

3e année licence électromécanique

Régulation industrielle

Chapitre I

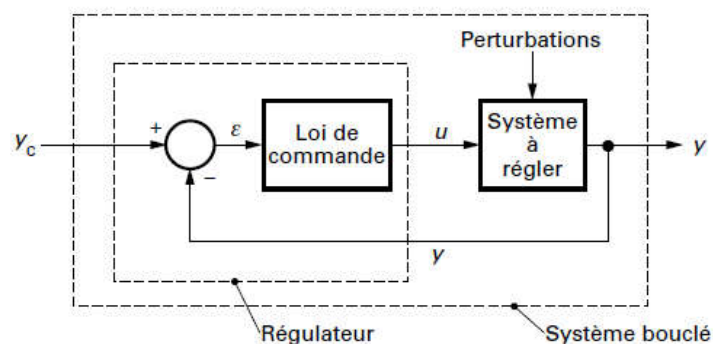
I. 1. Introduction à la régulation industrielle :

La **régulation automatique** est l'ensemble des techniques qui permettent de contrôler une grandeur physique (température, vitesse, pression), sans intervention humaine, pour la maintenir à une valeur donnée, appelée consigne. C'est une branche de l'automatisme.

Ces techniques ne sont pas seulement un moyen de commander des processus mais aussi un moyen de réduire les pertes de production, d'augmenter la qualité et la quantité des produits, d'augmenter la disponibilité des unités et de diminuer les coûts marginaux de production.

Un automatisme bien pensé, surtout si son étude intervient en amont de la conception des unités de production, aura une implication économique importante.

La régulation des procédés industriels regroupe l'ensemble des moyens matériels et techniques mis en œuvre pour maintenir une **grandeur physique à régler**, égale à une valeur désirée, appelée **consigne**. Lorsque des **perturbations** ou des changements de consigne se produisent, la régulation provoque une action correctrice sur une grandeur physique du procédé, appelée **grandeur réglante** (ou **commande**). La figure suivante représente la boucle de régulation de base.



La conduite d'un procédé industriel (opération chimique, physico-chimique, mécanique ou électrique) implique la connaissance et la maîtrise de certains paramètres tels que la pression, la température, le débit, la vitesse, etc. ...

Nous sommes donc amenés à effectuer des mesures pour obtenir certaines connaissances indispensables avant d'entreprendre une quelconque action.

En salle de contrôle on peut accéder à ces informations sur des indicateurs, des enregistreurs, des écrans, etc. ...

De façon analogue, les commandes nécessaires à la conduite du procédé s'effectuent soit sur le site, à proximité de l'appareillage, soit à partir de la salle de contrôle-commande, en manuel ou de façon automatique, programmé sur des ordinateurs (régulation numérique).

L'objectif global de la régulation peut se résumer par ces trois mots clefs :

- ➔ mesurer ;
- ➔ comparer ;
- ➔ corriger.

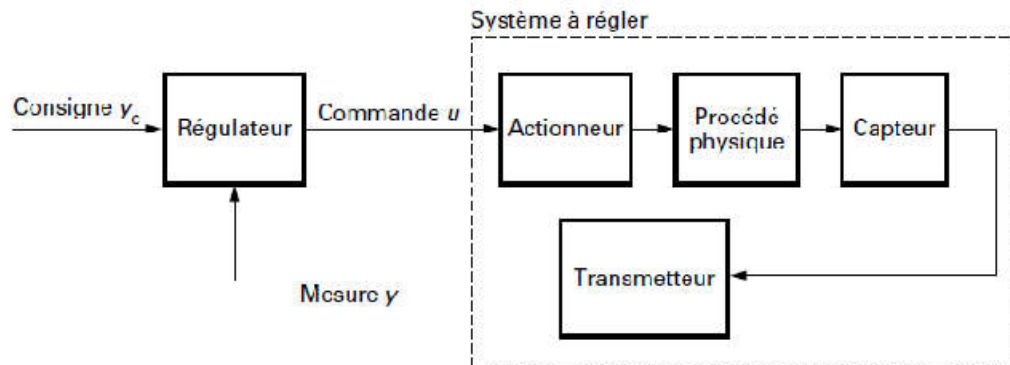
Une boucle de régulation doit comporter au minimum les éléments suivants :

- ➔ un capteur de mesure ;
- ➔ un transmetteur souvent intégré au capteur ;
- ➔ un régulateur ;

- ➔ un actionneur.

Elle est souvent complétée par :

- ➔ un enregistreur ;
- ➔ des convertisseurs ;
- ➔ des sécurités.



I. 2. Éléments constitutifs d'une boucle de régulation :

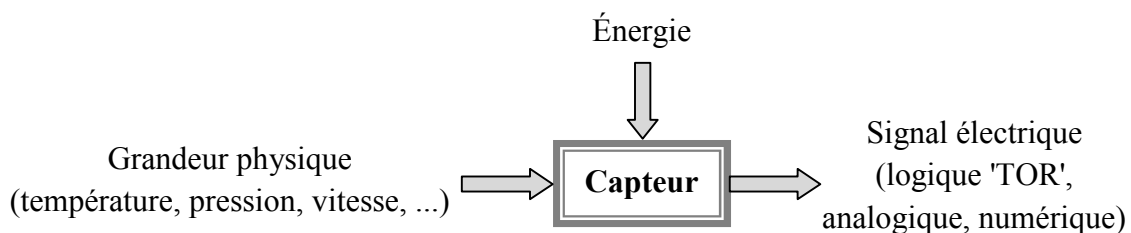
Une chaîne de régulation est formée d'une cascade d'appareils qui doivent être compatibles entre eux, tant du point de vue électrique que du point de vue précision et échelle de mesure.

I. 2. 1. Transmetteur de mesure (transducteur) :

Son rôle est de transformer la mesure physique en un courant (ex : 4-20 mA) ou une tension (ex : 0-10 V) moins sensibles aux parasites. Le transmetteur peut faire partie intégrante du capteur. Il peut également conditionner le signal (par exemple, filtrage, compensation de soudure froide pour un thermocouple).

I. 2. 2. Capteur :

Un capteur est un organe de prélèvement d'information qui élabore à partir d'une grandeur physique, une autre grandeur physique de nature différente (très souvent électrique). Cette grandeur représentative de la grandeur prélevée est utilisable à des fins de mesure ou de commande. La précision et la rapidité sont deux caractéristiques importantes du capteur.



I. 2. 3. Actionneur :

L'actionneur est l'élément qui actionne le système à contrôler pour l'amener d'un état donné vers l'état souhaité. Il travaille souvent à puissance élevée. Les signaux de commandes sont en général faibles et servent à exciter des systèmes de puissances. Par exemple, le signal de commande d'une gâchette d'un MOSFET d'un hacheur est faible mais qui permet de libérer beaucoup d'énergie qui permet d'augmenter ou de diminuer la tension moyenne à la sortie du hacheur.

I. 2. 4. régulateur :

Le régulateur se compose d'un comparateur qui détermine l'écart entre la consigne et la mesure et d'un correcteur qui élabore à partir du signal d'erreur l'ordre de commande.

I. 3. Critères de performance d'une régulation :

Les critères permettant de qualifier et quantifier les performances d'un système asservi sont: la stabilité, la précision et la rapidité.

L'asservissement idéal est un système ayant une bonne stabilité et bonne précision, le régime transitoire doit être rapide et bien amorti. Ces critères de performances ne sont pas toujours compatibles. Par exemple en mécanique, un processus rapide est léger, il a ainsi une faible inertie et risque d'être peu amorti voire instable. D'autre part si on veut améliorer la précision, on raidit l'asservissement et on risque de tomber alors sur un phénomène d'instabilité. Tout l'art de l'automaticien est de réaliser une partie commande permettant de respecter au mieux ces critères.

I. 3. 1. La stabilité (degré de stabilité) :

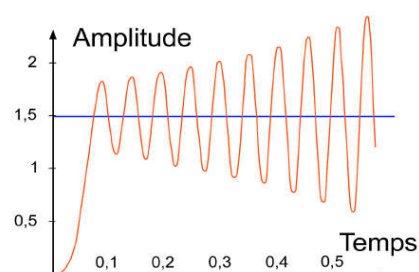
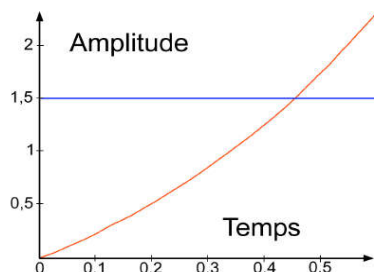
Un système est stable si pour un signal d'entrée borné, la sortie reste bornée. Le bouclage d'un système peut rendre celui-ci instable.

