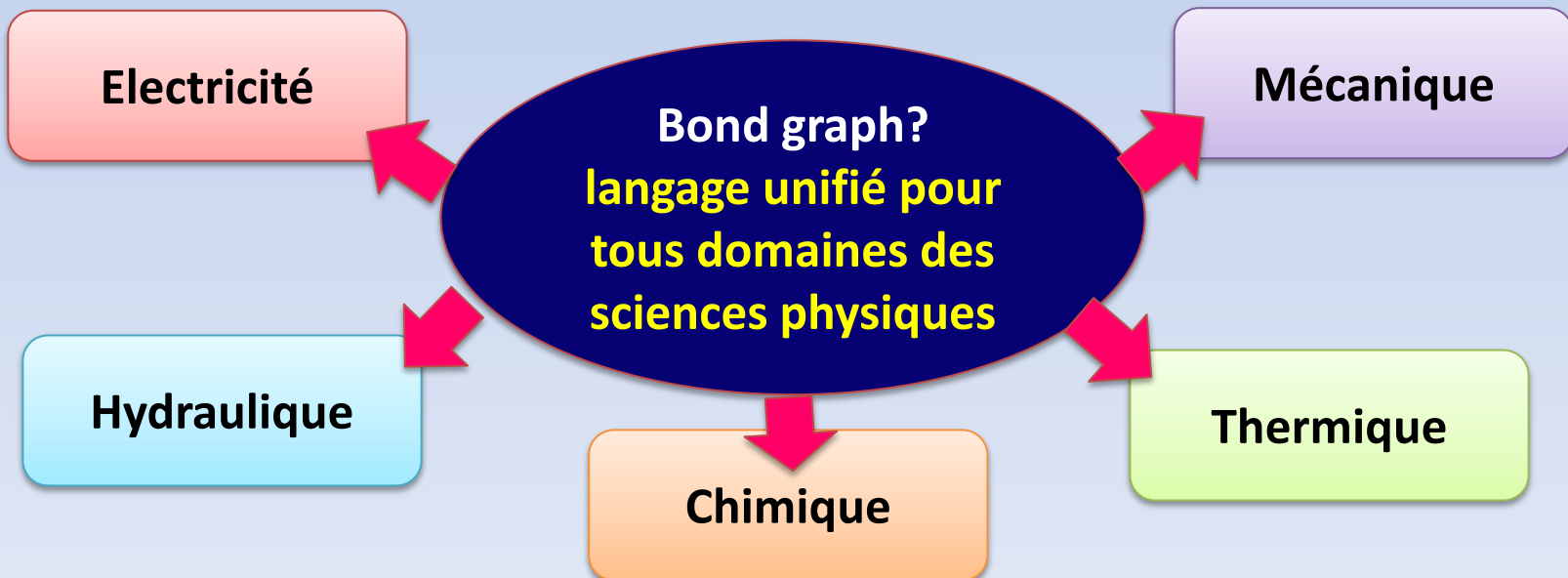
Modélisation par Bond-Graph & GIC

Chapitre 4 : La Modélisation par Bond Graph & GIC

4.1. Introduction

Dans certains cas les phénomènes physiques sont difficiles à modéliser sans utiliser des outils graphiques de modélisation. Le **bond graph** (graphe de liaison) et le **GIC** (graphe informationnel causal) sont l'un de ces outils graphiques (**Modélisation Graphique**)

4.2. Définition et principe du bond-graph (BG)



Langage unifié?

Effort 'e'

Electricité → Tension (V)

Mécanique → Force (N) (translation),
Couple (N.m) (rotation)

Hydraulique → Pression (Pa)

Thermique → Température (K)

Chimique → Potentiel (J/mol)

Flux 'f'

Electricité → Courant (A)

Mécanique → Vitesse (m/s)
(translation), Vitesse (rad/s)
(rotation)

Hydraulique → Débit
volumique (m³/s)

Thermique → Flux
d'entropie (J/(K.s))

Chimique → Flux molaire
(mol/s)

Effort (e) & Flux (f) = Variables de puissance

$$p = \int e(t) dt$$

$$q = \int f(t) dt$$



d/dt

$$\frac{dp(t)}{dt} = e(t)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = f(t)$$

Moment (p) & Déplacement (q) = variables d'énergie

$$\text{L'énergie} \rightarrow E = \int e(t) \cdot f(t) dt = \int e(t) \cdot dq(t) = \int f(t) \cdot dp(t)$$

Par exemple en électricité

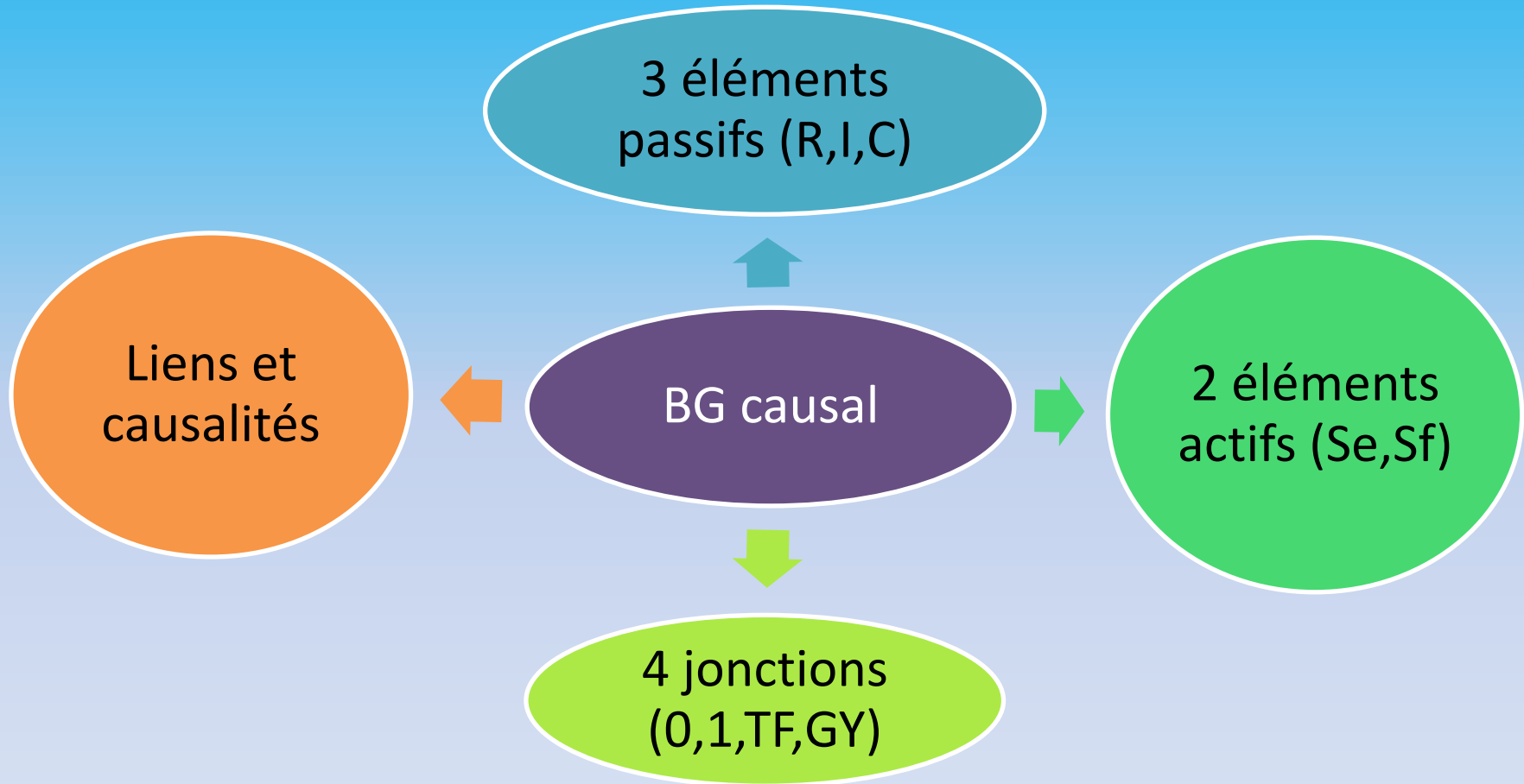
e → tension (e)

f → courant (i)






p → flux (ϕ)

q → charge (q)

Constitution d'un BG



Symboles graphiques d'un BG

Se	Sf	Jonction TF	Jonction Gy	De 	Df 
Source effort	Source flux	Transformateur	Gyrateur	f = 0 détecteur e	e = 0 détecteur f
Jonction 0	Jonction 1				Eléments passifs
Même effort e	Même flux f	Lien BG	Effort entrant, flux sortant	Effort sortant, flux entrant	R I C

e1 domaine
Physique 1



TF



e2 domaine
Physique 2

f1 domaine
Physique 1



TF



f2 domaine
Physique 2

Ex: dans un piston la pression en (Pa) se transforme en force mécanique en (N) et le débit volumique en (m³/s) se transforme en vitesse en (m/s)

e1 domaine
Physique 1



GY



f2 domaine
Physique 2

f1 domaine
Physique 1



GY



e2 domaine
Physique 2

Ex: dans un moteur électrique la tension en (V) se transforme en vitesse en (rad/s) et le courant électrique en (A) se transforme en couple en (N.m)

\Rightarrow TF: $e_1 = m.e_2$ et $f_2 = m.f_1$

\Rightarrow GY: $e_1 = r.f_2$ et $e_2 = r.f_1$

Élément passif dissipatif d'énergie R

Electricité \rightarrow **Résistance**

Mécanique \rightarrow **Frottement visqueux**

Élément passif de stockage d'énergie C

Electricité \rightarrow **Capacité**

Mécanique \rightarrow **Raideur d'un ressort**

Élément passif d'inertie I

Electricité \rightarrow **Inductance**

Mécanique \rightarrow **Moment d'inertie**

Affectations et restrictions de la causalité

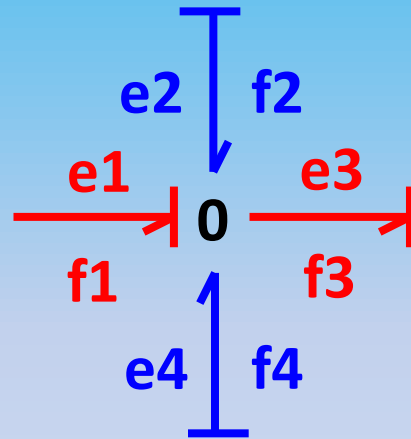
Se



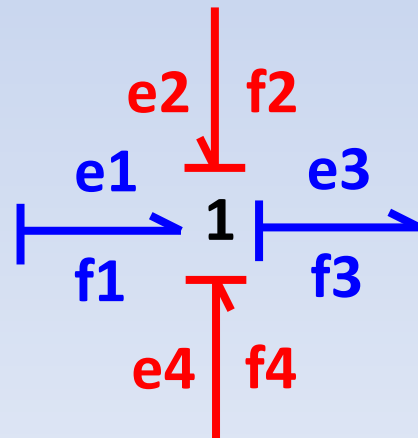
Sf



Jonction 0



Jonction 1



Restriction!

1 seul trait de causalité est permis près de 0

Principe

$$e1=e2=e3=e4$$

$$f1+f2+f4=f3$$

Restriction!

1 seul trait de causalité est permis loin de 1

Principe

$$f1=f2=f3=f4$$

$$e1+e2+e4=e3$$

TF

Principe 1
 $e_1 = m.e_2$ et $f_2 = m.f_1$



Principe 2
 $e_2 = 1/m.e_1$ et $f_1 = 1/m.f_2$

Restriction!
 1 seul trait
 près de TF

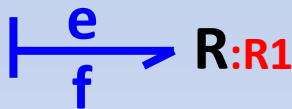
GY

Principe 1
 $e_1 = r.f_2$ et $e_2 = r.f_1$

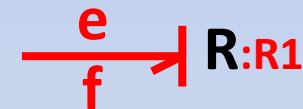


Principe 2
 $f_2 = 1/r.e_1$ et $f_1 = 1/r.e_2$

Restriction!
 2 traits près
 de GY ou rien

R

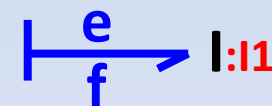
Principe 1: Causalité résistance
 $e = H(R).f$



Principe 2: Causalité conductance
 $f = H^{-1}(R).e$

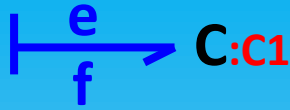
I

Principe 1: Causalité préférentielle
Intégrale $f = H(I). \int e dt = H(I).p$



Principe 2: Causalité dérivée
 $e = H^{-1}(I).df/dt$

C



Principe 1: Causalité préférentielle
Intégrale $e = H(C) \cdot \int f dt = H(C) \cdot q$

Principe 2: Causalité dérivée
 $f = H^{-1}(C) \cdot de/dt$

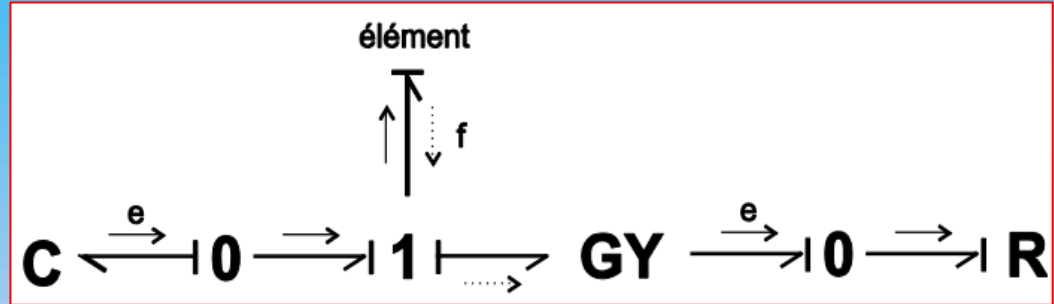
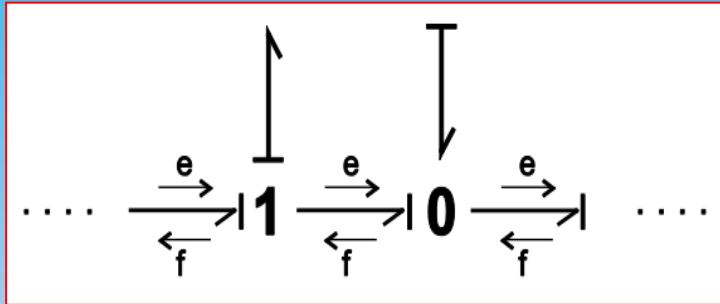
Obtention de la fonction de transfert à partir d'un BG

a). Chemin causal

Trajectoire suivie soit dans le sens de e ou de f

Direct → trajectoire entre 2 éléments n'utilisant que les jonctions (0,1,TF,GY) seulement

Indirect → trajectoire entre 2 éléments considérant en plus des jonctions les éléments passifs R,I,C



$$T = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i (m_i)^{k_i} \prod_j (r_j)^{l_j}$$



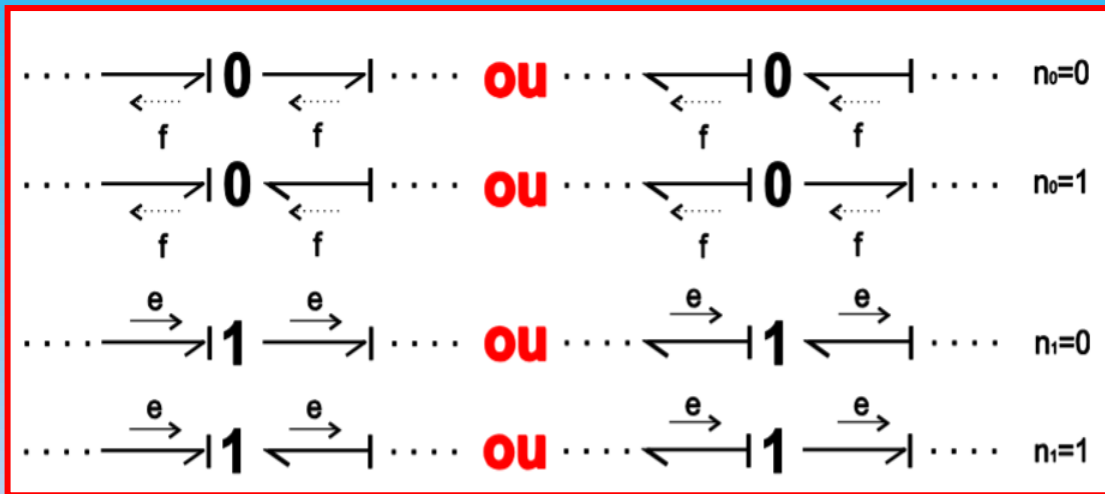
Gain du chemin direct

$$T = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i (m_i)^{k_i} \prod_j (r_j)^{l_j} \prod_e g_e$$



Gain du chemin indirect

n_0+n_1 : nombre de changement du sens du lien BG autour de 1 ou de 0 dans un chemin



m_i et r_j : rapports de transformation de i TF et de j GY respectivement

k_i et l_j : égaux à ± 1 selon principe 1 ou 2 du TF, respectivement GY

g_e : Transmittance de l'élément traversé

Transmittance de deux éléments passifs

Éléments passifs	Circuit série: $g_{12} = \frac{v_2}{v_1}$	Circuit parallèle: $g_{12} = \frac{i_2}{i_1}$
<i>RL</i>	$g_{RL} = \frac{v_R}{v_L} = \frac{z_{RI}}{z_{LI}} = \frac{R}{Lp}$	$g_{RL} = \frac{i_R}{i_L} = \frac{v/z_R}{v/z_L} = \frac{Lp}{R}$
<i>RC</i>	$g_{RC} = \frac{v_R}{v_C} = \frac{z_{RI}}{z_{CI}} = RCp$	$g_{RC} = \frac{i_R}{i_C} = \frac{v/z_R}{v/z_C} = \frac{1}{RCp}$
<i>LC</i>	$g_{LC} = \frac{v_L}{v_C} = \frac{z_{LI}}{z_{CI}} = LCp^2$	$g_{LC} = \frac{i_L}{i_C} = \frac{v/z_L}{v/z_C} = \frac{1}{LCp^2}$

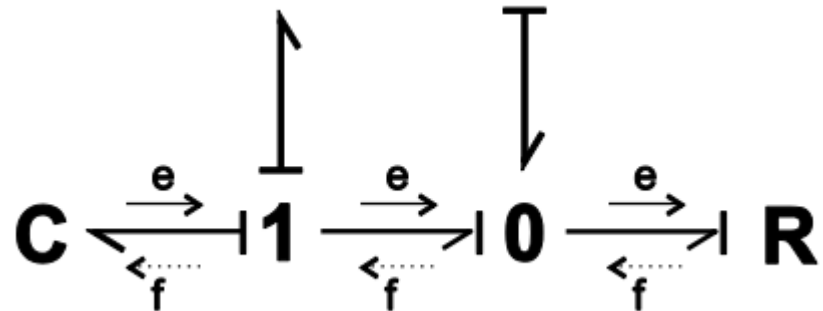
b). Boucle causale

Trajectoire fermée qui traverse des éléments passifs R, C ou I deux à deux et qui suit soit le sens de e ou celui de f

Gain de la boucle causale

$$B = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i (m_i^2)^{k_i} \prod_j (r_j^2)^{l_j} \prod_e g_e$$

Exemple



Electricité:

$$B = (-1)^{0+1} \cdot \left(\frac{1}{C_p} \cdot \frac{1}{R} \right)$$

c). Règle de *Mason*

Principe

Dans un BG, la FT entre une entrée E et une sortie Y est donnée par:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\sum_i T_i(s) \cdot D_i(s)}{D(s)}$$

Où $D(s) = 1 - \sum_i B_i + \sum_{i,j} B_i B_j - \sum_{i,j,k} B_i B_j B_k + \dots$

Avec : $\sum_i B_i$ = Somme des gains des boucles causales prises 1 à 1.