Un système est stable si sa réponse libre (équation différentielle sans second membre) tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

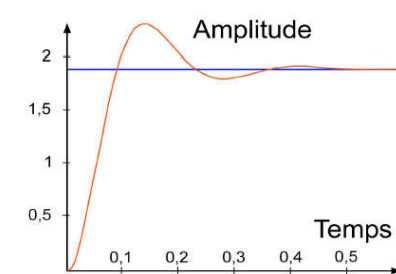
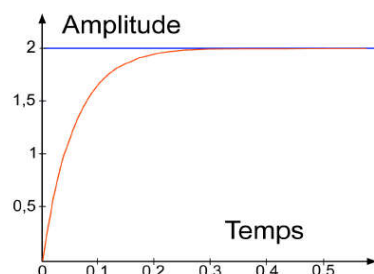
La condition générale de stabilité est donc que les pôles de la fonction de transfert globale du système soient à partie réelle strictement négative.

Ce critère est une condition de stabilité mais ne permet pas de quantifier la qualité de cette éventuelle stabilité.

Les courbes ci-dessous illustrent les deux cas de figure.



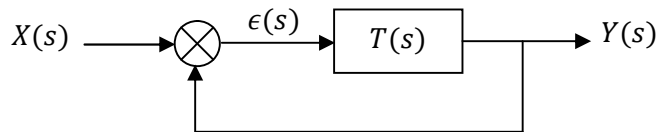
Systèmes instables (sollicitation échelon)



Systèmes stables (sollicitation échelon)

I. 3. 2. Précision d'un système asservi :

La précision est caractérisée par la différence entre la valeur désirée (la consigne) $x(t)$ et la sortie $y(t)$. On parle de précision statique et de précision dynamique.



- la précision statique c'est l'écart en régime permanent entre la sortie et l'entrée et se note généralement $\varepsilon(t)$ ($\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$).
- la précision dynamique c'est l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire suivant l'application de l'entrée ou après une perturbation.

Ce qui nous intéresse est la précision en régime permanent.

Pour déterminer la valeur de $\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$, on applique le théorème de la valeur finale qui stipule que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \varepsilon(s) \quad \text{où } s \text{ est l'opérateur de Laplace.}$$

soit : $\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{X(s)}{1+T(s)}$ qui dépend de la classe du système et de la nature de l'excitation à l'entrée.

Rappelons ici la notion des constantes d'erreurs;

➤ Constante d'erreur de position :

pour une entrée en échelon d'amplitude A : $x(t) = A \cdot u(t) \rightarrow X(s) = \frac{A}{s}$

$$\text{on a : } \varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{A}{s}}{1+T(s)} = \frac{A}{1+\lim_{s \rightarrow 0} T(s)}$$

$$\varepsilon(\infty) = \frac{A}{1+K_p}, \quad \text{avec : } K_p = \lim_{s \rightarrow 0} T(s) \text{ est la constante d'erreur de position.}$$

➤ Constante d'erreur de vitesse :

pour une entrée rampe de pente B : $x(t) = B \cdot t \rightarrow X(s) = \frac{B}{s^2}$

$$\text{on a : } \varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{B}{s^2}}{1+T(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{B}{s+sT(s)} = \frac{B}{\lim_{s \rightarrow 0} sT(s)}$$

$$\varepsilon(\infty) = \frac{B}{K_v}, \quad \text{avec : } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sT(s) \text{ est la constante d'erreur de vitesse.}$$

➤ Constante d'erreur d'accélération :

pour une entrée parabolique : $x(t) = C \cdot t^2 \rightarrow X(s) = \frac{2C}{s^3}$

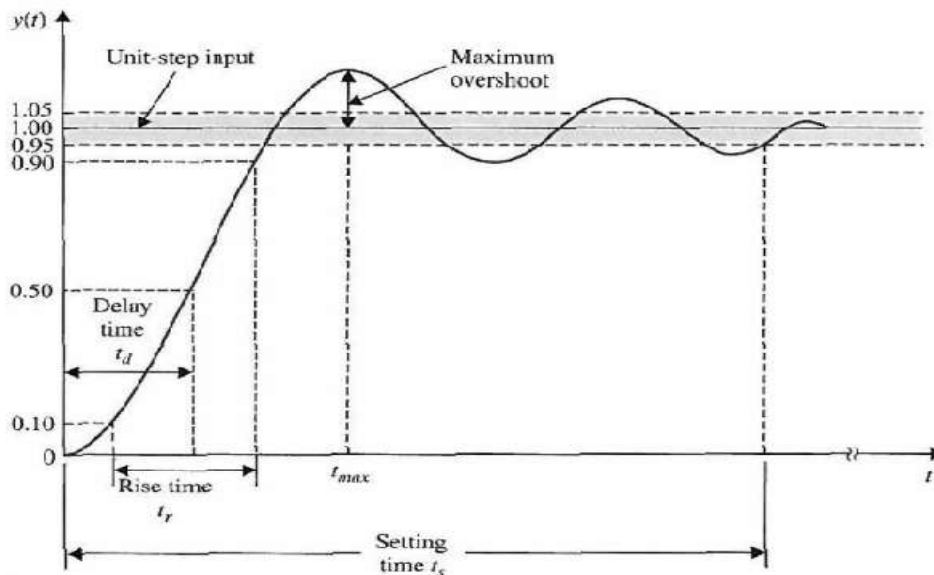
$$\text{on a : } \varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\frac{2C}{s^3}}{1+T(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2C}{s^2+s^2T(s)} = \frac{2C}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2T(s)}$$

$$\varepsilon(\infty) = \frac{2C}{K_a}, \quad \text{avec : } K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2T(s) \text{ est la constante d'erreur d'accélération.}$$

I. 3. 3. Rapidité d'un système asservi :

Elle traduit pratiquement la durée transitoire. Plus précisément, elle s'exprime par le temps de réponse t_r (en anglais, settling time t_s) ou temps d'établissement, qui est le temps mis par la mesure pour atteindre sa valeur définitive à $\pm 5\%$ (temps de réponse à 5%) de sa variation tout en se maintenant dans cette zone des $\pm 5\%$ (plus t_r est petit plus le système est dit rapide).

Elle s'exprime aussi parfois par le temps de montée t_m (en anglais, rise time t_r) qui est la durée que met le signal $y(t)$ pour passer de 10% à 90% de sa valeur finale $y(\infty)$.



Le cahier de charge d'une régulation comporte plusieurs objectifs qui sont parfois contradictoires comme, par exemple, la précision et la rapidité. En effet il est souvent difficile, voire impossible, d'obtenir une très bonne précision dynamique avec une très grande rapidité.

Un réglage optimale d'une régulation sera toujours le fruit d'une recherche du meilleur compromis entre la précision et la rapidité.

Chapitre II

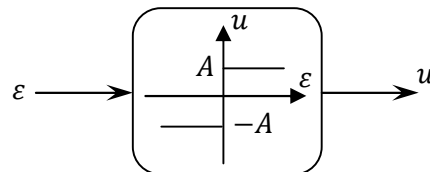
II. 1. Régulateur tout ou rien :

Un régulateur génère la grandeur de commande u en fonction de l'écart ε . Le cas le plus simple est celui où l'action se fait en considérant uniquement le signe de l'écart.

$$u = \begin{cases} A & \text{si } \varepsilon > 0 \\ \bar{A} & \text{si } \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

suivant les applications, on choisit $\bar{A} = 0$ ou $(-A)$.

La fonction $\varepsilon \mapsto u$ est schématisée dans la figure suivante :



Ce mode d'action est essentiellement discontinu. Sa réalisation impose de se fixer une limite inférieure et une limite supérieure.

Lorsque la mesure atteint la limite inférieure, l'actionneur prend une position particulière (arrêt ou marche pour une pompe, ouvert ou fermé pour une vanne). De façon analogue, le fait d'atteindre la limite supérieure place l'actionneur dans la position contraire. La mesure oscille donc entre ces deux valeurs extrêmes et sa variation prend une allure en dents de scie. Ce réglage simple, bon marché présente l'inconvénient d'être peu précis.