$\sum_{i,j} B_i B_j$ = Somme des produits 2 à 2 des gains des boucles causales disjointes (pas de lien ni de jonction en commun).

$T_i(s)$ = Gain de la ième chaîne d'action.

$D_i(s)$ = Se calcule comme $D(s)$ quand on a enlevé la ième chaîne d'action.

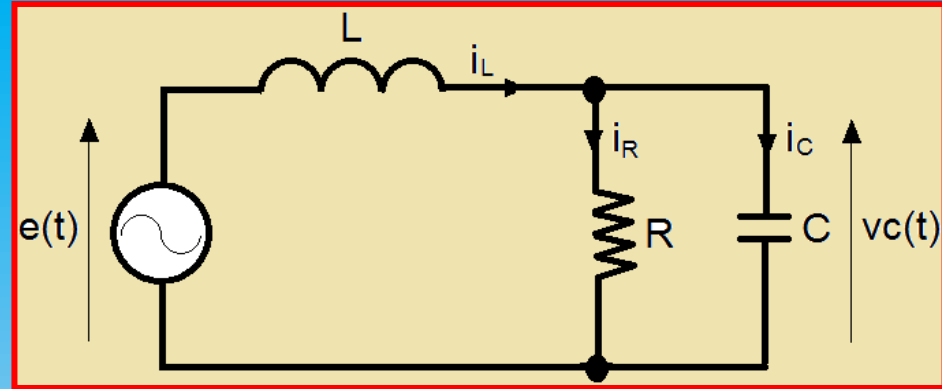
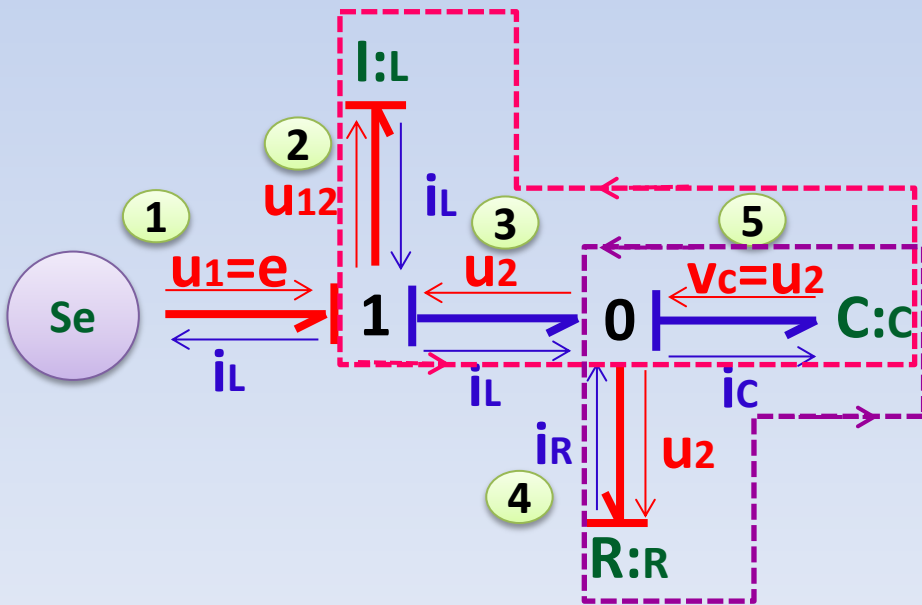
Exemple

$$e = (z_L + z_{eq}) \cdot i_L, \quad z_{eq} = \frac{R}{1 + RCp}$$

$$v_c = z_{eq} \cdot i_L$$

$$\Rightarrow FT = \frac{v_c}{e} = \frac{\frac{R}{1 + RCp}}{Lp + \frac{R}{1 + RCp}} = \frac{\frac{1}{LCp^2}}{1 + \frac{1}{LCp^2} + \frac{1}{RCP}} \quad (1)$$

Bond-graph



Règle de Mason

Chemin causal

→ **12235**

$n_0 = 0, n_1 = 0,$

$$\prod g_{ge} = \frac{1}{Lp} \cdot \frac{1}{Cp}$$

Boucles causales

→ **B235** et **B45**

$$\prod g_{geB235} = \frac{1}{LCp^2},$$

$$\prod g_{geB45} = \frac{1}{RCP}$$

$$T = (-1)^0 \cdot \prod g_{ge}$$

$$= \frac{1}{LCp^2}$$

$$FT = \frac{T}{1 - B_{235} - B_{45}}$$

$$= \frac{\frac{1}{LCp^2}}{1 + \frac{1}{LCp^2} + \frac{1}{RCP}} \quad (2)$$

$$B_{235} = (-1)^1 \frac{1}{LCp^2}$$

$n_0 = 0, n_1 = 1$

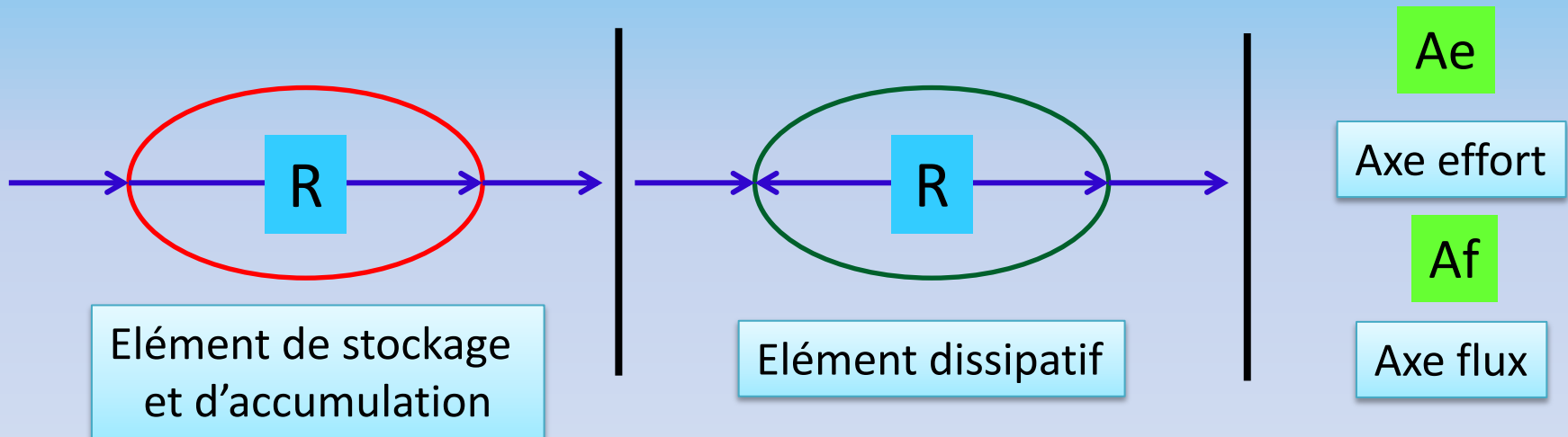
$$B_{45} = (-1)^1 \frac{1}{RCP}$$

$n_0 = 1, n_1 = 0$

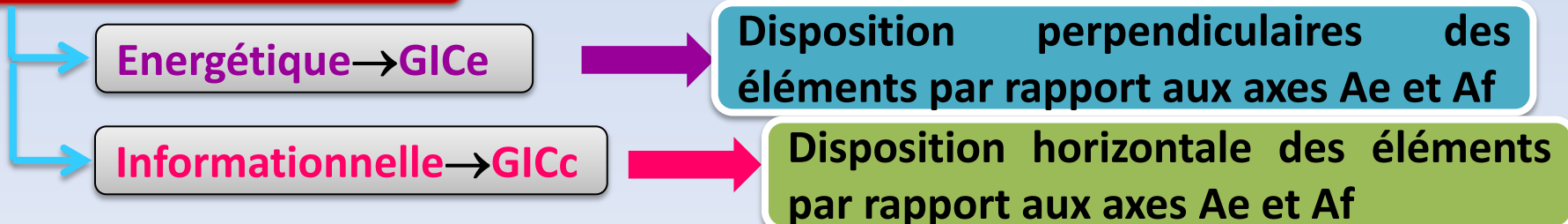
4.3. Définition et principe du GIC

Le Graphe Informationnel Causal (GIC) est une représentation graphique du Traitement de l'information à l'intérieur d'un système. Le principe du GIC s'appuie sur la causalité naturelle, encore qualifiée de causalité intégrale

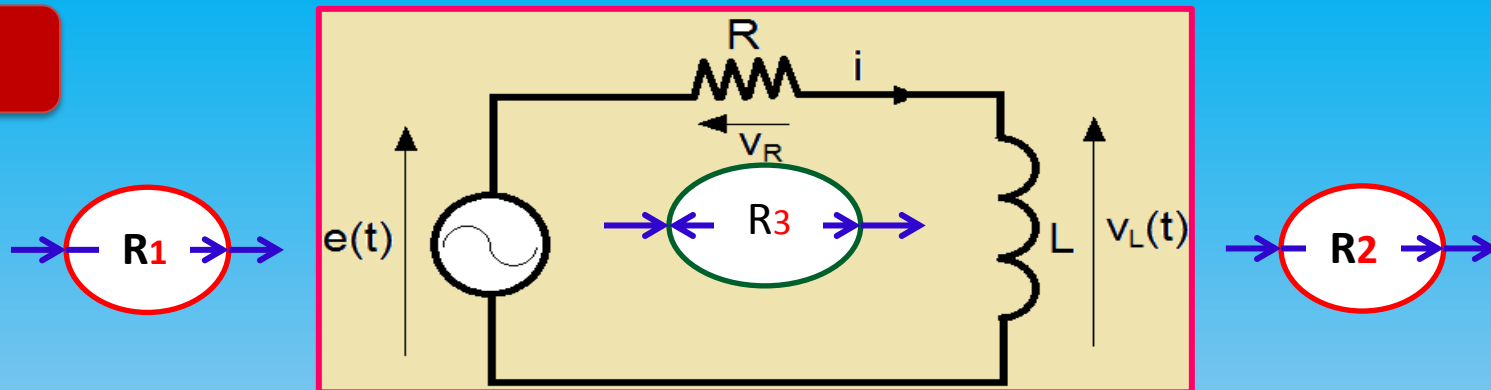
Symboles graphiques d'un GIC



Formes d'un GIC

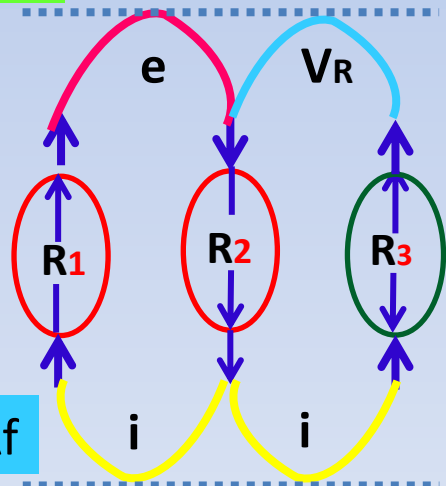


Exemple

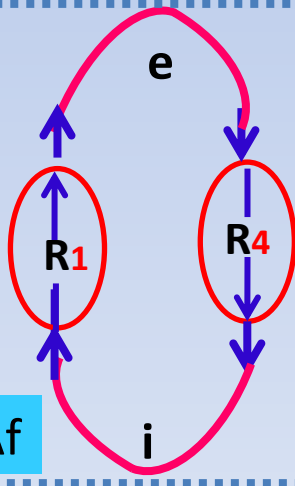


GICe

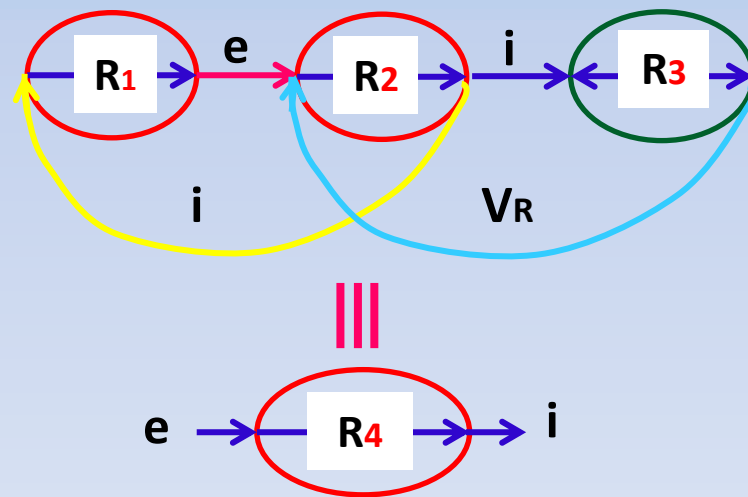
Ae



Ae



GICc



$$R_1 = e$$

$$R_2 = L \cdot \frac{di}{dt} = e - V_R$$

$$R_3 = R \cdot i = V_R$$

$$R_4 = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} = e$$

Références bibliographiques

Chapitre 4

[1] B. Ould-Bouamama, G. Dauphin-Tanguy, “Modélisation par bond-graph,” Techniques de l’Ingénieur BE 8280-1 à 8280-12, 2008.

[2] R. Sanchez, “Application des bond graphs à la modélisation et à la commande de réseaux électriques à structure variable,” Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lille, 2012.

Chapitre 5

Généralités sur L'identification

Chapitre 5 : Généralités sur l'Identification

5.1. Introduction

L'objectif de l'indentification est de fournir des informations actuelles sur les systèmes afin de permettre la mise en œuvre de régulateurs performants et robustes pour les circuits de commande régissant ces système.

Dans ce chapitre on va présenter des notions générales sur l'identification.

5.2. Définition

L'identification est l'opération de détermination des caractéristiques dynamiques d'un système. Elle nécessite la présence d'un signal d'excitation extérieur dont les caractéristiques sont connues. C'est une technique expérimentale qui utilise des procédures ou des algorithmes obtenus des études théoriques du système.

Le résultat de l'identification est un « **modèle dynamique** » capable de capter les caractéristiques du système réel.