D'autre part, ce dispositif ne peut s'appliquer qu'à des installations présentant une inertie suffisamment grande provoquant une fréquence d'oscillation faible afin de ne pas solliciter les organes de commande trop souvent, ce qui réduirait leur durée de vie.

Exemple :

L'entraînement électrique en position est décrit par l'équation suivante sans couple résistant parasite :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{1}{J} \left(f + \frac{(K\Phi)^2}{R} \right) \dot{\theta}(t) = \frac{K\Phi}{JR} u(t)$$

avec des valeurs numériques données :

$$\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\theta}(t) = 4u(t)$$

La fonction de transfert équivalente est :

$$\Theta(s) = \frac{4}{s(s+2)} U(s)$$

soit, en revenant dans le domaine du temps et en introduisant l'écart de position $\varepsilon = \theta_c - \theta$ où θ_c est constante.

$$\dot{\varepsilon}(t) = -\dot{\theta}(t)$$

$$\ddot{\varepsilon}(t) = -\ddot{\theta}(t)$$

Par substitution dans l'équation différentielle précédente, on trouve :

$$\ddot{\varepsilon}(t) + 2\dot{\varepsilon}(t) = -4u(\varepsilon(t))$$

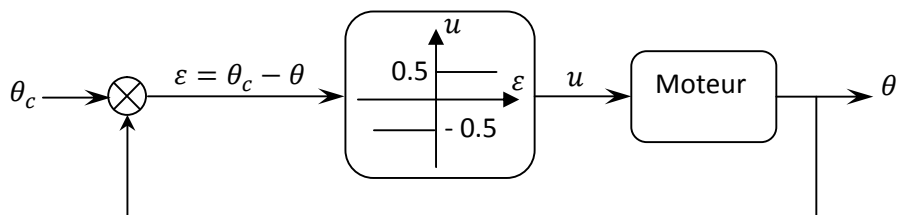
Un régulateur tout ou rien est utilisé :

$$u(\varepsilon) = \begin{cases} 0.5 & \text{si } \varepsilon > 0 \\ -0.5 & \text{si } \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

Bien qu'il soit possible de résoudre les deux équations différentielles analytiquement, il est plus commode aujourd'hui de résoudre ce type de problème numériquement.

La résolution de ces deux équations différentielles fournit les trajectoires dans le plan de phase $(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$, où l'écart ε est porté sur l'axe des abscisses et la dérivée $\dot{\varepsilon}$ de l'écart sur l'axe des ordonnées.

Nous aboutissons ainsi au schéma fonctionnel suivant :

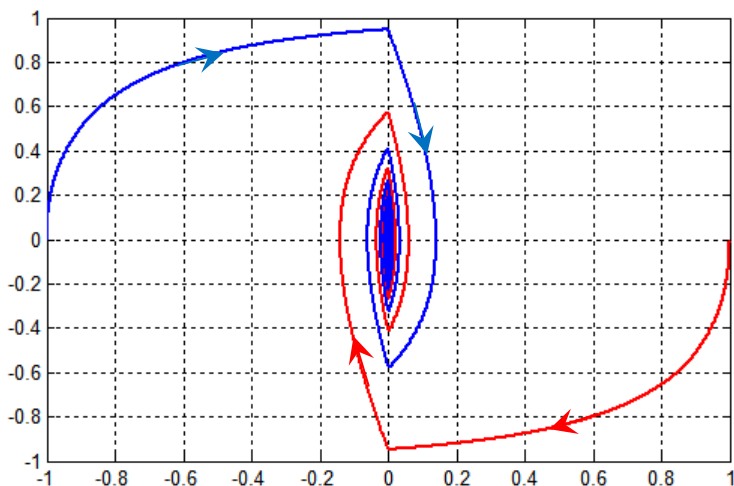


Initialement, la position $\theta(0)$ et la vitesse $\dot{\theta}(0)$ sont toutes deux nulles, de sorte que :

$$\varepsilon(0) = \theta_c - \theta(0) = \theta_c$$

$$\dot{\varepsilon}(0) = -\dot{\theta}(0) = 0$$

Des trajectoires de phase sont reportées dans la figure suivante pour deux valeurs de la consigne $\theta_c = \varepsilon(0)$



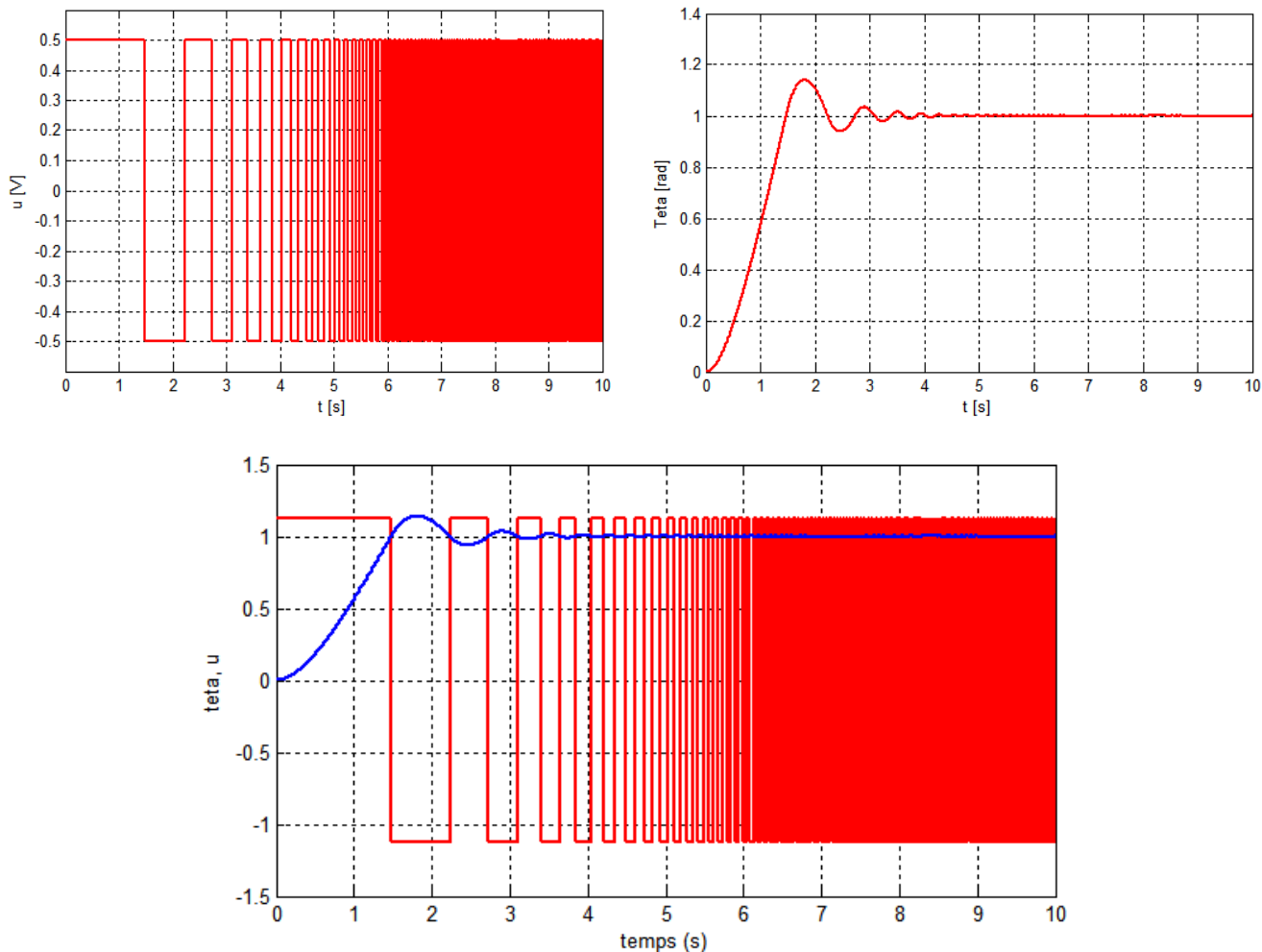
Les commutations ont lieu pour $\varepsilon = 0$, sur l'axe des ordonnées, qui est dit droite de commutation.

On remarque que les trajectoires convergent toutes vers l'origine du plan de phase, quelle que soit la consigne θ_c , donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon}(t) = 0$$

On remarque aussi que la fréquence des commutations augmente au fur et à mesure que l'on s'approche de l'origine du plan de phase. Le phénomène peut provoquer une usure prématurée des composants, par exemple un réducteur entre le moteur et la charge.

Les deux figures suivantes montrent la tension d'alimentation $u(t)$ et la position $\theta(t)$ dans le cas $\theta_c = 1$.

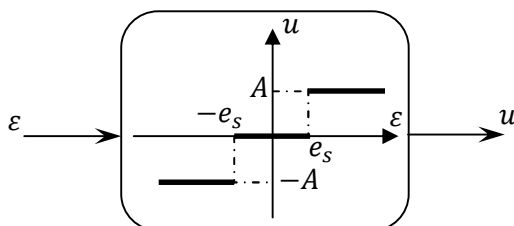


II. 2. Régulateur tout ou rien avec seuil (ou intervalle mort) :

Un régulateur tout ou rien avec seuil fournit une grandeur de commande nulle lorsque l'écart est nul dans un intervalle comprenant l'origine :

$$u = \begin{cases} A & \text{si } \varepsilon > e_s \\ 0 & \text{si } -e_s \leq \varepsilon \leq e_s \\ -A & \text{si } \varepsilon < -e_s \end{cases}$$

La fonction $\varepsilon \mapsto u$, non linéaire, est représentée dans la figure suivante :



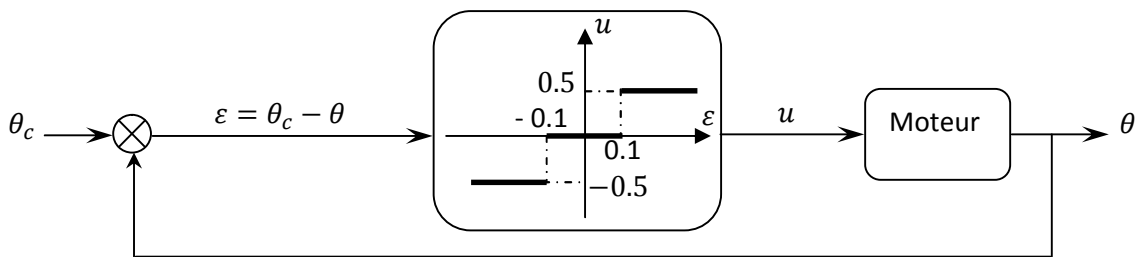
Aucune correction n'est apportée quand l'écart est suffisamment faible, plus précisément quand $\varepsilon \in [-e_s, e_s]$. La sensibilité du régulateur est alors amoindrie, diminuant la fréquence des commutations lorsque l'écart s'approche de zéro. Le prix à payer est une imprécision d'asservissement, due au fait que n'importe quel point d'équilibre est accepté dans le seuil.

Exemple :

Un seuil est introduit dans le régulateur de l'exemple précédent :

$$u(\varepsilon) = \begin{cases} 0.5 & \text{si } \varepsilon > 0.1 \\ 0 & \text{si } -0.1 \leq \varepsilon \leq 0.1 \\ -0.5 & \text{si } \varepsilon < -0.1 \end{cases}$$

Il en découle le schéma fonctionnel de la figure suivante :



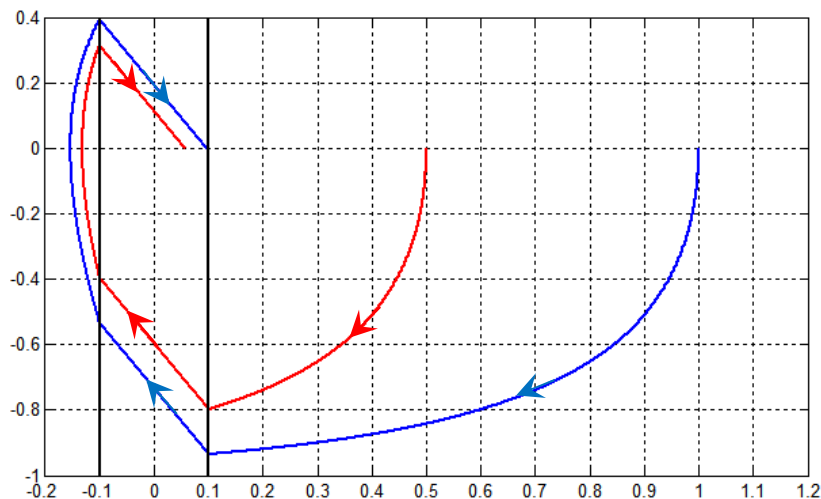
Dans le seuil, c'est-à-dire pour $\varepsilon \in [-0.1, 0.1]$, on a $u(\varepsilon) = 0$. L'équation différentielle devient :

$$\ddot{\varepsilon}(t) + 2\dot{\varepsilon}(t) = 0$$

Après avoir intégré :

$$\dot{\varepsilon}(t) + 2\varepsilon(t) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Dans le plan de phase, la trajectoire correspondante est simplement une droite de pente -2 .



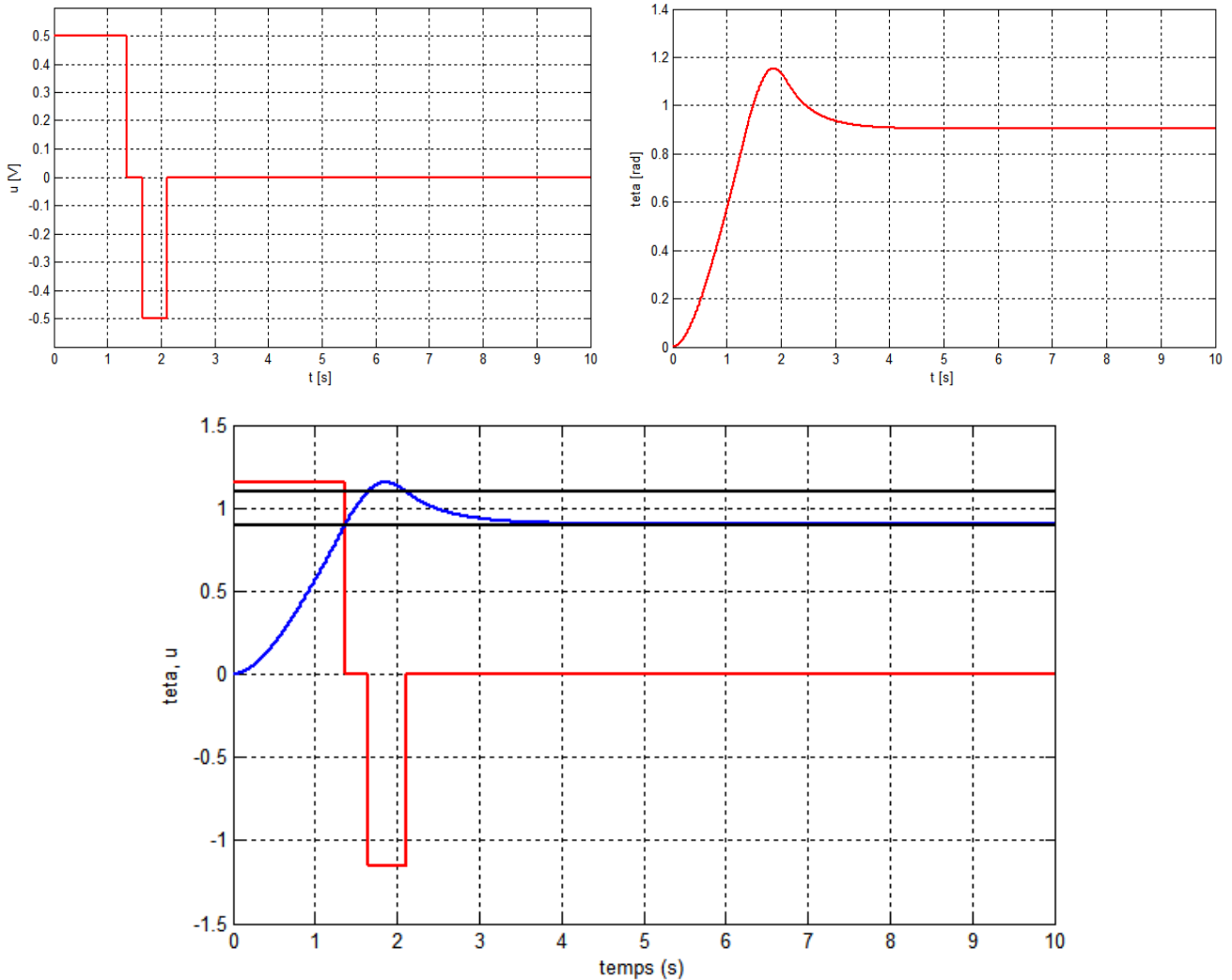
Nous sommes maintenant en présence de deux droites de commutation, définies par $\varepsilon = -0.1$ et $\varepsilon = 0.1$