Modèle dynamique **non paramétrique**

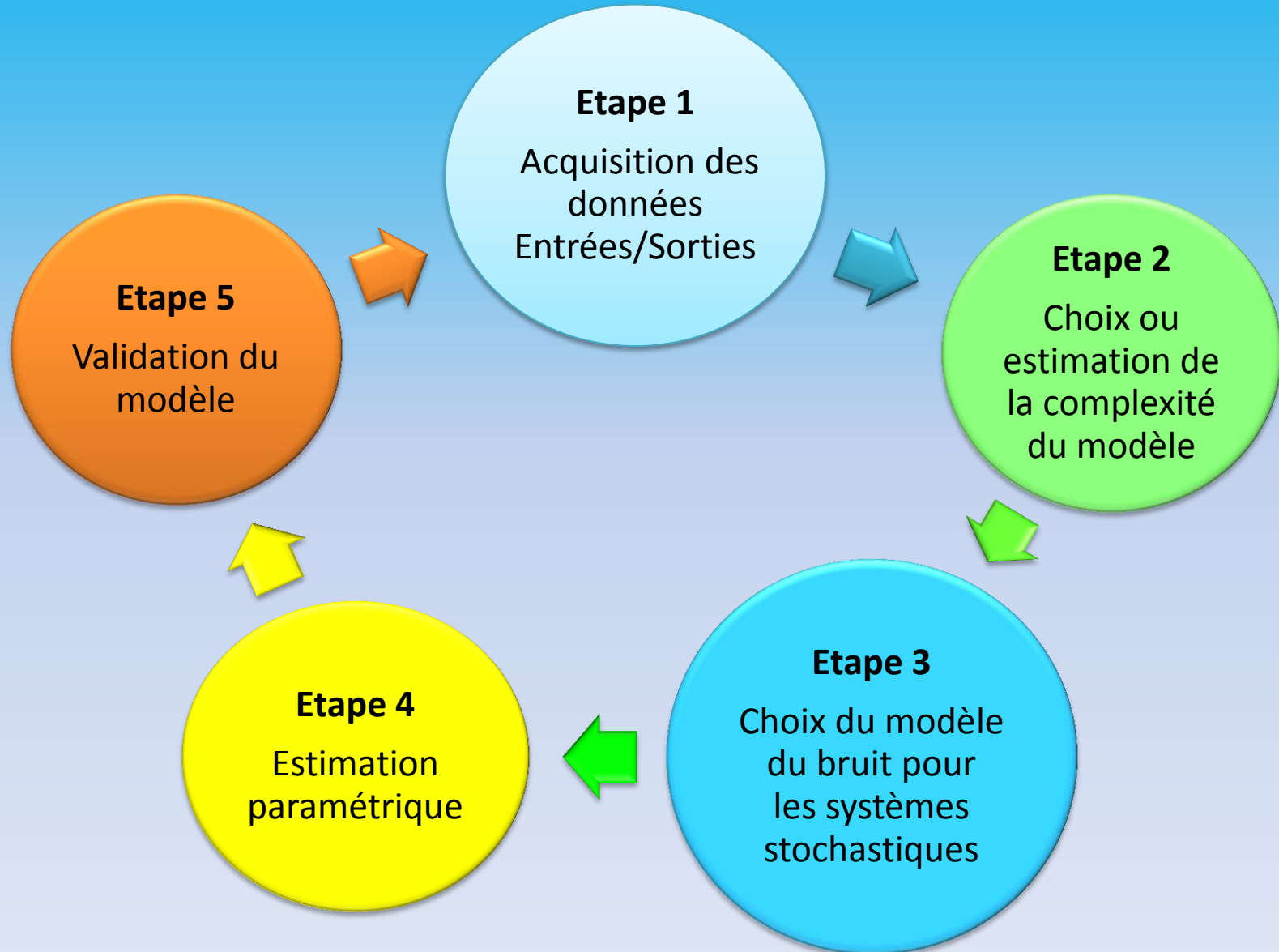
Réponse fréquentielle, à un échelon

Modèle dynamique **paramétrique**

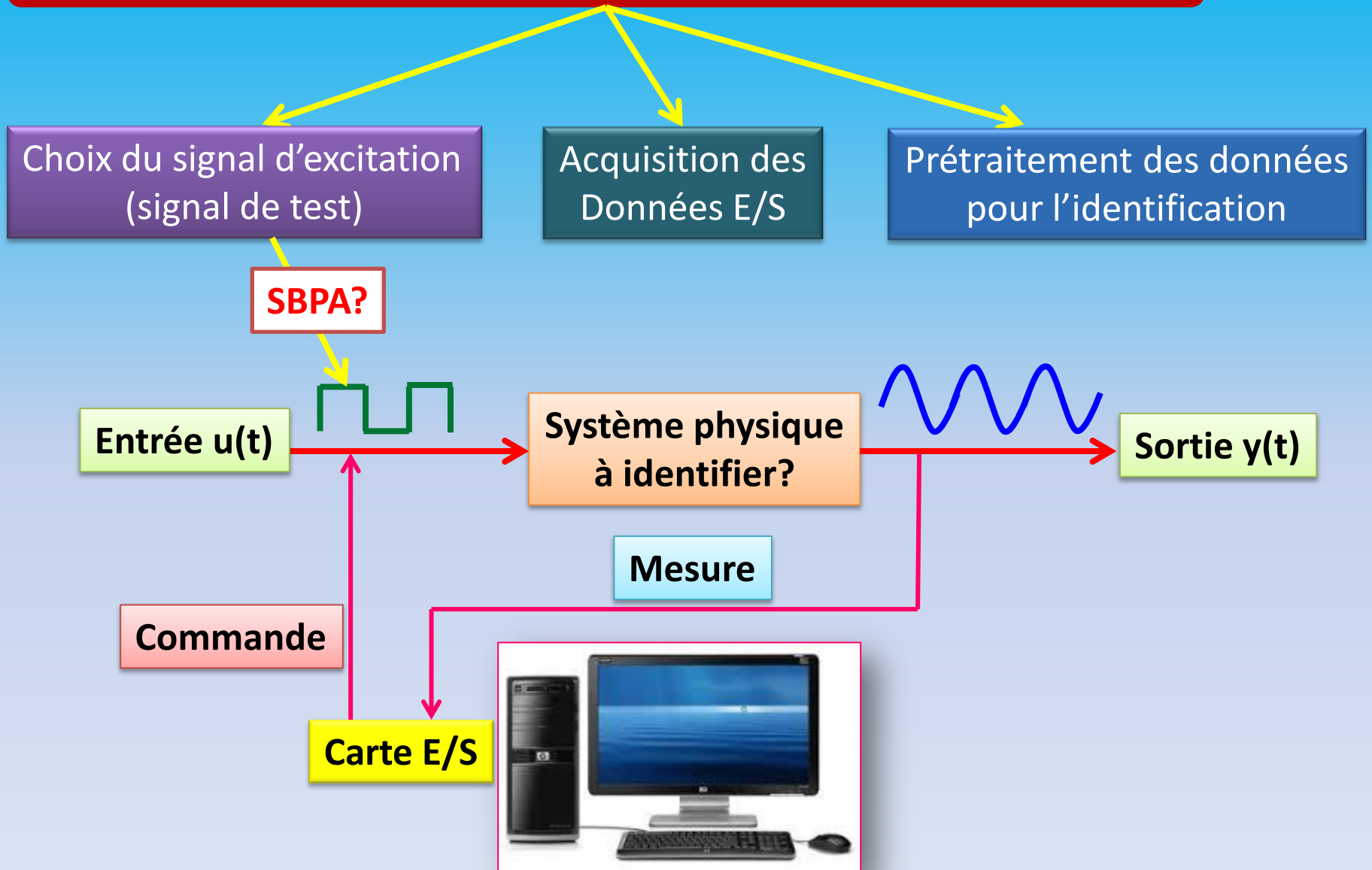
Fonction de transfert



5.3. Etapes de l'identification



5.3.1. Etape 1 → Acquisition des données Entrées/Sorties



5.4. Identification par signaux aléatoires (cas SBPA)

L'abréviation SBPA signifie : **Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire**

Signal d'excitation
le plus utilisé
dans l'identification

Succession d'impulsions
rectangulaires
de largeurs modulées

Pour une longueur de
séquence, la largeur des
impulsions varie aléatoirement
mais à long terme elle est périodique

Génération d'une SBPA?



Registres de décalage bouclés

Longueur max d'une SBPA de N cellules: $L = 2^n - 1$

Valeurs **initiales** logiques de toutes les cellules = **1**

Durée maximale d'une impulsion $d_{min} = N \cdot T_s$, T_s est le temps d'échantillonnage

B_i : indice d'un bit, i numéro de la cellule

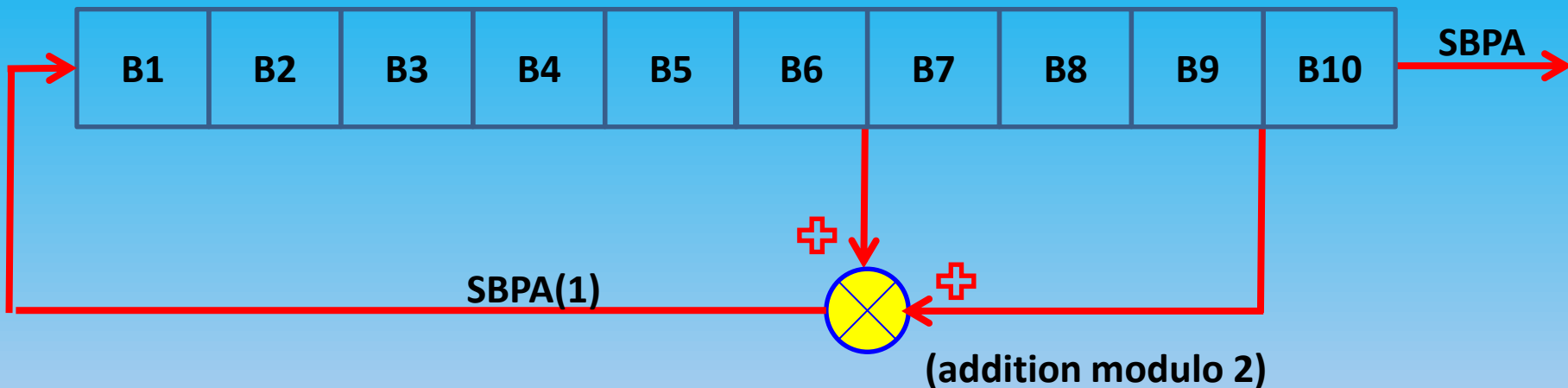
L'amplitude d'une SBPA est assez faible ce qui donne une fonction d'auto-corrélation proche de l'impulsion de Dirac $\delta(k)$. Mais elle doit être supérieure au bruit du système.

Ainsi la réponse impulsionnelle de la sortie sera simplement l'inter-corrélation entre l'entrée et la sortie : $C_{yu}(k) = \delta(k) * h(k) = h(k)$, $h(k)$: auto-corrélation de la sortie.

Structure des bouclages pour engendrer une SBPA?

N	$L = 2^N - 1$	Bits additionnés B_i et B_j
2	3	1 et 2
3	7	1 et 3
4	15	3 et 4
5	31	3 et 5
6	63	5 et 6
7	127	4 et 7
8	255	2, 3, 4 et 8
9	511	5 et 9
10	1023	6 et 9

Exemple N=10

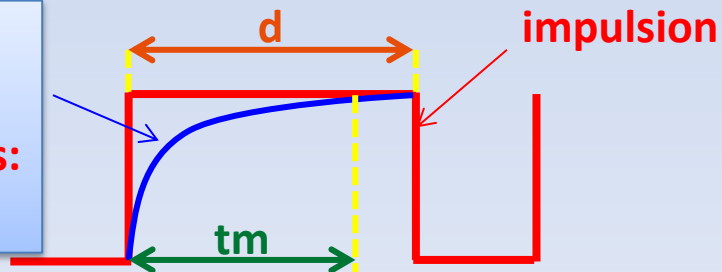


SBPA d'amplitude A_{sbpa} et de longueur $L = 2^{10} - 1 = 1023$ périodes d'échantillonnage, bits additionnés 6 et 9

Dimensionnement d'une SBPA

Temps de montée du système pour bien identifier G_s :

$$t_m < d$$



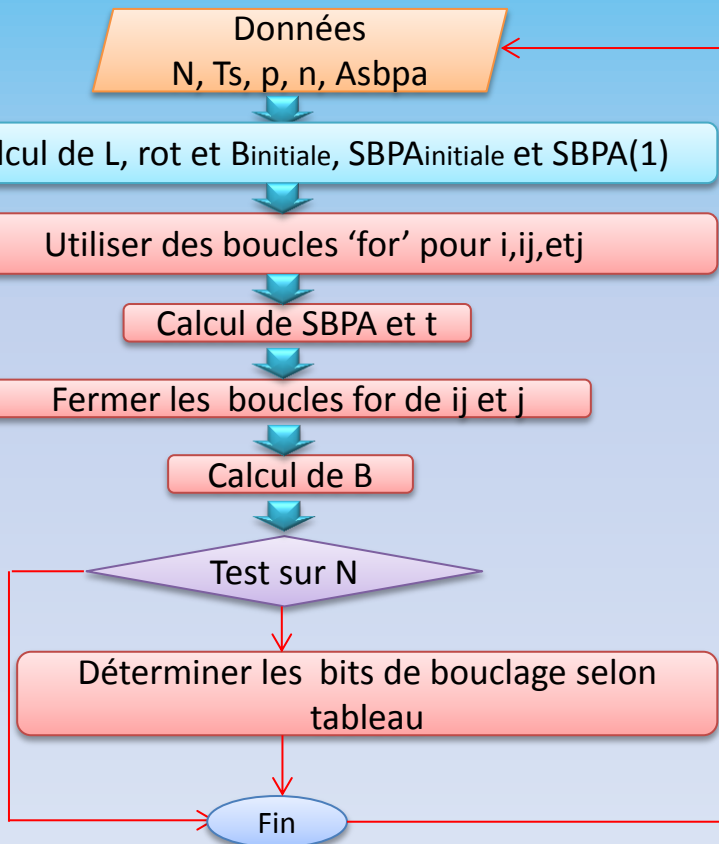
$$f_{SBPA} = \frac{f_s}{p}, p = 1, 2, 3, \dots$$

$$2^{N-1} \cdot T_s < L$$

Longueur résultante = $n \cdot p \cdot L$
 n : nombre de périodes de la SBPA

Programmation d'une SBPA sous-MATLAB

Exemple N=10



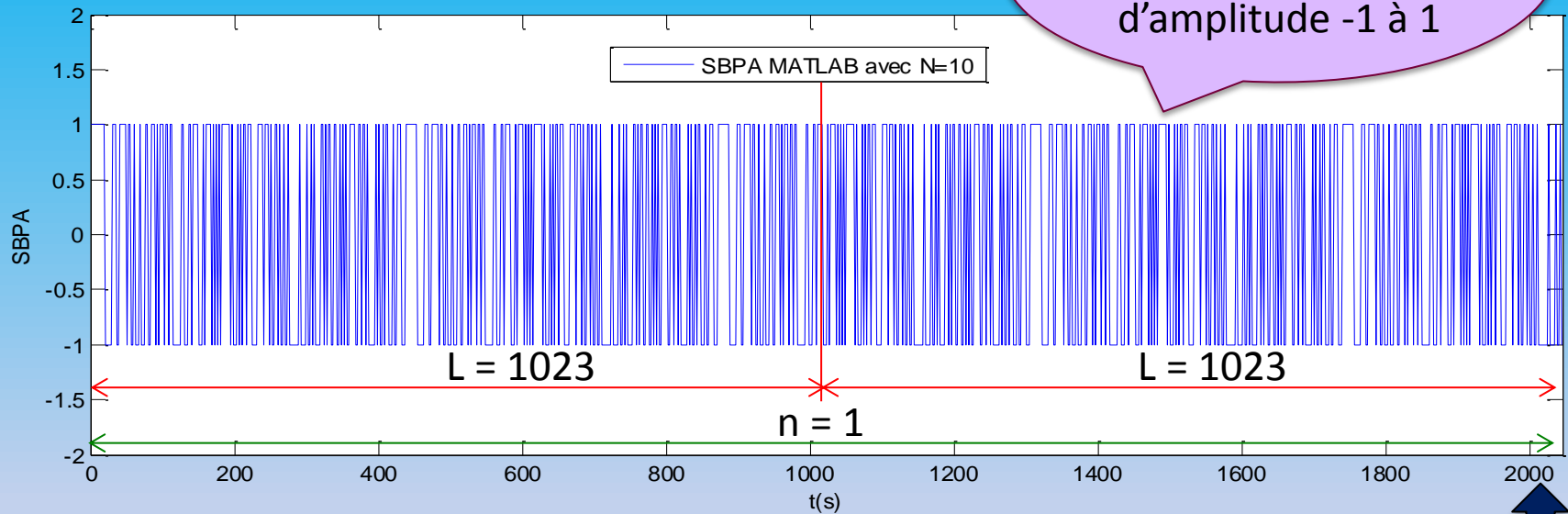
```
%%%%%%%%%%%%%%Exemple d'une SBPA de 10 cellules
clc
clear all
N=10;% nombre de bit du registre à décalage
Ts=1;% Ts temps d'échantillonnage
p=2; %p = fs/fsbpa;Asbpa=1; % Asbpa = amplitude de la SBPA qui varie entre -
Asbpa et Asbpa;n=1; % n = nombre de périodes de la SBPA
L=2^N-1; % La longueur résultante est L=n*p*L où L=2^N-1
rot=[[zeros(N-1,1),1],[eye(N,N-1)]]; %matrice de rotation
B=ones(1,N); %matrice des registres
SBPA=zeros(n*p*L,1); %matrice contenant la séquence
SBPA(1)=B(N); %sortie initiale
for i=1:L %calcul de la SBPA
for ij=1:n
for j=1:p
SBPA((i-1)*p+j+(ij-1)*p*L)=Asbpa*B(N);
t((i-1)*p+j+(ij-1)*p*L)=((i-1)*p+j+(ij-1)*p*L-1)*Ts;
end;
end;
B=B*rot; B(1)=-B(6)*B(9);
end
plot(t,SBPA)
seq_bin_pseu_alea=[t',SBPA];%%%Vecteur exportable dans Simulink
```

```

%%%%%%%%%%%%Exemple d'un SBPA de 10 cellules
clc
clear all
N=10;% nombre de bit du registre à décalage
Ts=1;% Ts temps d'échantillonnage
p=2; %p = fs/fsbpa
Asbpa=1; % Asbpa = amplitude de la SBPA qui varie entre -Asbpa et Asbpa
n=1; % n = nombre de périodes de la SBPA
L=2^N-1; % La longueur résultante est L'=n*p*L où L=2^N-1
rot=[[zeros(N-1,1);1],[eye(N,N-1)]]; %matrice de rotation
B=ones(1,N); %matrice des registres
SBPA=zeros(n*p*L,1); %matrice contenant la séquence
SBPA(1)=B(N); %sortie initiale
for i=1:L %calcul de la SBPA
    for ij=1:n
        for j=1:p
            SBPA((i-1)*p+j+(ij-1)*p*L)=Asbpa*B(N);
            t((i-1)*p+j+(ij-1)*p*L)=((i-1)*p+j+(ij-1)*p*L-1)*Ts;
        end;
    end;
    B=B*rot;
    if N==2 B(1)=-B(1)*B(2);
    elseif N==3 B(1)=-B(1)*B(3);
    elseif N==4 B(1)=-B(3)*B(4);
    elseif N==5 B(1)=-B(3)*B(5);
    elseif N==6 B(1)=-B(5)*B(6);
    elseif N==7 B(1)=-B(4)*B(7);
    elseif N==8 B(1)=-B(2)*B(3)*B(4)*B(8);
    elseif N==9 B(1)=-B(5)*B(9);
    elseif N==10 B(1)=-B(6)*B(9);
    else B(1)=-B(1)*B(N);
    end
end
plot(t,SBPA)
seq_bin_pseu_alea=[t',SBPA];%%%Vecteur exportable dans Simulink

```

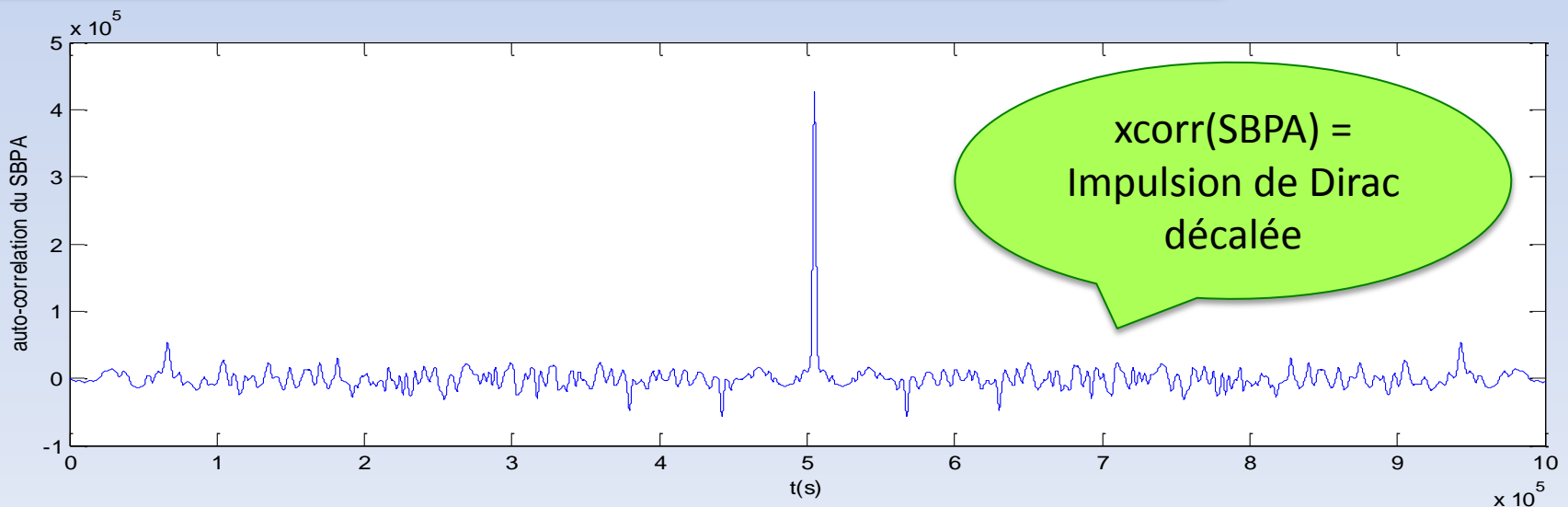
Signal SBPA obtenu



SBPA=succession
d'impulsions
d'amplitude -1 à 1

Auto-correlation du Signal SBPA obtenu (instruction 'xcorr')

$$f_s = 2 \times f_{SBPA}$$



Rappel mathématique

Produit de convolution

$$C_{xy}(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau$$

$$C_{x\delta}(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$$

Fonction de corrélation (ou inter-corrélation)

$$\text{Corr}_{xy}(t) = x(t) \otimes y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(-(\tau - t)) dt = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