En général, les trajectoires ne convergent plus vers l'origine du plan du phase, mais vers un point d'équilibre situé n'importe où dans le seuil.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) \in [-e_s, e_s]$$

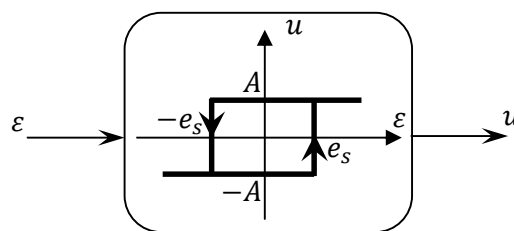
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon}(t) \in 0$$

La consigne n'est bien sûr plus précisément assignée à la grandeur à commander $\theta(t)$. En contrepartie, les commutations cessent à partir d'un certain instant, comme cela est illustré dans la figure suivante pour $\theta_c = 1$.



II. 3. Régulateur tout ou rien avec hystérésis :

Un régulateur tout ou rien avec hystérésis déplace le point de commutation selon le sens de variation de l'écart, en introduisant une forme de retard dans la commutation, comme cela est montré dans la figure suivante :

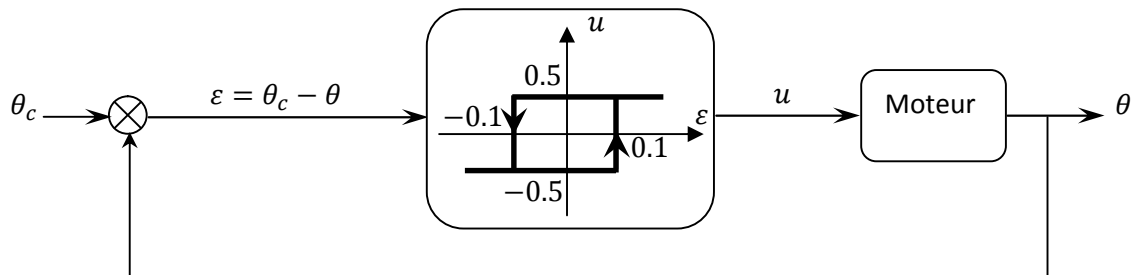


Les commutations ont lieu pour $\varepsilon = e_s$ si $\dot{\varepsilon} > 0$ et $\varepsilon = -e_s$ si $\dot{\varepsilon} < 0$. Cette caractéristique n'est pas une fonction au sens mathématique du terme car elle associe, pour une valeur de $\varepsilon \in [-e_s, e_s]$, deux nombres $-A$ et A .

L'hystérésis provoque une imprécision en forçant le système à osciller avec une fréquence finie autour de $\varepsilon = 0$. Ce mouvement oscillatoire naturel est appelé cycle limite. Ainsi, l'hystérésis, considérée habituellement comme un défaut, est ici exploitée pour limiter la fréquence des oscillations.

Exemple :

Soit à nouveau l'entraînement en position des exemples précédents, en utilisant maintenant un régulateur tout ou rien avec hystérésis.

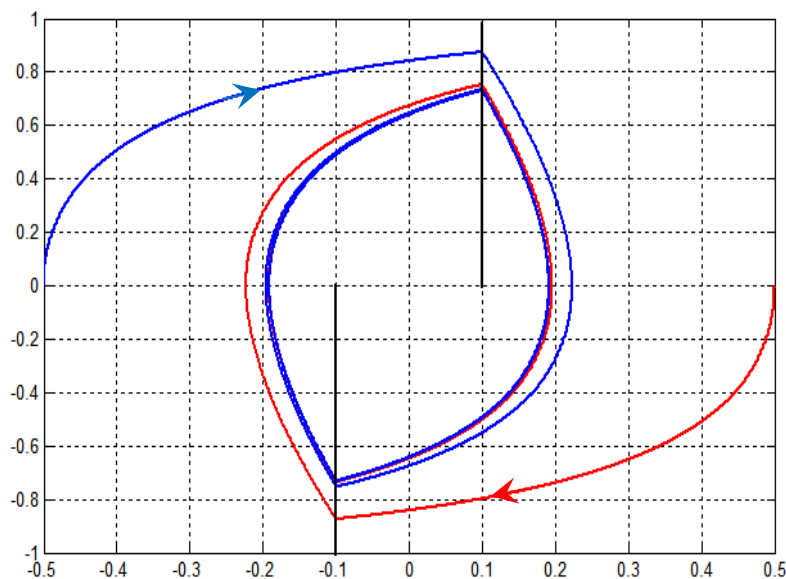


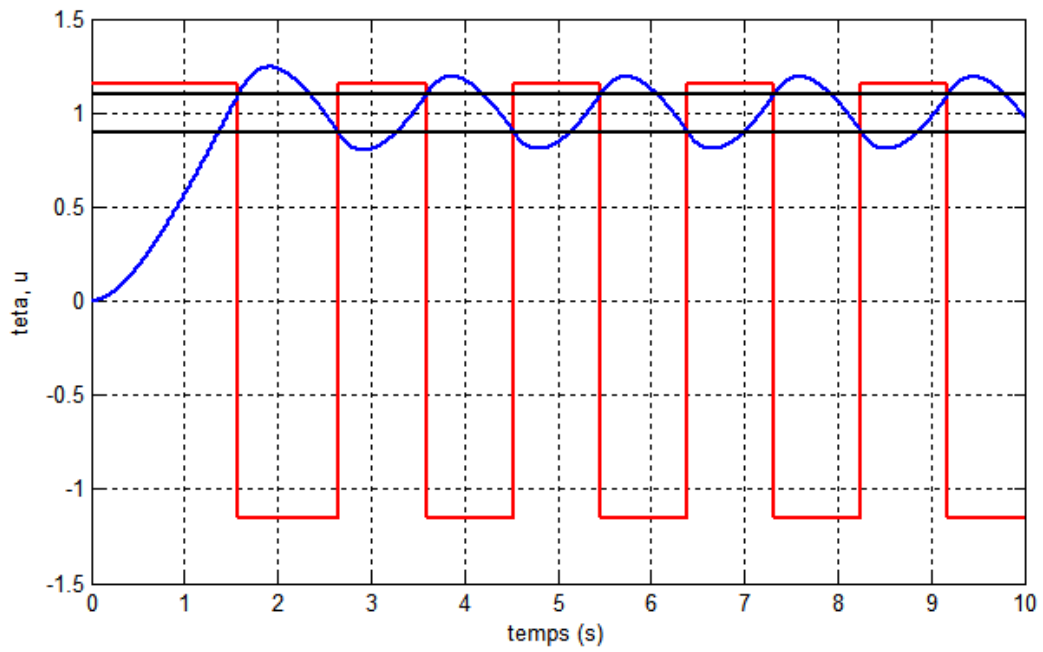
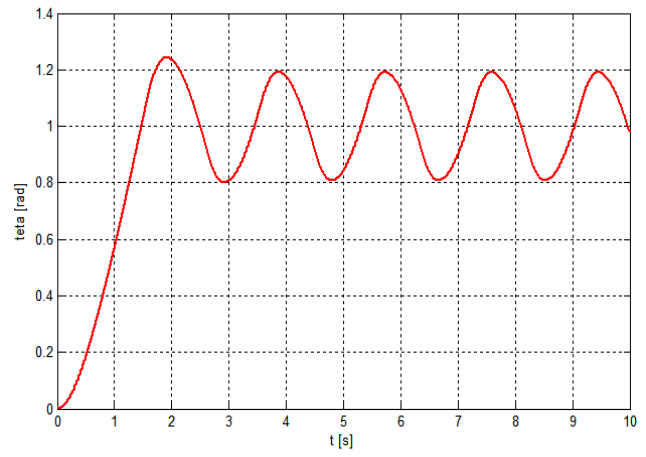
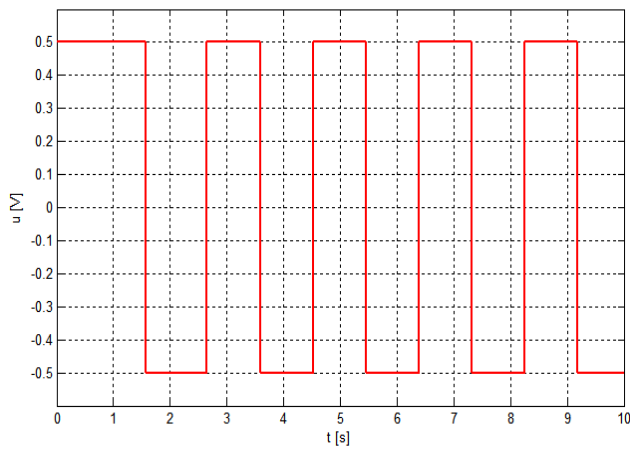
La figure suivante montre des trajectoires dans le plan de phase.

Il existe deux demi-droites de commutations, à savoir :

$$\varepsilon = \begin{cases} 0.1 & \text{si } \dot{\varepsilon} > 0 \\ -0.1 & \text{si } \dot{\varepsilon} < 0 \end{cases}$$

Le cycle limite, sous la forme d'une trajectoire fermée sur elle-même, est particulièrement visible. La consigne n'est évidemment pas exactement assignée à la grandeur à commander. Cette imprécision permet de limiter, contrairement au régulateur tout ou rien simple, la fréquence des commutations quand le temps s'écoule, comme il ressort de la figure de $u(t)$ pour $\theta_c = 1$.





Chapitre III

Identification des systèmes en boucle ouverte et fermée

III. 1. But de l'identification :

Pour arriver aux objectifs décrits dans le cahier des charges de la régulation d'un procédé, il faut analyser les comportements statique et dynamique de ce procédé seul, ou instrumenté, c.-à-d. connaître sa fonction de transfert réglante.

Cette fonction de transfert peut être déterminée par une mise en équation du système (système simple ou qui peut être décomposé en éléments simples), cela conduit à un modèle de connaissance. Lorsque le procédé est complexe et que sa mise en équation est délicate, voire impossible, une identification expérimentale est préférable. Une telle identification repose sur l'analyse de réponse temporelles, ou fréquentielles, observées directement sur le système soumis à un signal d'entrée déterminé.

III. 2. Choix du modèle :

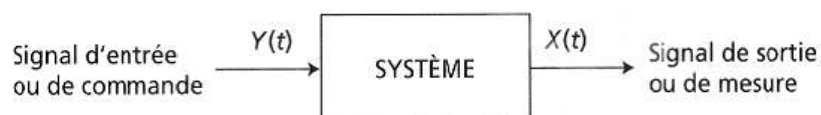
La recherche d'un modèle mathématique pour un procédé est nécessaire et doit aboutir à un modèle représentant correctement le comportement du procédé. Cependant le modèle ne doit ni être trop sophistiqué au risque d'être incompatible avec le correcteur disponible, ni être trop simpliste pour ne pas masquer certains aspects néfastes au bon fonctionnement.

Deux méthodes d'identification sont à considérer: essai en chaîne ouverte (le système étudié n'est pas asservi) et essai en chaîne fermée (un régulateur asservit le système).

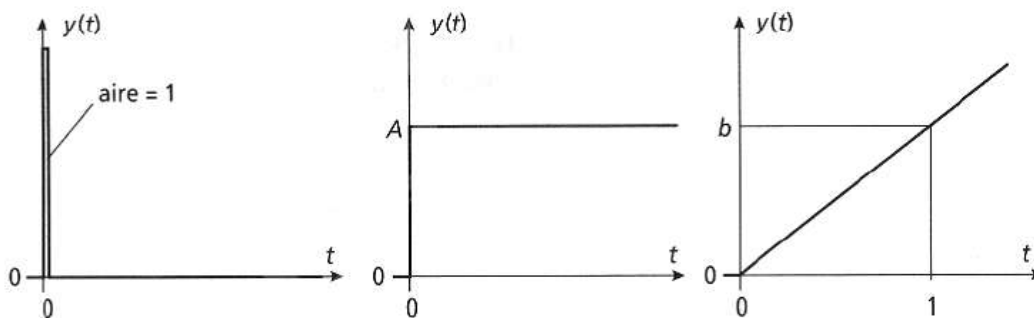
III. 2. Identification en chaîne ouverte :

Lors d'un tel essai, le procédé à identifier n'est plus contrôlé automatiquement. Le régulateur est mis en mode manuel pour pouvoir agir sur le signal de commande. L'automaticien ne doit provoquer que de petites variations (quelques %) autour d'un point de fonctionnement choisi afin de ne pas déranger la production en cours et pour considérer le système comme linéaire, et vérifier également qu'une perturbation ne viendra pas influencer cette identification.

On envoie un signal d'entrée $y(t)$ connu (impulsion, échelon ou rampe) et on enregistre le signal de sortie $x(t)$ qui est analysé ensuite.



Les deux signaux les plus employés sont l'échelon et la rampe. L'échelon est le plus facile et rapide à réaliser mais peut provoquer des variations assez brusques sur des procédés très sensibles. On utilise la rampe pour que le procédé subisse une variation plus douce et donc plus acceptable au niveau sécurité du produit et de l'installation.



a) Impulsion unitaire

$$y(t) = \delta(t)$$

$$Y(s) = 1$$

b) Échelon d'amplitude A

$$y(t) = A u(t)$$

$$Y(s) = \frac{A}{s}$$

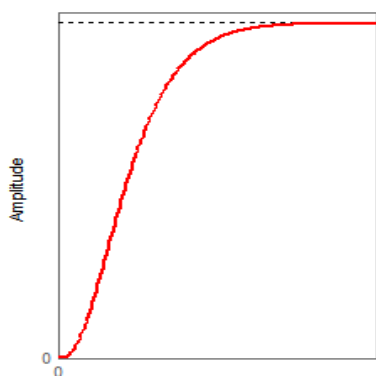
c) Rampe de pente b

$$y(t) = b t u(t)$$

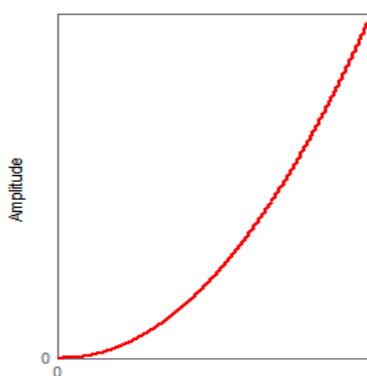
$$Y(s) = \frac{b}{s^2}$$

On enregistre le signal de sortie. Lorsque le signal d'entrée est une impulsion, la courbe obtenue est appelée réponse impulsionnelle. Pour un signal d'entrée en échelon, la courbe obtenue est appelée réponse indicielle (ou réponse à un échelon de position). La courbe obtenue à une rampe est dite réponse à un échelon de vitesse.

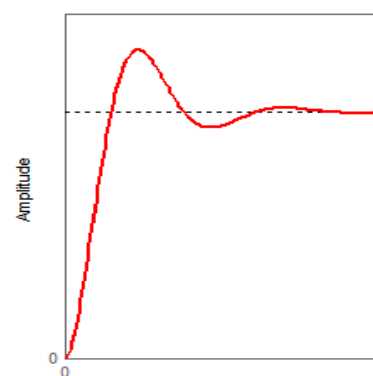
Les trois grandes familles de courbes les plus rencontrées sont les suivantes :



a) Courbe en S



b) Courbe intégratrice



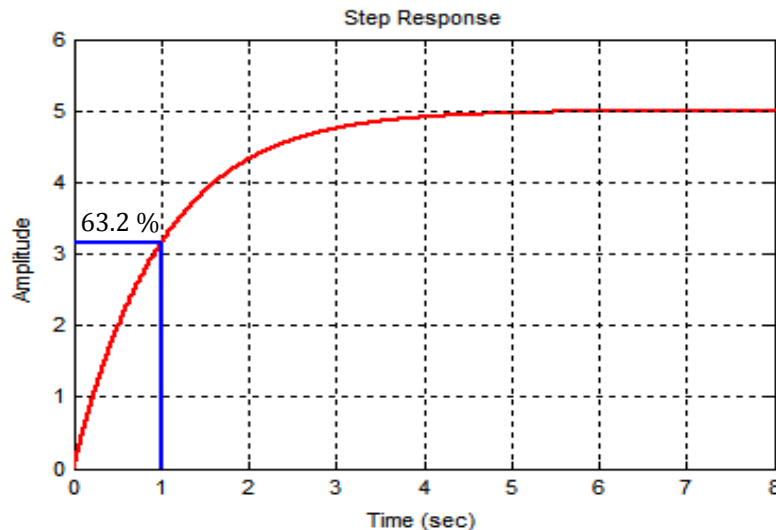
c) Courbe avec oscillations

L'allure de la courbe obtenue suggère la méthode à appliquer pour modéliser le procédé. Pour les courbes facilement reconnaissables, comme celle de la réponse indicielle d'un premier ordre, il est facile de déterminer le modèle.