Fonction d'auto-corrélation (x=y)

Espérance

$$E(x) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i = x_{moy}$$

$$E(y) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N y_i = y_{moy}$$

variance

$$\text{var}(x) = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - x_{moy})^2$$

$$\text{var}(y) = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (y_i - y_{moy})^2$$

covariance

$$\text{cov}(x,y) = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - x_{moy}) \cdot (y_i - y_{moy})$$

Indice de corrélation

$$i\text{Corr}(x,y) = \frac{\text{cov}(x,y)}{\text{var}(x) \cdot \text{var}(y)}$$

Rappel des méthodes de base en automatique

Réponse indicielle

Réponse S d'un système à un signal d'attaque échelon E

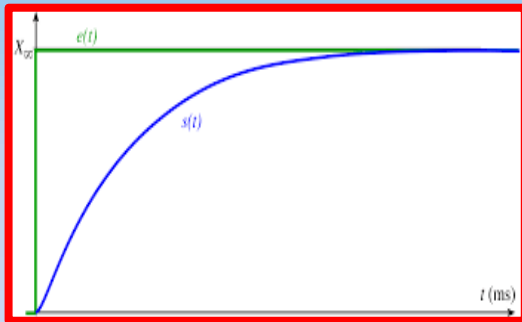
K: gain statique
Tr: retard pur
 τ : constante de temps
tr: temps de réponse

$$FT = \frac{K}{1 + \tau.p}$$

Échelon sans retard
Ex: 1^{er} ordre

$$FT = \frac{K.(1 - e^{-T_r.p})}{1 + \tau.p}$$

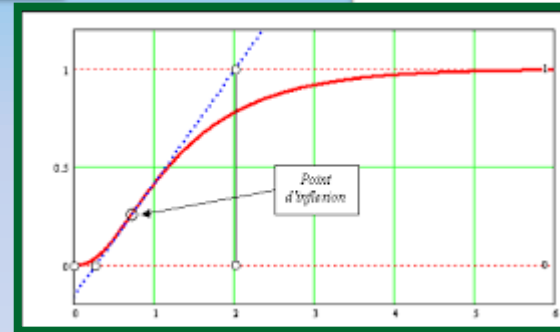
Échelon avec retard
Ex: 1^{er} ordre



$$K = (S_\infty) / E$$

$$\tau = tr / 3 \quad (1)$$

$$tr = 95 / 100 . t(S_\infty)$$

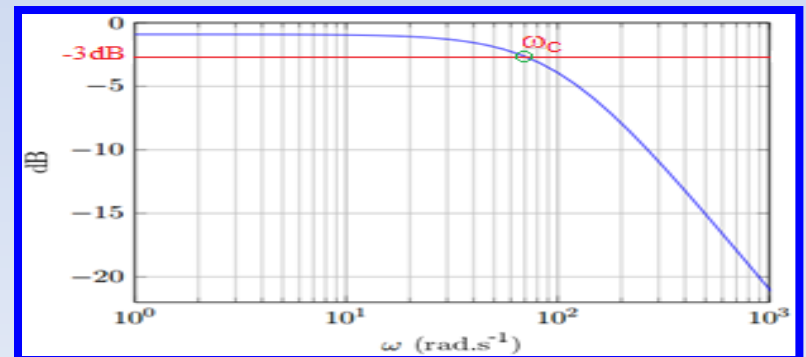


Réponse fréquentielle

Diagramme de Bode de la FT ci-dessus en remplaçant p par $j.\omega$

ω_c en [rad/s] est la pulsation de coupure qui correspond à une chute du gain max de -3dB

$$\tau = 1 / \omega_c \quad (2)$$



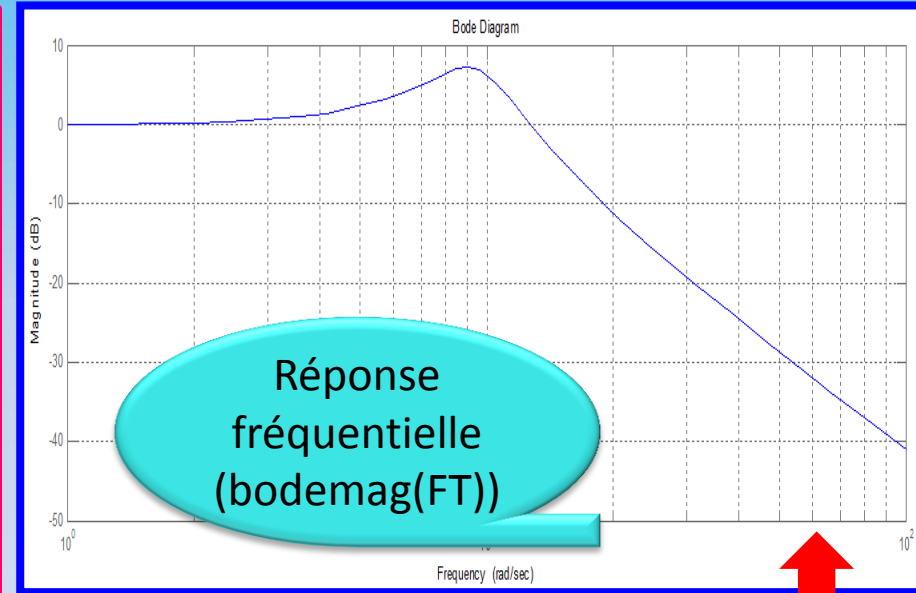
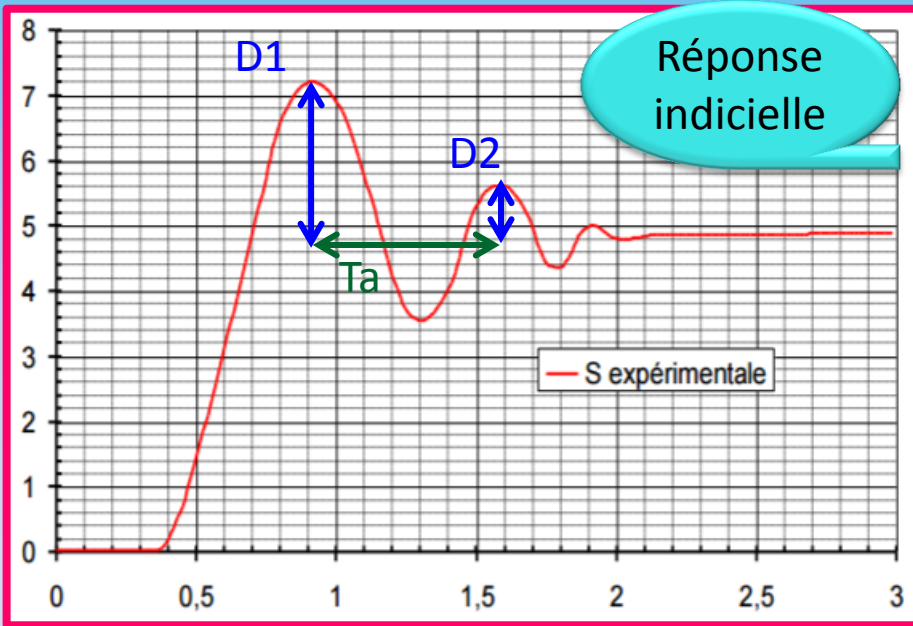
Réponses indicielle & fréquentielle à un échelon E dans le cas du 2^{ème} ordre

$$FT = \frac{K \cdot \omega_0^2}{p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2}$$

K: gain statique

ξ: facteur d'amortissement

ω₀: pulsation propre [rad/s]



$$K = (S_{\infty})/E$$

$$T_a = t(D2) - t(D1)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\log(D1)^2}{\pi^2 + \log(D1)^2}}$$

$$D1\% = D1 * 100$$

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T_a \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Dans cet exemple

$$K = 4.9/5 = 0.98$$

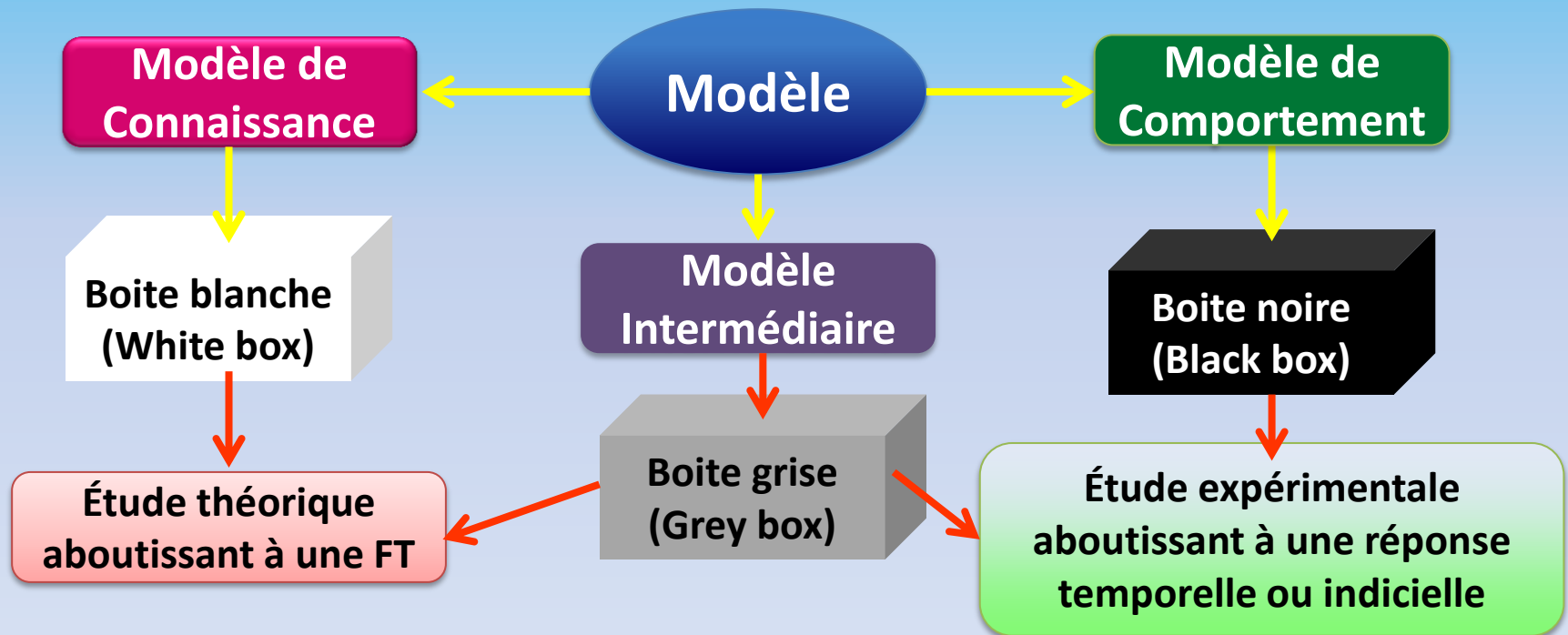
$$D1 = 2.3, D2 = 0.7, t(D1) = 0.91, t(D2) = 1.59$$

$$\rightarrow T_a = 0.68, D1\% = 2.3/4.9 \rightarrow \xi = 0.22$$

$$\rightarrow \omega_0 = 9.5 \text{ rad/s} \rightarrow FT = \frac{0.98 \cdot 9.5^2}{p^2 + 2 \cdot 0.22 \cdot 9.5 \cdot p + 9.5^2}$$

5.5. Choix de la structure du modèle pour l'identification

5.5.1. Modèles de connaissance/comportemental/intermédiaire



5.5.2. Modèles ARX/ARMAX/OE/BOX-JENKINS

5.5.2.1. Rappel sur le passage d'une FT continue en une FT discrète

Considérons l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d y(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t)$$

$$G(p) = \frac{L\{\text{sortie}\}}{L\{\text{entrée}\}} = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_p y_{n-p} = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_m u_{n-m}$$

L'opérateur retard, noté q^{-1} , est défini par :

$$q^{-1} y_n = y_{n-1}, \quad q^{-2} y_n = y_{n-2}, \quad \dots, \quad q^{-k} y_n = y_{n-k}$$

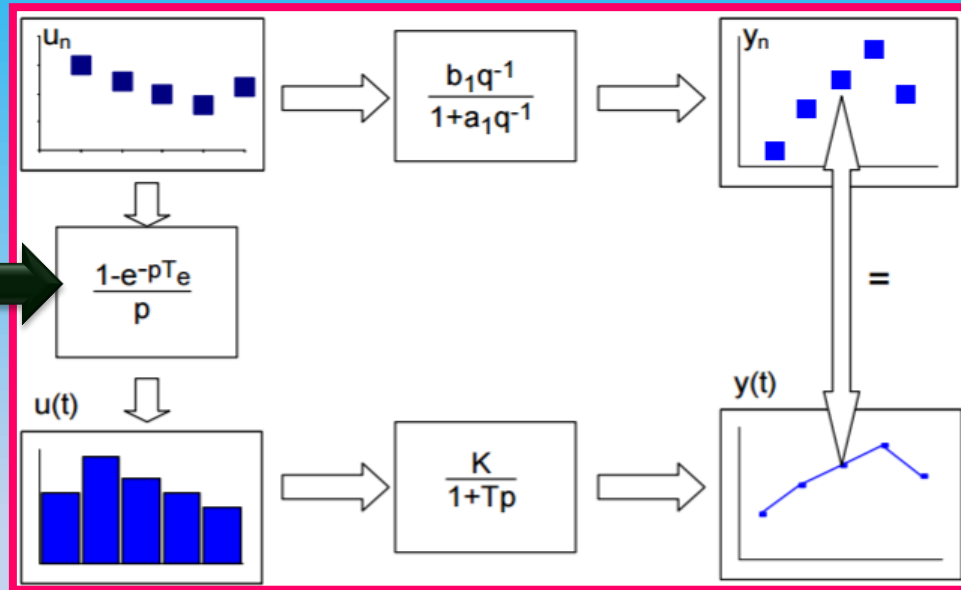
On exprime la fonction de transfert du système discret en fonction de q^{-1} :

$$H(q^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}}{a_0 + a_1 q^{-1} + \dots + a_p q^{-p}} = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

Exemple d'un système du 1^{er} ordre

$$G(p) = \frac{K}{Tp + 1}$$

FT d'un bloqueur d'ordre zéro



$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t)$$

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Th. Valeur initiale

$$y_n + a_1 y_{n-1} = b_1 u_{n-1}$$

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

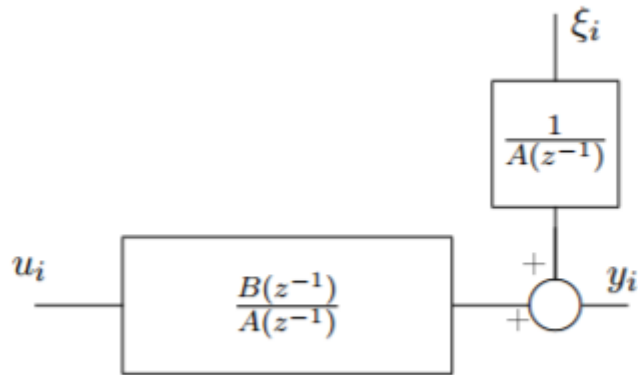
$$H(q^{-1}) = \frac{b_1 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1}}$$

$$a_1 = -e^{-\frac{T_e}{T}} \text{ et } b_1 = K(1 - e^{-\frac{T_e}{T}})$$

Th. Valeur finale

$$f = G(p) \cdot \frac{1 - e^{-pT_e}}{p}$$

5.5.2.2. Modèles paramétriques stochastiques



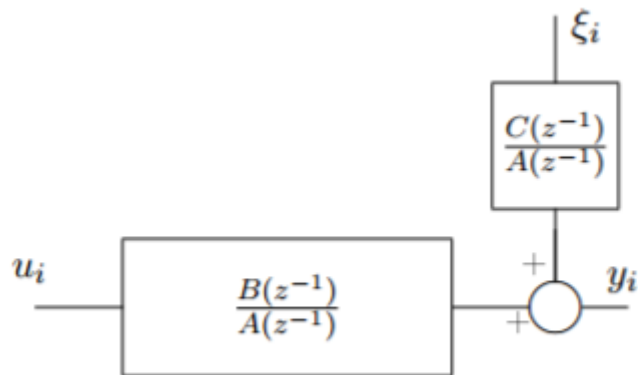
Modèle ARX

Le modèle le plus simple, donne souvent de bons résultats. le seul hic est le traitement du bruit qui est soumis à la même dynamique que l'entrée. A utiliser en première approximation ou lorsque le bruit est surtout à l'entrée.

Méthode de détermination des paramètres :
Moindres carrés ou Matrice instrumentale

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{na} z^{-na} \\ B(z) = b_1 z^{-1} + \dots + b_{nb} z^{-nb} \end{cases}$$



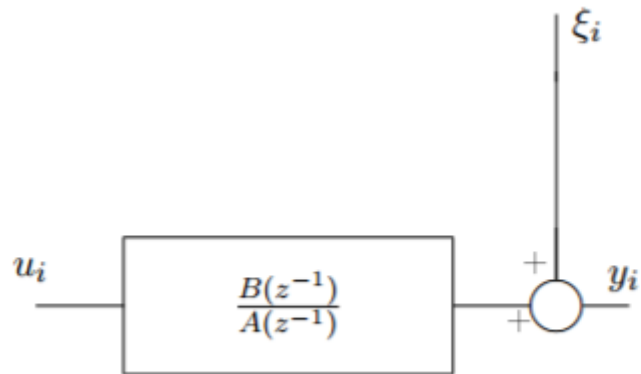
Modèle ARMAX

Proche du modèle ARX, il s'utilise dans les mêmes cas. Il permet en outre de créer un modèle de bruit un peu plus réaliste. C'est le modèle le plus utilisé.

Méthode de détermination des paramètres :
Maximum de vraisemblance

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})e(k)$$

$$C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{nc} z^{-nc}$$

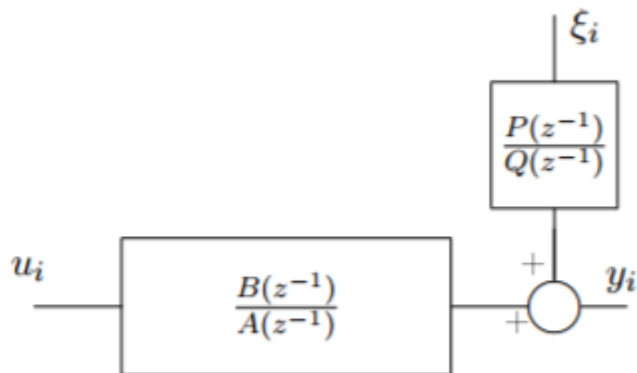


Modèle OE

Bien que semblant plus simple que les précédents, le calcul des paramètres s'avère plus difficile. Parfait lorsque le bruit est surtout un bruit de capteur, donc proche de la sortie.

Méthode de détermination des paramètres :
Maximum de vraisemblance

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k)$$



Modèle de Box-Jenkins

Le modèle complet par excellence, la dynamique différente pour l'entrée et le bruit en font un bon modèle.

Méthode de détermination des paramètres :
Maximum de vraisemblance

$$A(z^{-1})Q(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})Q(z^{-1})u(k) + A(z^{-1})P(z^{-1})e(k)$$

Identification paramétrique du modèle ARX par les moindres carrés non récursifs

$$\begin{bmatrix} y(N) \\ y(N-1) \\ \dots \\ y(p+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(N-1) & y(N-2) & \dots & -y(N-p) & u(N) & \dots & u(N-q) \\ -y(N-2) & y(N-3) & \dots & -y(N-p-1) & u(N-1) & \dots & u(N-q-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(p) & -y(p-1) & \dots & -y(1) & u(p+1) & \dots & u(p+1-q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_p \\ b_0 \\ \dots \\ b_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon(N) \\ \varepsilon(N-1) \\ \dots \\ \varepsilon(p+1) \end{bmatrix}$$

de la forme : $Y = H\theta + \varepsilon$ avec θ vecteur des paramètres à estimer.

$$\varepsilon^2 = \varepsilon^T \varepsilon = (Y - H\theta)^T (Y - H\theta)$$

$$\hat{\theta} = (H^T H)^{-1} H^T Y$$

$$\hat{\varepsilon} = 0$$

Exemple sous MATLAB

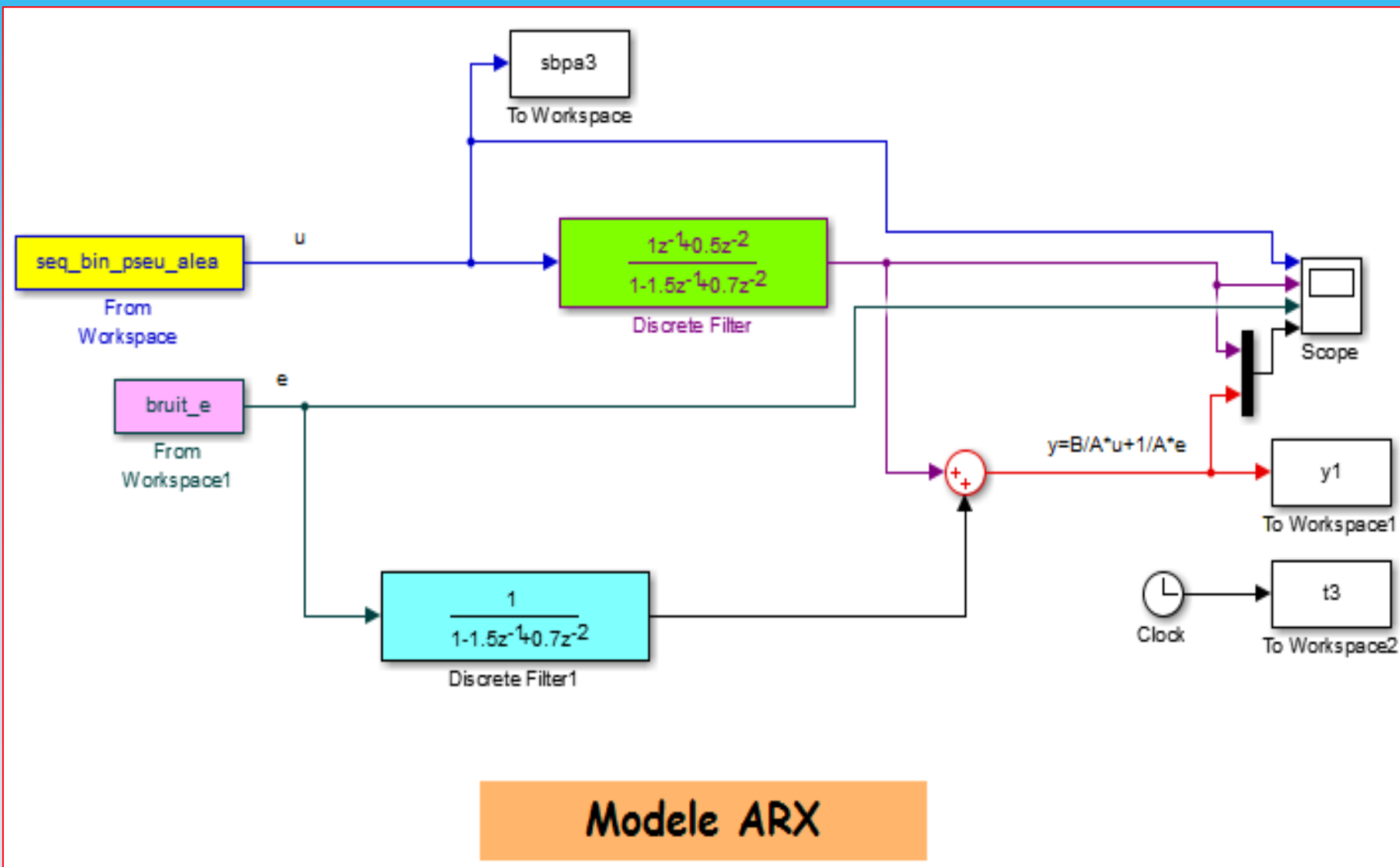
```
clear all;
% La dimension de theta est celle du nombre total de paramètres
inconnus (a1, a2 et b1 dans cet exemple).
Y=[0 .1 1.8 .9 1.1 .95 .97 .99 1.02 1.01]';
% L'entrée est supposée être un échelon.
U=ones(10,1);
% Détermination du vecteur-temps associé aux mesures.
% Méthode directe: construction de la matrice H puis calcul de la
pseudo-inverse theta
for i = 3:size(Y,1)
    H(i,:) = [-Y(i-1) -Y(i-2) U(i-1)];
end
theta = inv(H'*H)*H'*Y
```

$$\begin{bmatrix} y(N) \\ y(N-1) \\ y(N-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(N-1) & y(N-2) & u(N-1) \\ -y(N-2) & y(N-3) & u(N-2) \\ -y(N-3) & y(N-4) & u(N-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix}$$

theta =

0.5336 ← \hat{a}_1
 0.2114 ← \hat{a}_2
 1.7947 ← \hat{b}_1

Exemple d'un modèle ARX sous MATLAB/SIMULINK



```

clear all
clc
Ts=1;
dt=Ts;d=300
t1=dt:dt:300;
%%%%%%%%%%%% le nombre d'echantionage %%%%%%%%%%
Ne=d/dt;
%%%%%%%%%%%% signal bruit blanc uniforme %%%%%%%%%%
x=randn(1,Ne);
bruit_e=[t1',x'];
plot(bruit_e)
N=7;% nombre de bit du registre à décalage
Ts=1;% Ts = temps d'échantillonnage
p=3; %p = fs/fsbpa
Asbpa=1; % Asbpa = amplitude de la SBPA qui varie entre -Asbpa et Asbpa
n=1; % n = nombre de périodes de la SBPA
L=2^N-1; % La longueur résultante est L'=n*p*L où L=2^N-1
rot=[[zeros(N-1,1);1],[eye(N,N-1)]]; %matrice de rotation
B=ones(1,N); %matrice des registres
SBPA=zeros(n*p*L,1); %matrice contenant la séquence
SBPA(1)=B(N); %sortie initiale
for i=1:L %calcul de la SBPA
    for ij=1:n
        for j=1:p
            SBPA((i-1)*p+j+(ij-1)*p*L)=Asbpa*B(N);
            t((i-1)*p+j+(ij-1)*p*L)=((i-1)*p+j+(ij-1)*p*L-1)*Ts;
        end;
    end;
end;
B=B*rot;
B(1)=-B(3)*B(6);
end
plot(t,SBPA)
seq_bin_pseu_alea=[t',SBPA];

```

```

>> data=iddata(y1,sbpa3);
>> B=arx(data,[2 2 1])

B =
Discrete-time ARX model: A(z)y(t) = B(z)u(t) + e(t)
A(z) = 1 - 1.47 z^-1 + 0.6678 z^-2

B(z) = z^-1 + 0.475 z^-2

Sample time: 1 seconds

Parameterization:
Polynomial orders: na=2 nb=2 nk=1
Number of free coefficients: 4
Use "polydata", "getpvec", "getcov" for parameters and their uncertainties.

Status:
Estimated using ARX on time domain data "data".
Fit to estimation data: 85.7% (prediction focus)
FPE: 1.145, MSE: 1.115

```

Identification des paramètres par l'instruction ARX

```

>> for i = 3:size(y1,1)
H(i,:) = [-y1(i-1) -y1(i-2) sbpa3(i-1) sbpa3(i-2)];
end
>> theta = inv(H'*H)*H'*y1

theta =
-1.5056
0.7058
1.1588
0.4151

```

Identification des paramètres par les moindres carrés non récursifs

\hat{a}_1 → -1.5056
→ 0.7058 \hat{a}_2
 \hat{b}_1 → 1.1588
→ 0.4151 \hat{b}_2

Références bibliographiques

Chapitre 5

- [1] D. Benyoucef, “Cours Identification Ch.II: Généralités,” Université Hassiba Benbouali, 2011.
- [2] I. D. Landau & A. Besençon-Voda, “Identification des systèmes,” Hermès, 2001 .
- [3] R. Ben Abdenour, P. Borne, M. Ksouri, M. Sahli, “Identification et commande numérique des procédés industriels”, Technip, 2001.
- [4] A. El Missouri, “Identification des systèmes linéaires par S.B.P.A ”, Ecole d’Ingénieurs EICNAM, 2015.
- [5] V. Choqueuse, H. Mangel, J.-L. Mourrain, S. Turri, «Travaux dirigés : AU3 2^{ème} année», IUT GEII, Brest.
- [6] S. Génouël, «Identification temporelle des SLCI», TD7 énoncé et corrigé, MPSI-PCSI Sciences Industrielles pour l’Ingénieur.
- [7] P. Bonnet, “Modélisation Identification des processus”, Master ASE1-Identification des processus, Univ. Lille 1, 2010-2011.
- [8] “Travaux Pratiques Modélisation Identification des Processus”, USTL-Master ASE M1–2009/2010, Univ. Lille.
- [9] J. Benesty, «Algorithme des moindres carrés récursifs– MCR (Recursive Least-Squares – RLS)”, INRS-EMT.

Chapitre 6

**Méthodes d'Identification
Graphique
(Strejc & Broïda)**

Chapitre 6 : Méthodes d'Identification Graphique

6.1. Introduction

Les méthodes graphiques d'identification constituent des outils simples qui assurent l'identification des systèmes en se basant seulement sur leurs réponses indicielles. En outre, certaines méthodes graphiques offrent une autre fonctionnalité qui est le choix du correcteur à utiliser dans une commande en boucle fermée et le dimensionnement de ses coefficients.

Dans ce cours on contentera de la présentation des méthodes de Strejc et Broïda.

6.2. Méthode de Strejc

Elle s'applique aux systèmes **apériodiques** (sans **dépassement**), avec **retard pur**, et dont la réponse indicielle correspond à la FT suivante lorsque le système est attaqué avec un échelon.

$$G(p) = K \frac{e^{-(Tr p)}}{(1 + \tau p)^n}$$

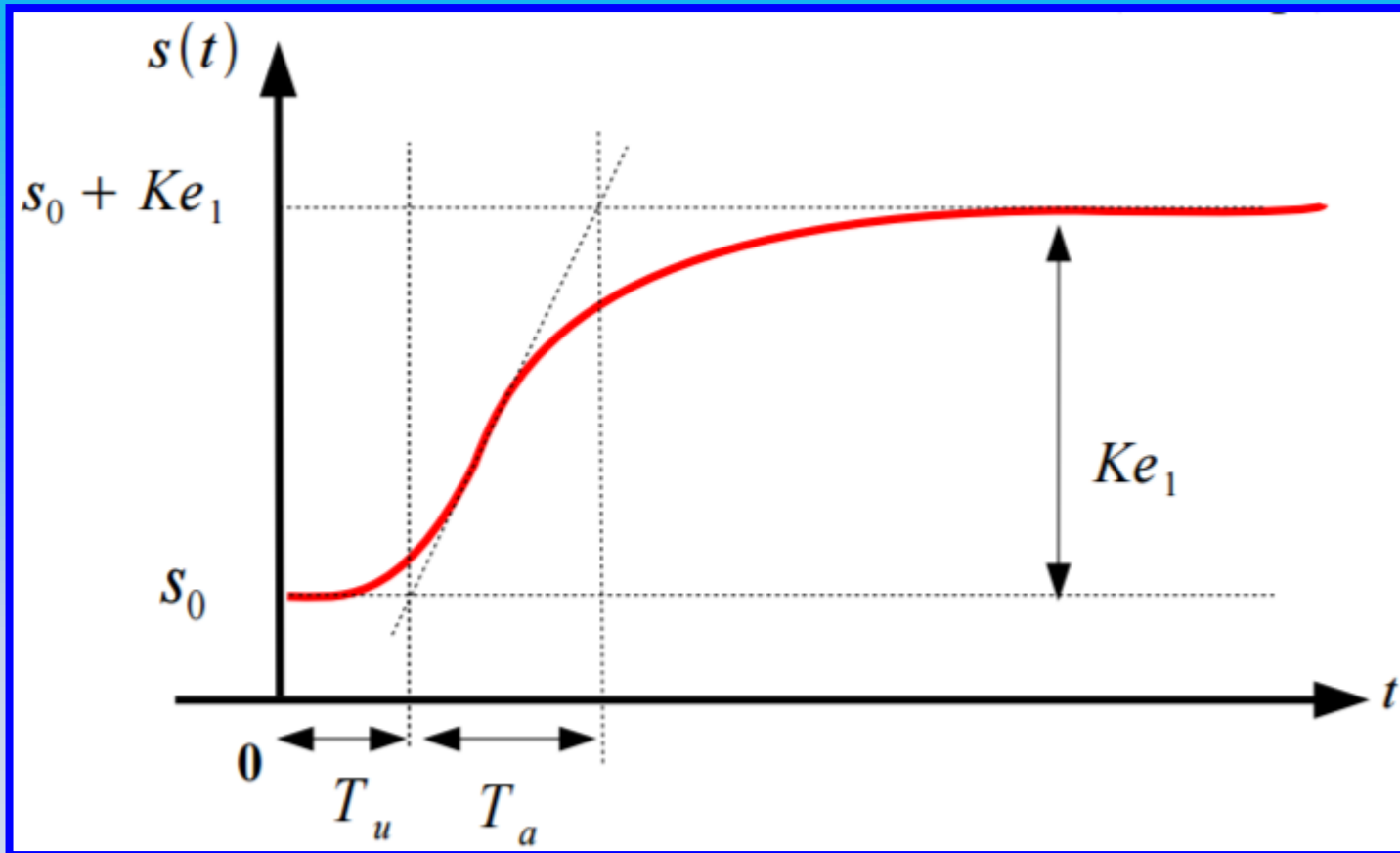
K: gain statique

Tr: retard pur

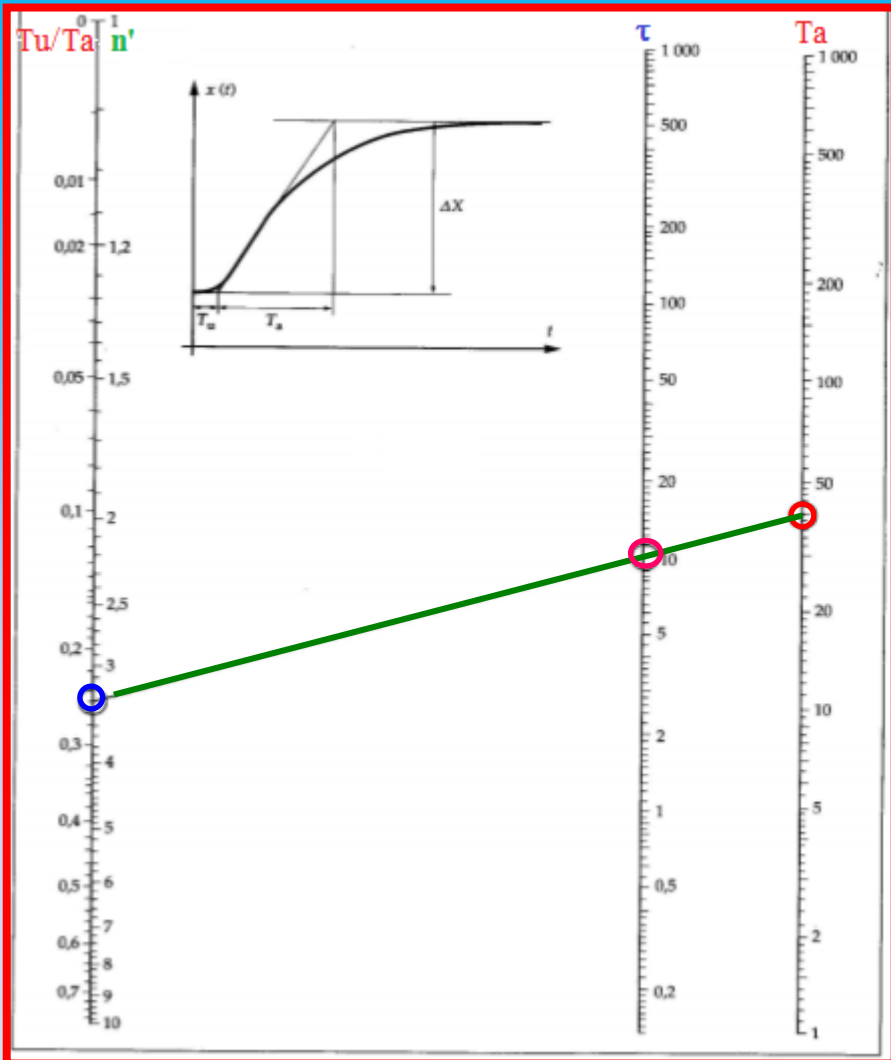
τ : constante de temps

n: ordre du système

**paramètres
à identifier**



Pour identifier les 4 paramètres précédents, on trace sur la réponse indicielle la tangente au point d'inflexion. Alors on aboutit aux deux temps **T_u** et **T_a** dont le rapport **T_u/T_a** permet de déterminer les paramètres à partir du **nomogramme de Strejc** (voir diapositive suivante).