Si le système n'a pas de dépassement et que sa pente présente une discontinuité à l'origine, on peut choisir de le modéliser par un premier ordre de la forme : $\frac{K}{1+\tau s}$. Les paramètres K et τ peuvent être identifiés comme suit :

Nous choisissons une entrée échelon d'amplitude A . La réponse $x(t)$ est ensuite tracée. Tandis que τ se déduit de la courbe (à 63,2 % de la valeur finale), K est donnée par : $K = \frac{x(\infty)}{A}$.

Exemple : Après avoir exercé à $t = 0$ un échelon d'amplitude $A = 5$ en entrée $y(t)$ d'un procédé, on obtient la courbe $x(t)$ de la figure suivante. On cherche à déterminer la fonction de transfert de ce procédé.



L'allure de cette courbe est celle de la réponse indicielle d'un système du premier ordre. On détermine le gain statique $K = \frac{x(\infty)}{A} = \frac{5}{5} = 1$ et la constante de temps $\tau = 1$ s. La fonction de transfert du procédé est donc : $H(s) = \frac{1}{1+s}$

Pour les courbes plus complexes à analyser il y a beaucoup de méthodes pratiques. Lors d'une hésitation entre deux méthodes, le meilleur modèle est celui dont la réponse théorique est la plus proche de la courbe obtenue expérimentalement.

III. 2. 1. Courbe en S :

a\ Méthode de Strejc :

Le modèle de Strejc comporte n constantes de temps τ identiques.

➔ Modèle de Strejc pour un système autoréglant (naturellement stable)

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{K}{(1 + \tau s)^n}$$

➔ Modèle de Strejc pour un système intégrateur

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{K}{s(1 + \tau s)^n}$$

Si le système n'a pas de dépassement (on parle de système *apériodique*) et que sa pente ne présente pas de discontinuité (en forme de S), sa réponse est modélisée par :

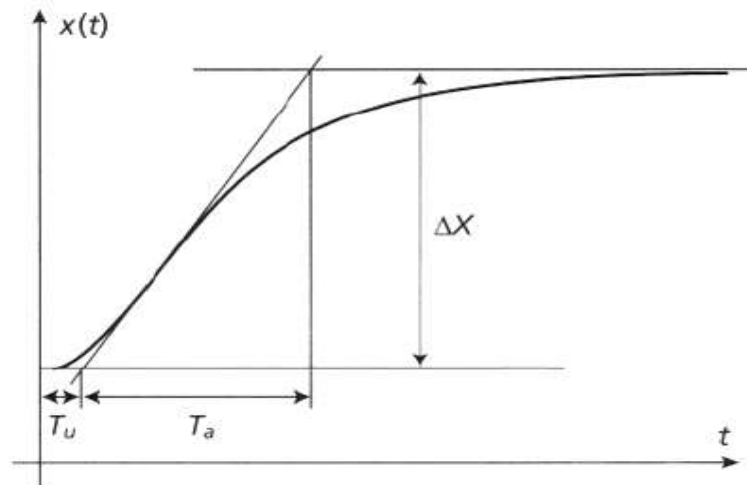
$$X(s) = \frac{\Delta X}{s(1 + \tau s)^n}$$

La méthode de Strejc permet d'identifier ce modèles à partir de la réponse à un échelon.

La méthode d'identification peut donc être synthétiser comme suit :

A partir de la réponse à un échelon, on identifie dans un premier temps le gain statique $K = \frac{x(\infty)=\Delta X}{A}$ (ΔX est mesurée directement). Dans un second temps, on doit identifier l'ordre n du système et la constante de temps τ . Pour cela, on trace la tangente à la courbe au point d'inflexion (la plus grande pente). On relève le temps T_u entre l'instant de déclenchement de l'échelon et l'instant où l'asymptote coupe la valeur initiale de $x(t)$. On relève T_a entre ce dernier instant et l'instant où l'asymptote atteint la valeur finale de $x(t)$. A partir du rapport T_u/T_a , on détermine l'ordre n du système (entre deux

lignes du tableau, on choisit la valeur de n la plus petite). Pour la valeur de n choisie, on détermine τ à partir de la valeur de T_u/τ ou T_a/τ (s'il n'y a pas de retard).



Rapports entre les constantes de temps pour l'identification par la méthode de Strejc :

n	T_u/τ	T_a/τ	T_u/T_a
2	0,2817	2,718	0,1036
3	0,8055	3,695	0,2180
4	1,425	4,464	0,3194
5	2,102	5,112	0,4103
6	2,811	5,699	0,4933
7	3,549	6,226	0,5700
8	4,307	6,711	0,6417
9	5,081	7,164	0,7092
10	5,869	7,590	0,7732

b) Méthode de Strejc-Davoust :

La réponse du procédé est modélisée par: $X(s) = \frac{\Delta X e^{-Ts}}{s(1+\tau s)^n}$

Le principe de détermination du temps mort T , de la constante de temps τ (**τ est déterminée à partir de T_a/τ et pas de T_u/τ**) et de l'ordre n est analogue à celui de la méthode de Strejc, mais le retard T sera déterminé à partir de la différence entre la valeur de T_u mesurée et celle donnée par la colonne du T_u/τ du tableau ci-dessus.

A titre d'exemple, pour un système donné, nous avons mesuré $T_u = 0,27$ s et $T_a = 1,76$ s.

D'après le tableau, $T_u/T_a = 0,15 \Rightarrow n = 2$.

La constante de temps est évaluée à partir de $T_a/\tau = 2,718 \Rightarrow \tau = \frac{1,76}{2,718} = 0,647$ s.

D'après le tableau, $T_u/\tau = 0,2817$, ce qui donnerait une valeur de $T_u' = 0,2817 \times \tau = 0,1822$ s.

Or on mesure $T_u = 0,27$ s. On peut en déduire un retard $T = T_u - T_u' = 0,27 - 0,1822 = 0,087$ s.

c) Méthode de Broïda :

Le modèle de Broïda comporte une constante de temps τ et un retard T appelé aussi temps mort.

➔ Modèle de Broïda pour un système autoréglant

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{Ke^{-Ts}}{1+\tau s}$$

➔ Modèle de Broïda pour un système intégrateur

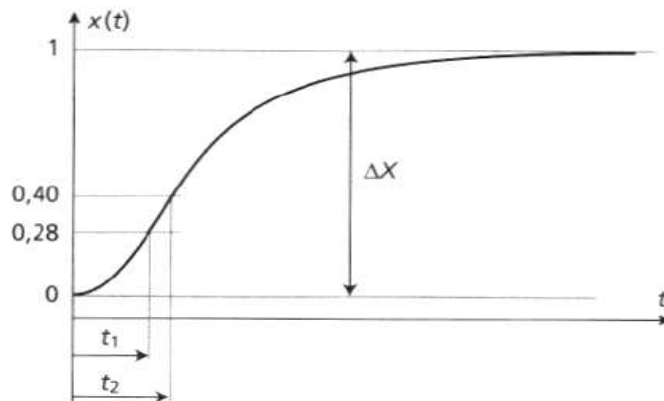
$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{Ke^{-Ts}}{s(1+\tau s)}$$

La méthode de Broïda donne un modèle correct si $\tau > 4T$.

La réponse en S du procédé est modélisée par $X(s) = \frac{\Delta X e^{-Ts}}{s(1+\tau s)}$

Pour obtenir la constante de temps τ et le temps mort T , on mesure t_1 à $0,28\Delta X$ et t_2 à $0,4\Delta X$ (figure ci-dessous). La variation ΔX est mesurée directement.