Le rapport T_u/T_a détermine le point de l'axe vertical gauche du nomogramme, T_a donne le point de l'axe vertical droite.

Tracer la droite qui lit ces deux points.

L'intersection de cette droite et l'axe central permet d'avoir τ

L'intersection de cette droite et l'axe gauche permet d'avoir n' . Ainsi l'ordre du système sera identifié par $n = n' + \epsilon$, $0 < \epsilon < 1$ lorsque n' n'est pas entier.

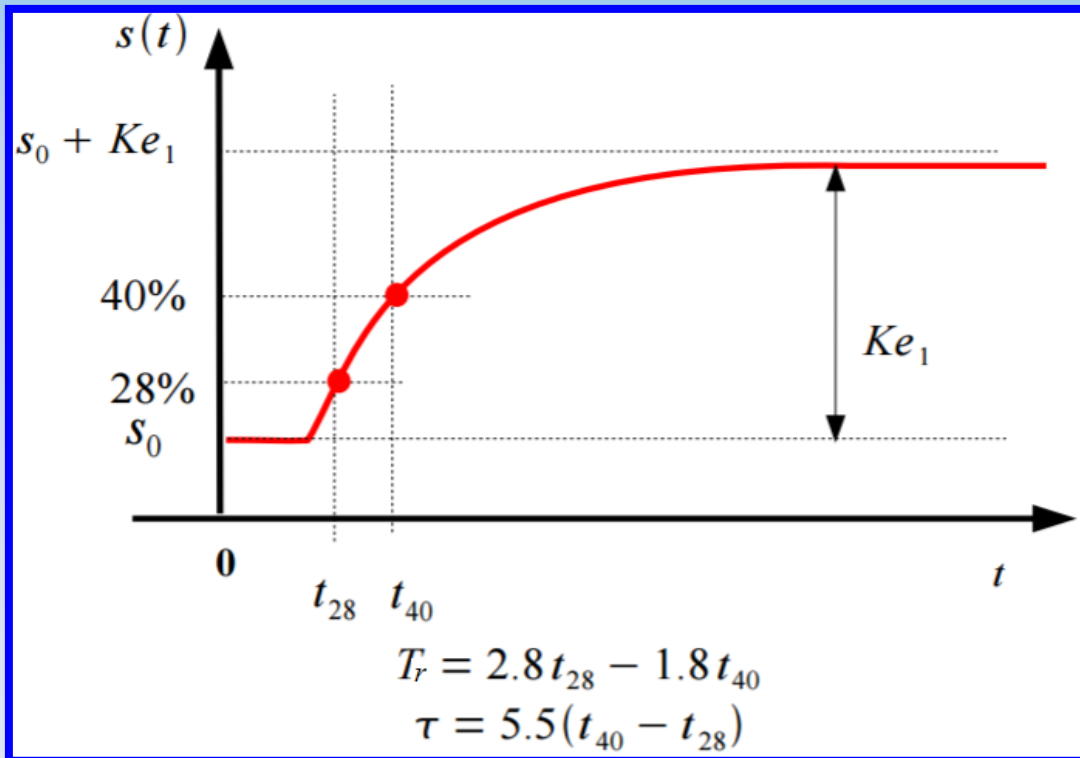
Finalement $T_r = \epsilon \cdot \tau$ et $K = (s_{finale} - S_0)/e1$

Nomogramme de Strejc

6.3. Méthode de Broïda

Elle consiste à assimiler le système à un **1er ordre** avec **retard pur** dont la fonction de transfert est de la forme:

$$H(p) = \frac{K e^{-Trp}}{1 + \tau p}$$



La méthode de Broïda n'est validée que si le rapport Tr/τ est **inférieur** à **0.25**.

6.4. Utilisation de la méthode de Broïda dans l'asservissement

La méthode de Broïda offre un moyen très utile à l'asservissement qui consiste à aider à déterminer le type de **correcteur** qu'il faut utiliser dans une commande en boucle fermée afin d'éliminer l'erreur statique entre le signal à commander et sa consigne (référence), ainsi que le **dimensionnement** de ses **coefficients**. Cela dépend de la valeur du rapport T_r/τ obtenu graphiquement.



Rapport T_r/τ

Type de correcteur

Coefficients

0.05 à 0.1

P

$$K_p = 100 / \left(\frac{125 K T_r}{\tau} \right)$$

0.1 à 0.2

PI

$$K_p = \frac{100}{\frac{125 \cdot K \cdot T_r}{\tau}} \text{ et } K_i = 1/\tau$$

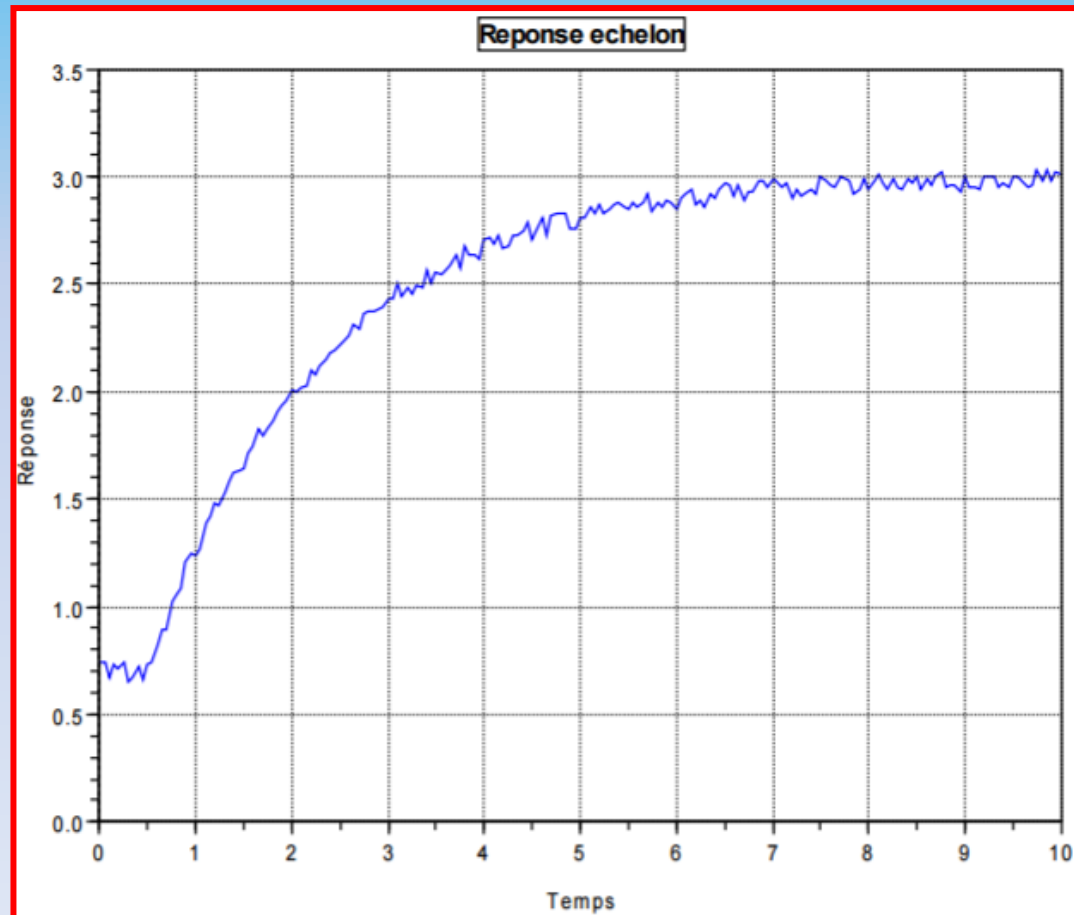
0.2 à 0.25

PID

$$K_p = 100 / \frac{120 K T_r}{(\tau + 0.4 \times T_r)}, K_i = 1 / (\tau + 0.4 \times T_r)$$
$$K_d = \frac{\tau \cdot T_r}{(T_r + 2.5 \times \tau)}$$

6.5. Exemple d'application (Exo1, Réf. 5, questions 2 et 3)

Soit un système représenté par sa réponse indicielle montrée dans la figure suivante. on se demande d'identifier graphiques ses paramètres K , T_r , τ et n par les méthodes de Broïda et Strejc.



K?
Tr?
 τ ?
N?

6.5.1. Identification par la méthode de Broïda

K?

$$K = (3 - S_0)/e, S_0 = 0.7V, e = 2V \rightarrow K = 1.15$$

Sfinale?

$$S_{\text{finale}} = K \cdot e + S_0 \rightarrow S_{\text{finale}} = 3V$$

$$S_{28} = 28/100 \cdot (S_{\text{finale}}) \rightarrow S_{28} = 0.84V,$$

$$t_{28} \text{? } t_{28} = 0.65s$$

$$S_{40} = 40/100 \cdot (S_{\text{finale}}) \rightarrow S_{40} = 1.2V,$$

$$t_{40} \text{? } t_{40} = 0.9s$$

Tr?

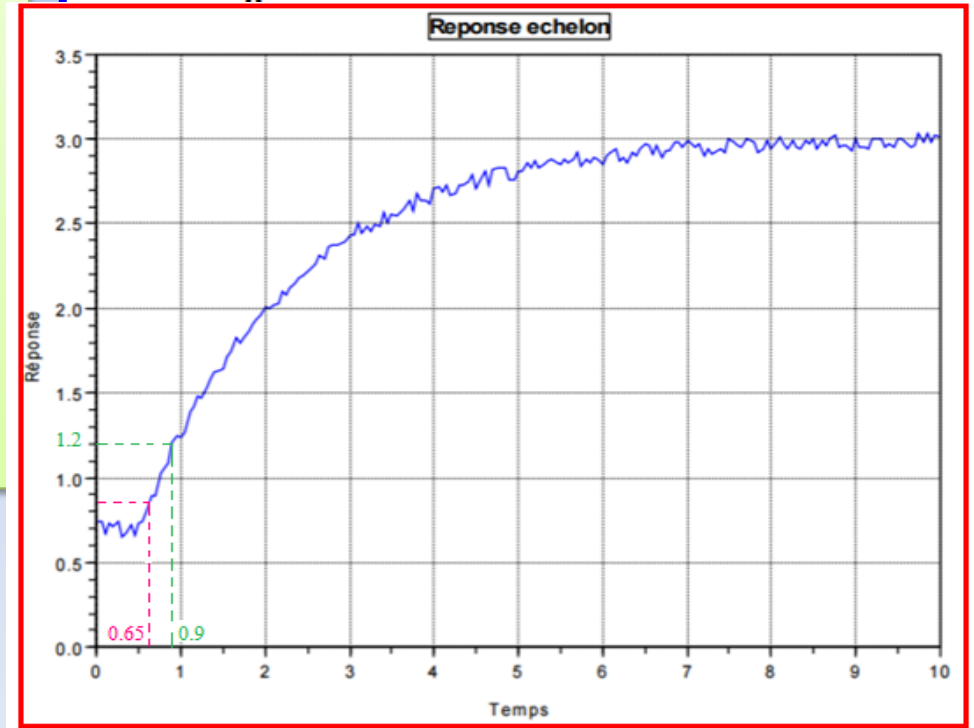
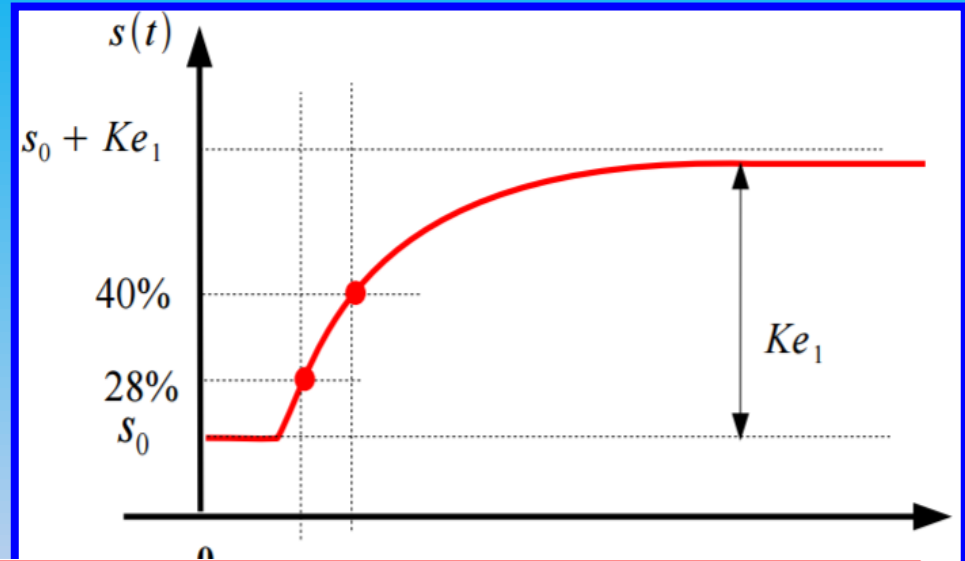
$$Tr = 2.8 \cdot t_{28} - 1.8 \cdot t_{40} \rightarrow Tr = 0.2s$$

τ ?

$$\tau = 5.5 \cdot (t_{40} - t_{28}) \rightarrow \tau = 1.375s$$

Validation Broïda?

$$Tr/\tau = 0.1455 \rightarrow \text{Valide}$$



6.5.2. Identification par la méthode de Strejc

$$K = 1.15$$

$$T_u = 0.5s$$

$$T_a = 2.7 - 0.5 = 2.2s$$

Nomogramme de Strejc

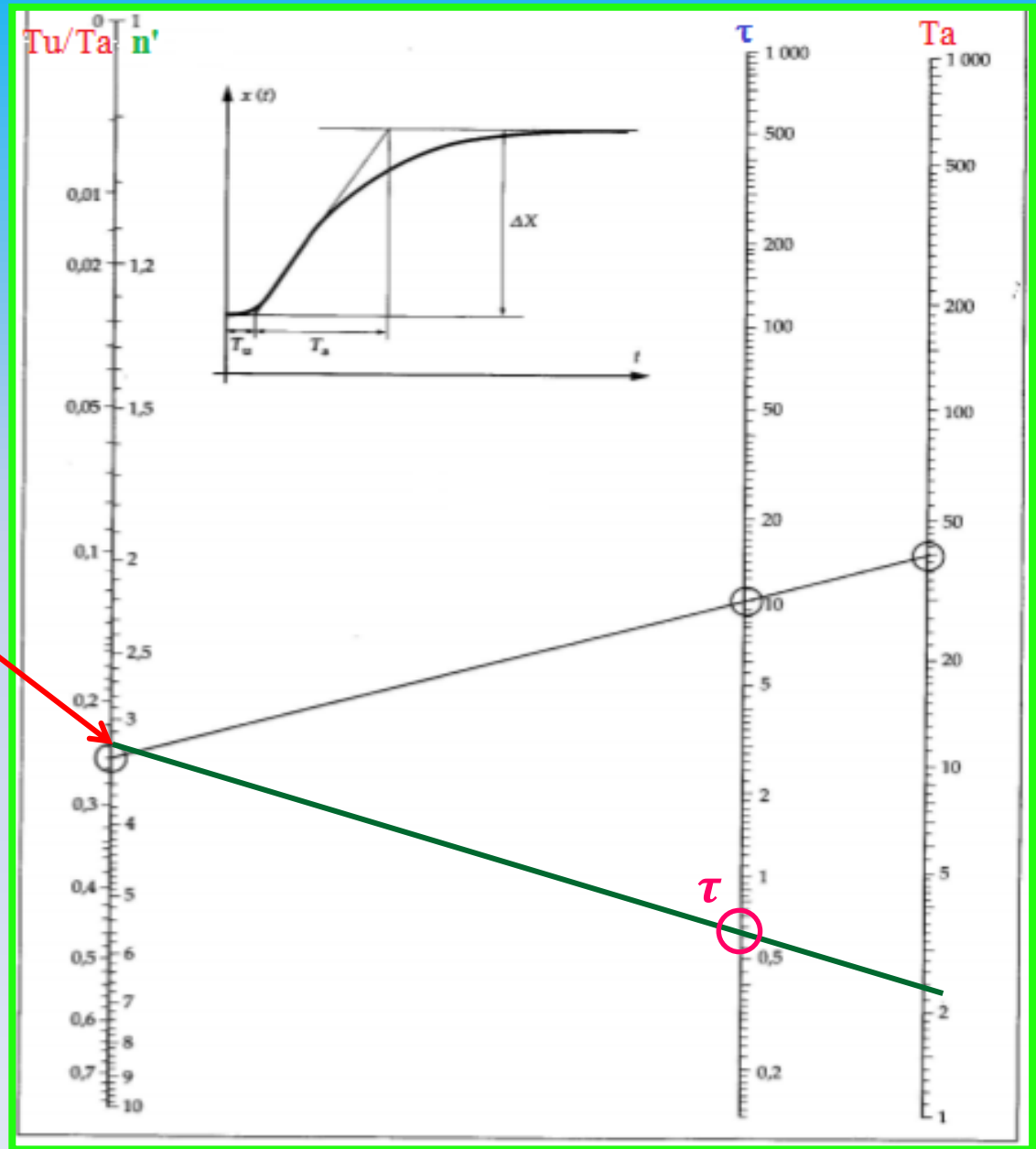
$$T_u/T_a = 0.2273$$

$$n' = 3.1 \rightarrow n = n' - 0.1 = 3$$

$$\tau = 0.6s \rightarrow Tr = 0.1 * 0.6 = 0.06s$$

Validation Broïda?

$$Tr/\tau = 0.1 \rightarrow \text{Valide}$$



Références bibliographiques

Chapitre 6

- [1] P. Bonnet, “ Modélisation Identification des processus”, Master ASE1-Identification des processus, Univ. Lille 1, 2010-2011.
- [2] “Travaux Pratiques Modélisation Identification des Processus”, USTL-Master ASE M1–2009/2010, Univ. Lille.
- [3] “Asservissement-Méthode de BROIDA ”, sitelec.org/download.php?filename=td_tp/broida.pdf.
- [4] E. Pigeon, “Travaux pratiques automatiques ”, Parcours S.I. L3 EEA - L3 IE – L3 EIA, Univ. Caen
- [5] P. Bonnet, “ Travaux dirigés d’identification”, Master ASE-Semestre 2, Commande Linéaire et Numérique, Univ. Lille 1.

Chapitre 7

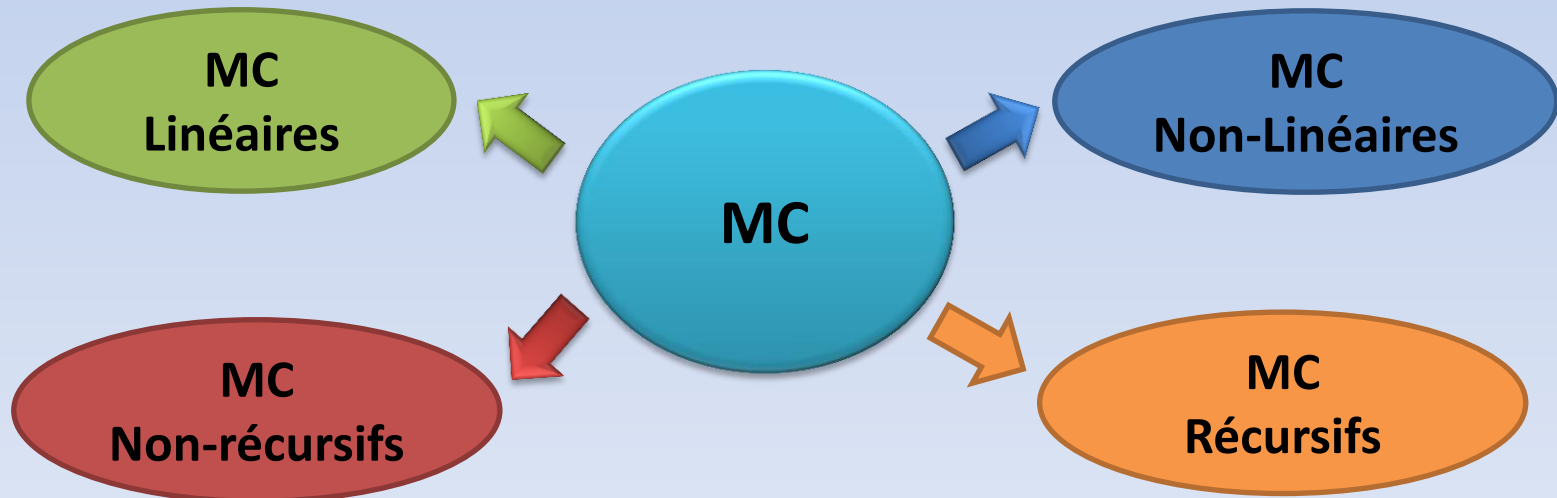
**Méthodes d'Identification
Numérique
(Non Récursives & Récursives)**

Chapitre 7 : Méthodes d'Identification Numérique

7.1. Introduction

Les méthodes numériques d'identification se divisent en deux catégories: non-récurrentes et récurrentes parmi elles les moindres carrés et le maximum de vraisemblance. Dans ce chapitre on se contentera de la méthode des moindres carrés.

7.2. Méthode des moindres carrés 'MC'



MC ?

Il s'agit de **rapprocher** un vecteur de mesures expérimentales $\mathbf{y}(t)$ en une fonction approchée $\mathbf{f}(t)$, telle que cette fonction assure l'**erreur quadratique** ϵ^2 la plus **petite** (**moindre carré**)

$$\epsilon^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{f})^t \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{f})$$

7.2.1. MC Linéaires

Dans le cas des MC linéaires, la fonction approchée $\mathbf{f}(t)$ est une droite d'expression:

$$f(t) = a \cdot t + b$$

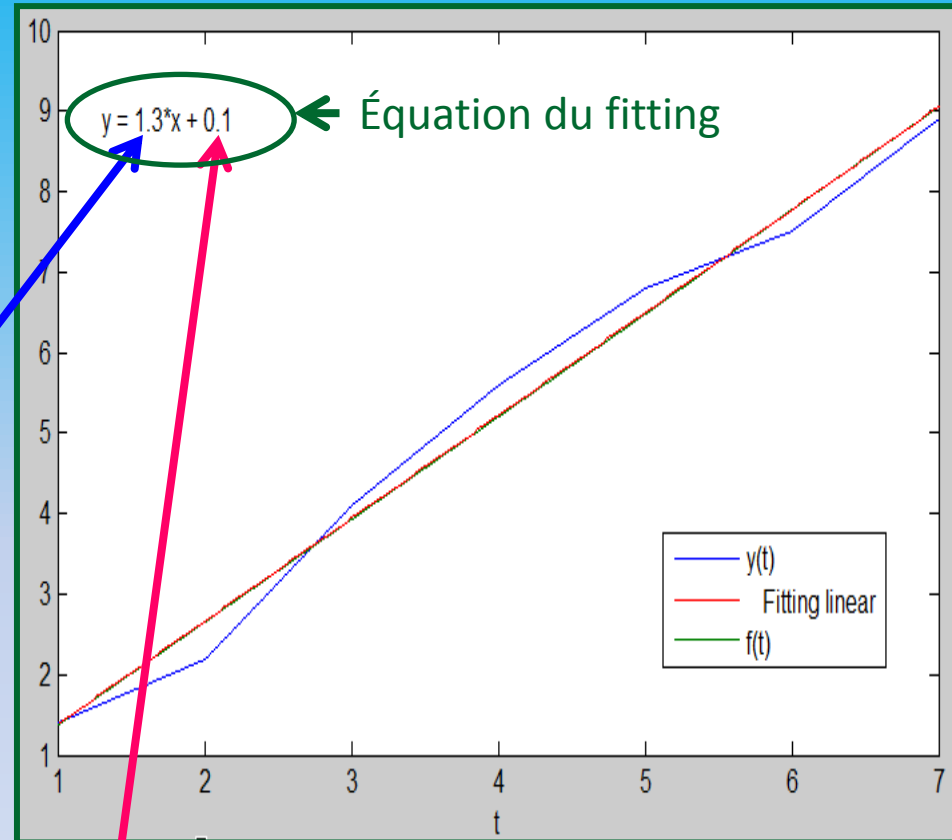
droite de regression

$$a = \frac{\text{cov}(y, t)}{\text{var}(x)}$$

$$b = E(y) - a \cdot E(t) \\ = y_{\text{moy}} - a \cdot t_{\text{moy}}$$

Exemple (Exo. 1 TD5)

```
t=[1;2;3;4;5;6;7];
y=[1.4;2.2;4.1;5.6;6.8;7.5;8.9];
s=0;
for i=1:length(t)
    ty=s+(t(i)-mean(t))*(y(i)-mean(y));
    covty=ty/(length(t)-1);
    s=ty;
end
a=covty/var(t)
b=mean(y)-a*mean(t)
%%fonction rattachée (droite de regression)
f=a*t+b;
%%Erreur quadratique cumulée
eps_carre=(y-f)'*(y-f)
%%tracé de y et f sur un même graphe
plot(t,y,t,f)
```



a =

1.2786

b =

0.1000

eps_carre =

0.5757

7.2.2. MC Non-Linéaires

Dans le cas des MC non-linéaires, la fonction rapprochée $f(t)$ n'est pas une fonction linéaire. Alors et selon la forme de $y(t)$, on déduit la fonction $f(t)$ et on cherche les paramètres par le moyen des **dérivées partielles** (la **jacobienne**).

Jacobienne = $\frac{\partial f}{\partial \theta}$, θ est le vecteur des paramètres à identifier

MC non-linéaires **non-récurrents**

$$\hat{\theta} = (J^t \cdot J)^{-1} \cdot J^t \cdot y$$

f_{min} est obtenue pour $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

ε_{min}^2 est obtenu pour $\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial \theta} = 0$

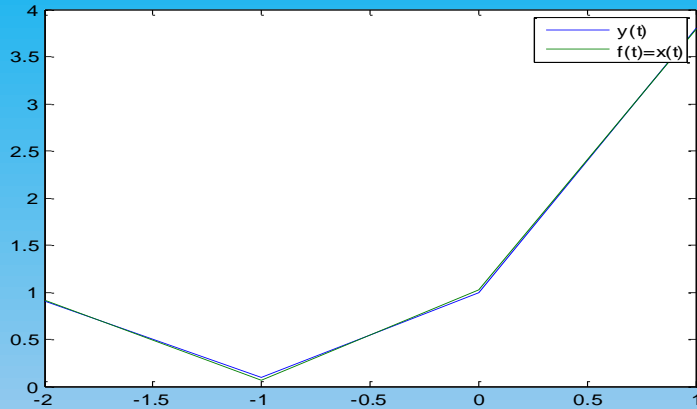
MC non-linéaires **récurrents**

$$\hat{\theta} = (J^t \cdot J)^{-1} \cdot J^t (y - f_0)$$

f_0 est la fonction f pour les valeurs initiales $\hat{\theta}_0$

lors de la 2ème itération $\hat{\theta}_0 = \hat{\theta}$
Et ainsi de suite jusqu'à obtenir ε^2 le plus petit

Exemple MC non-linéaires non-récurrents (Exo. 2 TD6)



Fonction approchée

$$f(t)=x(t)=c_0+c_1.t+c_2.t^2$$

```

%%%TD 6 exo 2 moindres carrés non-linéaires non-récurrents
i=[1 2 3 4]';
ti=[-2 -1 0 1]';
yi=[0.9 0.1 1 3.8]';
%%%Question 1: tracé de la courbe de mesures expérimentale
% plot(ti,yi)
%%%Question 2:identification des paramètres c0 c1 c2 du modèle xi(ti)
%%%Jacobienn J
J=[1 -2 4;1 -1 1;1 0 0;1 1 1];
theta=inv(J'*J)*J'*yi;
c0=theta(1)
c1=theta(2)
c2=theta(3)
%%%Calcul de l'erreur quadratique cumulée
%%%Modèle xi(ti)
xi=c0+c1*ti+c2*ti.^2;
plot(ti,yi,ti,xi)

```

```

%%%verification des sommes de l'erreur
s=0;
for j=1:4
    epsilon=(yi(j)-xi(j));
    eps1=s+epsilon;
    s=eps1;
end
s1=0;
for j=1:4
    epsilon1=(yi(j)-xi(j))*ti(j);
    eps2=s1+epsilon1;
    s1=eps2;
end
s2=0;
for j=1:4
    epsilon2=(yi(j)-xi(j))*ti(j).^2;
    eps3=s2+epsilon2;
    s2=eps3;
end

```

Résultats

```
%%%identification des parametres c0 c1 c2 %%%%%%%%%%%  
syms C0 C1 C2  
eq1=C0-2*C1+4*C2-0.9;  
eq2=C0-C1+C2-0.1;  
eq3=C0+C1+C2-3.8;  
J=jacobian([eq1,eq2,eq3],[C0,C1,C2]);  
[C0,C1,C2]=solve(eq1,eq2,eq3);  
%%%Question 4: determination de xchapeau et Jmin  
%%%par moindres carrés  
xchapeaul=c0+c1*ti+c2*ti.^2;;  
%%%par résolution système des 3 équations  
xchapeau2=C0+C1*ti+C2*ti.^2;  
%%%Jmin?  
J1=[1 -2 4;1 -1 1;1 0 0;1 1 1];  
Jmin=min(J1)  
%%%Question 5:Recherche de xchapeau min et tmin pour avoir le minimum  
syms tmin  
eq4=C1+2*tmin*C2;  
tmin=solve(eq4)  
xmin=C0+C1*tmin+C2*tmin^2
```

```
c0 =  
1.0300  
c1 =  
1.8600  
c2 =  
0.9000  
C0 =  
16/15  
C1 =  
37/20  
C2 =  
53/60  
Jmin =  
1 -2 0  
tmin =  
-111/106  
xmin =  
1247/12720
```

Exemple MC non-linéaires récursifs (Exo. 2, TD5 extrait de [2])

Exemple d'application : soit un système du 1er ordre dont désire connaître les paramètres caractéristiques (gain et constante de temps) par l'observation de la réponse indicielle.

Temps en s	0	1	2	3	4	5
y(t)	0.05	0.45	0.59	0.64	0.64	0.69

L'observation directe montre que le gain (*valeur finale*) est proche de 0.7 et la constante de temps de l'ordre de la seconde (*échelle de temps*)

Le modèle de la réponse indicielle est : $f(t, \theta) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ avec $\theta = [K, \tau]^t$

La matrice du Jacobien est construite à partir des dérivées partielles de f par rapport à θ

$$\frac{\partial f(t, \theta)}{\partial K} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \frac{\partial f(t, \theta)}{\partial \tau} = -K \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Il faut fixer une valeur initiale de K et θ pour donner une valeur à la matrice Jacobienne

Valeurs initiales proposées : $K_0 = 1 \quad \tau_0 = 1$

La matrice Jacobienne est : $J(\theta_0) = \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0.63 & -0.37 \\ 0.86 & -0.27 \\ 0.95 & -0.15 \\ 0.98 & -0.07 \\ 0.99 & -0.03 \end{bmatrix}$ les valeurs du modèle : $F(\theta_0) = \begin{bmatrix} 0. \\ 0.63 \\ 0.86 \\ 0.95 \\ 0.98 \\ 0.99 \end{bmatrix}$

L'erreur quadratique cumulée est de : $\mathcal{E} = 0.42$

L'incrément à faire sur les paramètres est : $\delta_\theta = (J^T J)^{-1} J^T (Y - F(\theta_0)) = \begin{bmatrix} -0.33 \\ -0.06 \end{bmatrix}$

La nouvelle valeur des paramètres est : $\theta_1 = \begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.94 \end{bmatrix}$

Après 10 itérations , la valeur des paramètres converge vers : $\theta_{10} = \begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.92 \end{bmatrix}$

L'erreur quadratique cumulée est de : $\mathcal{E} = 0.0035$

7.2.3. MC Non-récurrents avec entrée u connue

Dans ce cas, on utilise la matrice H au lieu de la jacobienne J telle que H est donnée par (cas d'un système non stochastique):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(N) \\ y(N-1) \\ \dots \\ y(p+1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -y(N-1) & y(N-2) & \dots & -y(N-p) & u(N) & \dots & u(N-q) \\ -y(N-2) & y(N-3) & \dots & -y(N-p-1) & u(N-1) & \dots & u(N-q-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(p) & -y(p-1) & \dots & -y(1) & u(p+1) & \dots & u(p+1-q) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_p \\ b_0 \\ \dots \\ b_q \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}}$$



$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}^t \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{H}^t \cdot \mathbf{y}$$

Exemple MC non-récurrents (Exo. 3, question 1, TD5 extrait de [3])

```
clear all
clc
%ref:«Travaux Pratiques Modélisation Identification des Processus», USTL-Master ASE M1-2009/2010, Univ.
% La dimension de theta est celle du nombre total de paramètres inconnus (a1, a2 et b1 dans cet exemple)
Y=[0 0.1 1.8 0.9 1.1 0.95 0.97 0.99 1.02 1.01 ]';
% L'entrée est supposée être un échelon unitaire.
U=ones(10,1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Methode des moindres carrés non-récurrents%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Méthode directe: construction de la matrice H puis calcul de la pseudo-inverse theta
for i = 3:size(Y,1)
    H(i,:) = [-Y(i-1) -Y(i-2) U(i-1)];
end
theta = inv(H'*H)*H'*Y;
```

Résultats

```
>> theta
theta =

    0.5336
    0.2114
    1.7947
```

7.2.4. MC récurrents avec entrée u connue

Dans ce cas aussi on utilise la matrice H au lieu de la jacobienne J mais la détermination des paramètres du vecteur θ se fait par **récence** (l'itération k appelle l'itération précédente k-1, la k+1 appelle la k et ainsi de suite jusqu'à avoir la moindre erreur quadratique carrée cumulée.

$$R(k) = \lambda.R(k-1) + H.H^t, (R^{-1} = P)$$

R est la matrice inverse de la covariance P entre y et \hat{y} , λ est le facteur d'oubli ($0 < \lambda < 1$) qui tient compte des variations des paramètres avec le temps.

Identité de Woodbury (Lemme)

Si on a une expression telle que : $A = B^{-1} + C \cdot D^{-1} \cdot C^t$, alors son inverse est donnée par : $A^{-1} = B - B \cdot C \cdot (D + C^t \cdot B \cdot C)^{-1} \cdot C^t \cdot B$

par identification avec notre cas, on a : $A = R(k)$, $B^{-1} = \lambda \cdot R(k-1)$, $C = H$, $D = 1$

$$R(k)^{-1} = \lambda \cdot R(k-1)^{-1} - \lambda \cdot R(k-1)^{-1} \cdot H \cdot (1 + H^t \cdot \lambda \cdot R(k-1)^{-1} \cdot H)^{-1} \cdot H^t \cdot \lambda \cdot R(k-1)^{-1}$$

$$P(k) = \lambda \cdot P(k-1) - \underbrace{\lambda \cdot P(k-1) \cdot H / (1 + H^t \cdot \lambda \cdot P(k-1) \cdot H)}_{L} \cdot H^t \cdot \lambda \cdot P(k-1)$$

L : Gain du filtre de Kalman

Équation de Ricatti

$$\theta(k) = \theta(k-1) + L \cdot (y - H^t \cdot \theta(k-1))$$

$$P(k-1) = P_0$$

$$\theta(k-1) = \theta_0$$

Vecteur nul si les paramètres off-line sont inconnus

Vecteur paramètres off-line s'ils sont inconnus

Matrice carrée diagonale d'éléments de valeur grande afin d'éviter la divergence

Exemple précédent mais avec MC récursifs (Exo. 3, question 2, TD5 extrait de [3])

```
%%%%%%%%%%%%%%Methode des moindres carrés recursifs%%%%%%%%%%%%%%
%%Initialisation
theta0= [0 0 0]';
P0=1000*eye(3);
%%identification des paramètres
for i = 3:size(Y,1)
    H1=[-Y(i-1) -Y(i-2) U(i-1)]';
    L = P0*H1/(1+H1'*P0*H1);%Gain du filtre de Kalman
    P1 = P0 - L*H1'*P0;%Equation de Ricatti
    theta1=theta0 + L*(Y(i) - H1'*theta0);
%%Réinitialisation
    P0=P1;
    theta0=theta1;
end
```

```
>> theta1
```

```
theta1 =
```

```
    0.5321
```

```
    0.2107
```

```
    1.7923
```

Résultats

Références bibliographiques

Chapitre 7

[1] «Méthode des moindres carrés : chapitre 5», math.unice.fr/~diener/MAB07/MCO.pdf.

[2] P. Bonnet, «Moindres-carrés non-linéaire», Master ASE1-Identification des processus, Univ. Lille 1.

[3] «Travaux Pratiques Modélisation Identification des Processus», USTL-Master ASE M1–2009/2010, Univ. Lille.

[4] J. Benesty, «Algorithme des moindres carrés récurrents– MCR (Recursive Least-Squares – RLS)», INRS-EMT.

[5] M. Gaiceanu *et al.*, «On-line identification of the DC motor parameters by using the least mean square recursive method», ANALELE UNIVERSITĂȚII “EFTIMIE MURGU” REȘIȚA ANUL XXI, NR. 3, pp. 85-96, 2014, Romania, anale-ing.uem.ro/2014/308.pdf.

Chapitre 8

Estimation & Observation

(Le filtre de Kalman)

Chapitre 8 : Observation & Estimation

8.1. Introduction

L'intérêt de l'observation et de l'estimation d'un système est de la reconstruction de l'état non mesurable à partir du modèle dynamique du système et à base des paramètres identifiés (cf. Chapitres 5 à 7). Le problème de l'estimation consiste à vouloir découvrir la loi d'un phénomène aléatoire à partir d'observations répétées tout en supposant connu le type de loi et inconnus les paramètres. L'estimateur est sensé pouvoir identifier les paramètres tout en assurant une erreur quadratique cumulée la plus moindré.

8.2. Observateur d'état

Un observateur d'état est une extension d'un modèle représenté sous forme de système d'état. Lorsque l'état d'un système n'est pas mesurable, on conçoit un observateur qui permet d'estimer l'état à partir d'un modèle du système dynamique et des mesures d'autres grandeurs.

8.2. 1. Observateur déterministe

Il est applicable à un système d'état sans considération des bruits d'état et de mesure (système non-stochastique ou système déterministe).

Le système est représenté par l'équation d'état

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Système
déterministe

Approximation du système

Supposons que le système peut être approximé comme suit

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L} \left(\mathbf{y}(t) - \underbrace{\mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)}_{\hat{\mathbf{y}}(t)} \right)$$

Cette approximation est appelée '**Observateur d'état déterministe**'

Exemples d'observateurs: Luenberger, Gopinath,...

8.3. Observateur stochastique

C'est un observateur d'état qui se base sur un système d'état qui tient compte des bruits d'état et de mesure.

Le système est représenté par l'équation d'état

Système
stochastique

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{M}w(t)$$
$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + v(t)$$

Bruit de mesure
de même taille
que y qui tient compte
des erreurs de mesures
(ex. capteurs)

Matrice de taille
 $q \times q$
(souvent matrice identité I)

Bruit d'état de taille
 q qui tient compte
des erreurs de
modélisation

Les bruits d'état et de mesure sont supposés être non corrélés. Ce sont des bruits blancs uniformes ou gaussiens

Uniforme : de valeurs >0

gaussien: de valeurs
positives et négatives

MATLAB: $\text{bruit}(t) = A_m \cdot \text{rand}(1, N)$

MATLAB: $\text{bruit}(t) = A_m \cdot \text{randn}(1, N)$

Amplitude du bruit

Nombre d'échantillons = période
d'observation/temps d'échantillonnage

8.4. Le Filtre de Kalman

8.4.1. Principe du Filtre de Kalman

C'est un observateur d'état non déterministe (stochastique) qui minimise l'erreur d'estimation et y et son estimé tout en filtrant le bruit. Il permet en outre l'estimation de x et y , l'indentification on-line des paramètres du système (cf. au chapitre 6).

Son gain se calcule par: $L = P \cdot C^t \cdot R^{-1}$, $R = \text{cov}(v(t))$

P est la covariance et se calcule par l'équation de *Ricatti*:

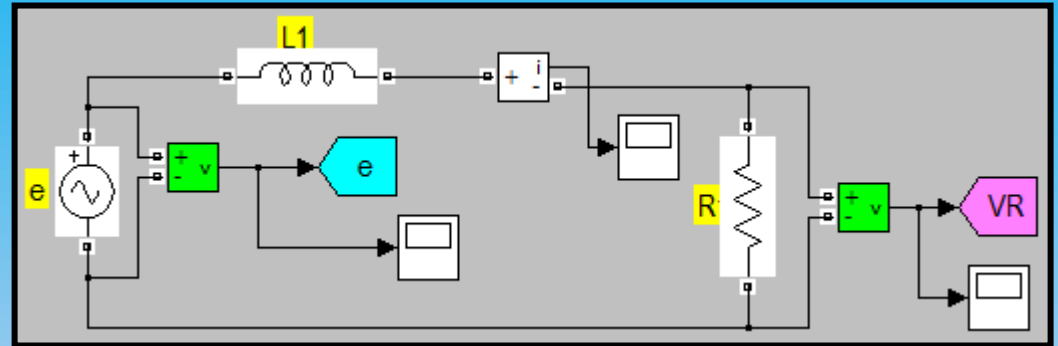
$$\dot{P} = A \cdot P + P \cdot A^t + P \cdot C^t \cdot R^{-1} \cdot C \cdot P + M \cdot Q \cdot M^t, Q = \text{cov}(w(t))$$

\hat{x} est alors déduite de:

$$\dot{\hat{x}} = A \cdot \hat{x} + B \cdot u - L \cdot (y - \hat{y})$$

Exemple d'un filtre de Kalman réalisé sur un circuit RL dans MATLAB/Simulink

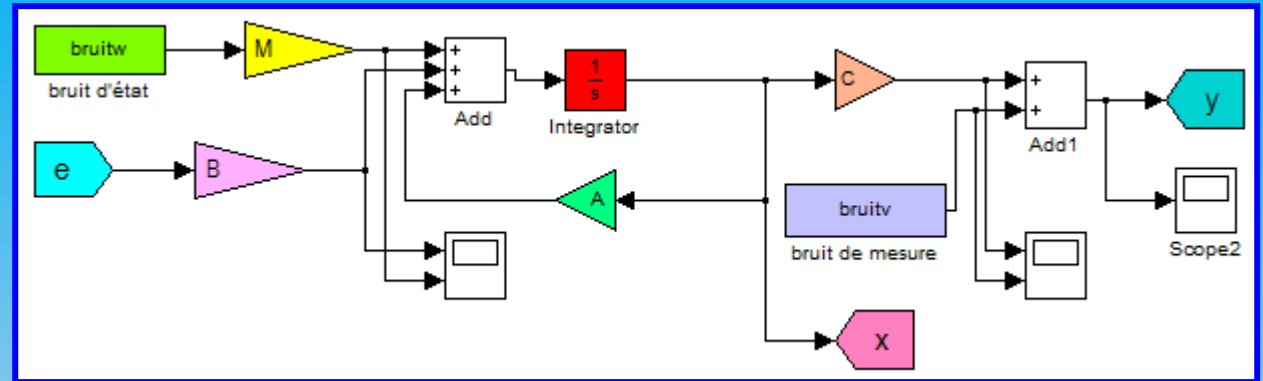
Système RL considéré
 $E_{sm}=230*\sqrt{2}V, f=50Hz,$
 $R1=4\Omega, L1=10mH$



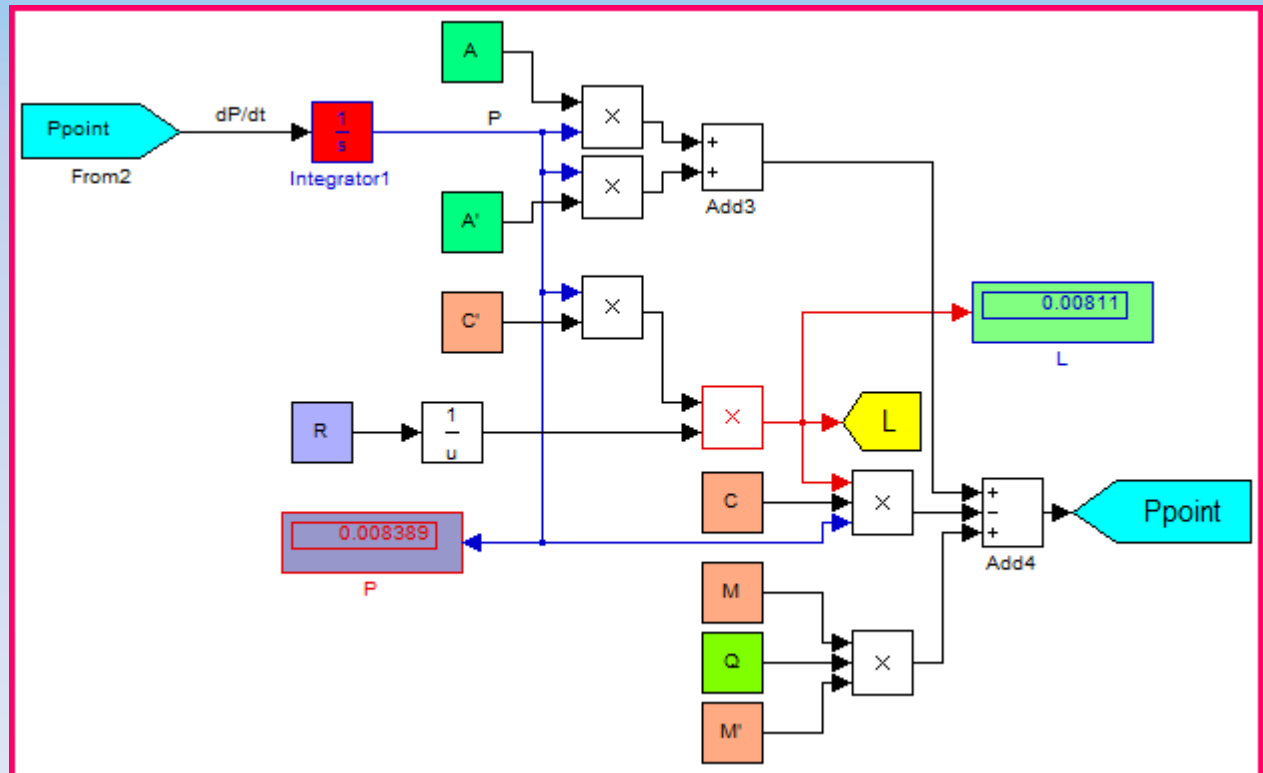
```
clear all
clc
Ts=1e-3;
dt=Ts;d=0.2;
t=dt:dt:0.2;
%%%%%% nombre d'echantillons %%%
N=d/dt;
%bruits blancs gaussiens de mesure et d'état%
%%bruit de mesure
x=0.8*randn(1,N);
%%bruit d'état
y=2.2*randn(1,N);
bruitv=[t',x'];
bruitw=[t',y'];
%%covariances des bruits
Q=cov(x);R=cov(y);
```

Programmation des
bruits et de leurs
covariances dans
MATLAB

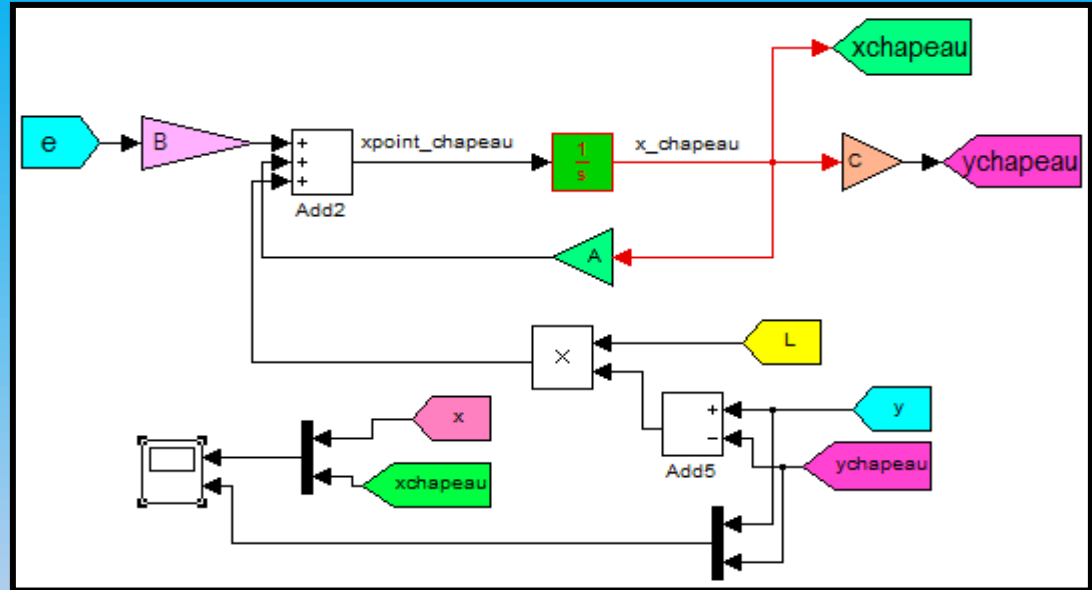
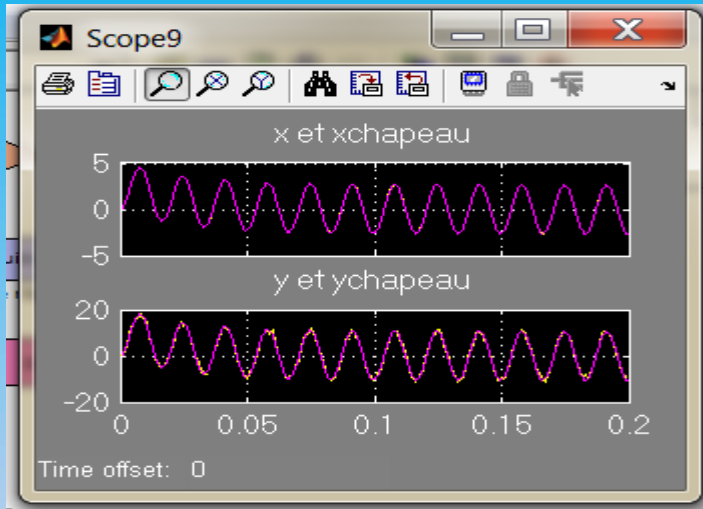
$A=-R1/L1, B=1/L1, C=R1$



Calcul du gain du filtre de Kalman et de la covariance P

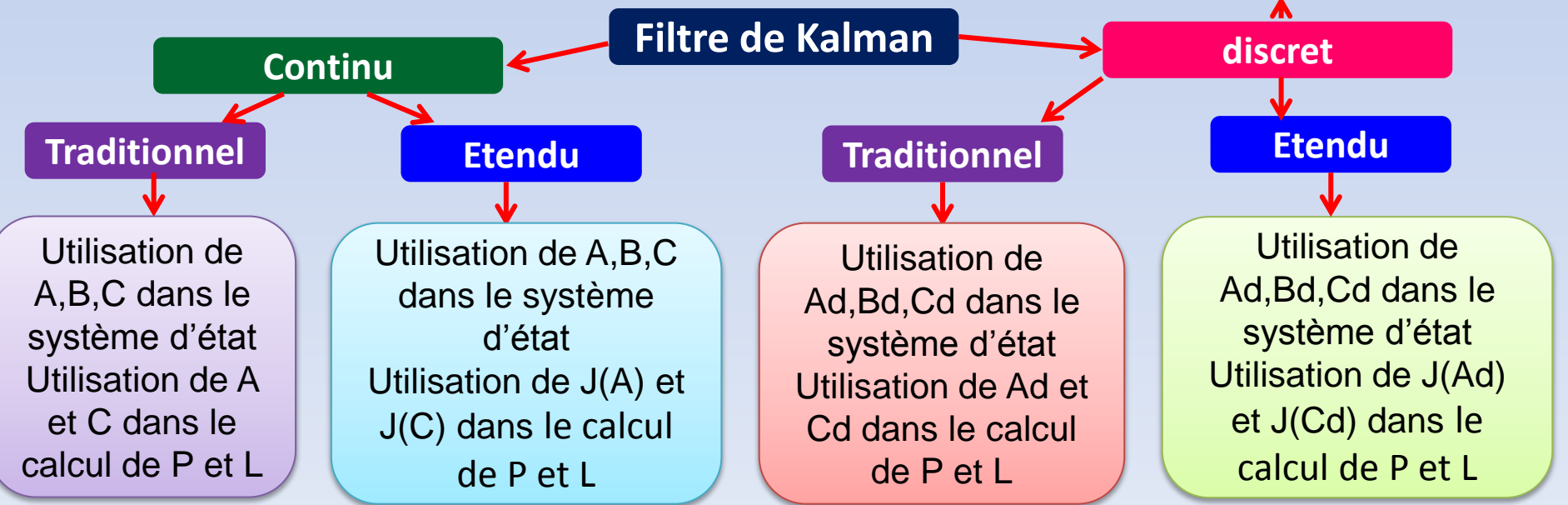


Estimation de \hat{x} et de \hat{y}



8.4.2. Quelques types de Filtres de Kalman

$$A_d = e^{A.T_s}, B_d = B.T_s, C_d = C, R_d = \frac{R}{T_s}, Q_d = M.Q.M^t$$



Références bibliographiques

- [1] G. Gautier, "Observateur d'état," École de technologie supérieure, Département de génie de la production automatisée, 25 juin 2014
- [2] D. Alazar, "Introduction au filtre de Kalman," Notes de cours, SUPAERO 2006.
- [3] S. L. Kay, "Traitement Numérique des Signaux Aléatoires", Lecture Notes, Chapter 5, tcts.fpms.ac.be/cours/1005-03/traitsig5.pdf