On calcul : $\tau = 5,5(t_2 - t_1)$ et $T = 2,8t_1 - 1,8t_2$



III. 2. 2. Courbe intégratrice :

Deux méthodes sont utilisables; la première conduisant à un modèle fin mais dont l'analyse est délicate et la seconde donnant un modèle plus grossier mais d'analyse beaucoup plus rapide et simple. A remarquer que une courbe intégratrice ne doit pas aboutir d'office à un procédé intégrateur : la courbe obtenue dépend toujours du signal provoqué à l'entrée.

a) Méthode de Strejc-Davoust :

➔ Modèle de Strejc-Davoust pour un système autoréglant

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{Ke^{-Ts}}{(1+\tau s)^n}$$

➔ Modèle de Strejc-Davoust pour un système intégrateur

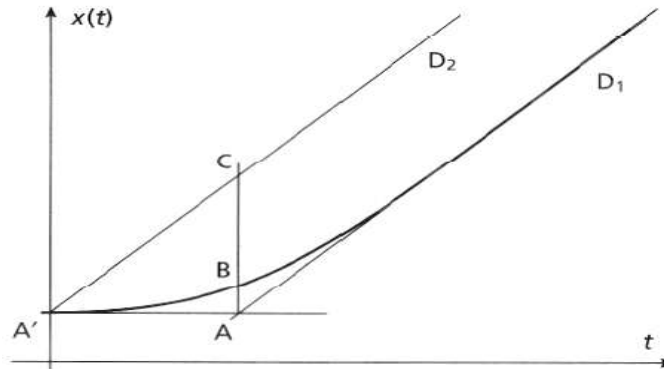
$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{Ke^{-Ts}}{s(1+\tau s)^n}$$

La réponse de la courbe intégratrice est modélisée par : $X(s) = H(s)Y(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s(1+\tau s)^n} \times \frac{A}{s} = \frac{ce^{-Ts}}{s^2(1+\tau s)^n}$

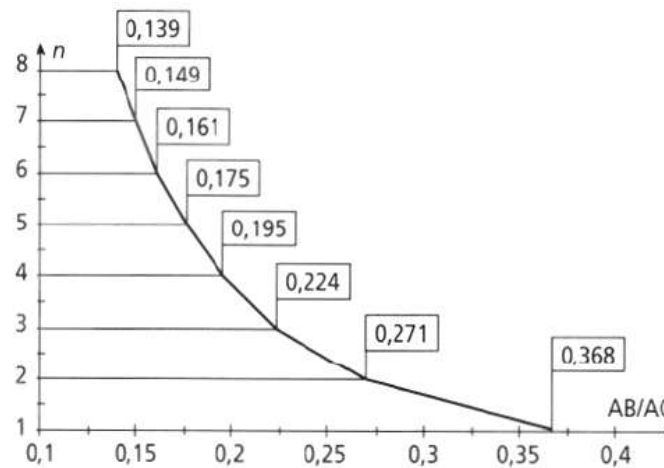
L'envoi d'un échelon sur un système en BO qui contient une intégration dans sa FTBO, on a un signal de sortie qui évolue linéairement donc instable. La figure ci-dessous donne l'allure de cette réponse.

Pour l'identification des paramètres T , τ et n , on a la méthode suivante :

On trace l'asymptote D_1 à la courbe, sa parallèle D_2 par A' , la parallèle AA' à l'axe des temps et le segment AC normal en A à AA' , puis on calcul le rapport AB/AC .



Le rapport AB/AC permet de déterminer n (figure suivante).



- ✓ Si n est entier, on calcule $\tau = \frac{AA'}{n}$ et le temps mort T est nul
 - ✓ Si n n'est pas un entier ; on détermine le nouveau rapport $\frac{AB}{AC}$ correspondant à la partie entière de n .
 Pour cela on déplace D_2 parallèlement à D_1 vers D_1 pour obtenir ce nouveau rapport. Le temps mort τ correspond alors à la translation effectuée par D_2 . Enfin, τ est calculée à partir de $AA' = T + n\tau$.
- Le coefficient directeur c de la courbe obtenue est donné par : $c = \frac{AC}{AA'}$

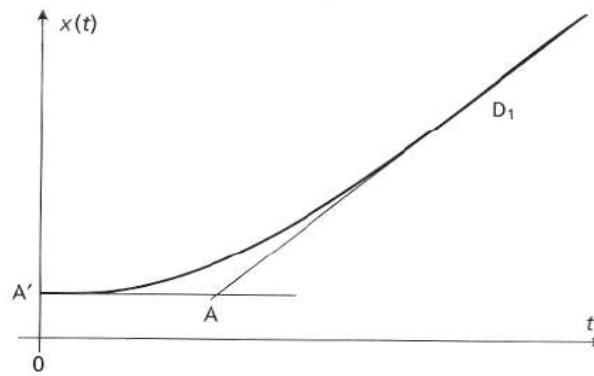
b\ Méthode rapide :

Le modèle rapide proposé est celui d'un système autoréglant ou intégrateur :

$$H(s) = Ke^{-Ts} \quad \text{ou bien} \quad H(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s}$$

La réponse est modélisée par : $X(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s} \times \frac{A}{s} = \frac{ce^{-Ts}}{s^2}$

Pour obtenir le temps mort T , on trace l'asymptote D_1 à la courbe $x(t)$ (figure ci-dessous). Le temps mort est représenté par AA' . " c " est le coefficient directeur de D_1 .



III. 2. 3. Courbe avec oscillations :

Dans les procédés industriels ce genre de réponse n'est pas souvent rencontré lorsqu'il s'agit d'une chaîne ouverte. On rencontre cette réponse surtout en chaîne fermée, et l'identification sert alors à vérifier le réglage obtenu.

Le modèle proposé est celui d'un système du second ordre avec retard, autorégulant ou intégrateur :

$$H(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{1+2\xi\frac{s}{\omega_0}+\frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad \text{ou bien} \quad H(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s\left(1+2\xi\frac{s}{\omega_0}+\frac{s^2}{\omega_0^2}\right)}$$

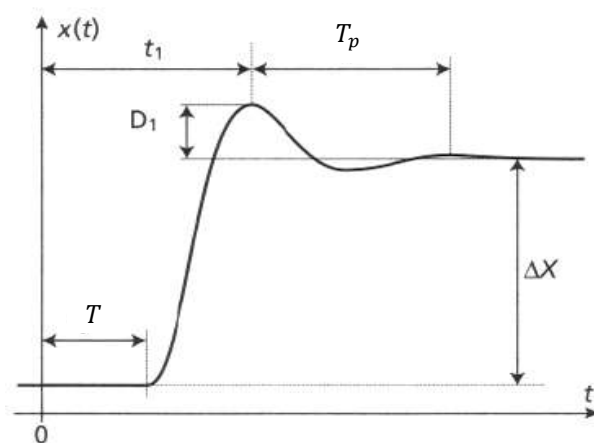
Pour obtenir le temps mort T , le coefficient d'amortissement ξ et la pulsation propre non amortie ω_0 , on note les éléments suivants :

- ✓ Le temps du premier dépassement noté t_1 ,
- ✓ Le dépassement relatif D_1 telle que $D_1 = \frac{x_{max}-x(\infty)}{x(\infty)}$

On calcule le coefficient d'amortissement de la formule : $D_1 = e^{\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$

La pulsation naturelle est déduite de : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$

Enfin, le temps mort est calculé : $T = t_1 - \frac{T_p}{2}$

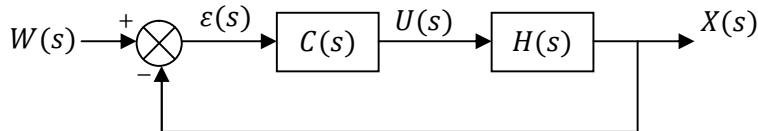


III. 3. Identification en chaîne fermée :

III. 3. 1. La méthode des oscillations limites :

La méthode des oscillations limites concerne un système de fonction de transfert $H(s)$ contrôlé par un régulateur de fonction de transfert $C(s)$ et comporte deux essais :

- Le premier essai pour savoir si le procédé est naturellement stable (dans ce cas on détermine le gain statique K) ou s'il est intégrateur.
- Le deuxième essai pour que le procédé effectue des oscillations sinusoïdales justes entretenues ; on enregistre ces oscillations.



III. 3. 2. Premier essai :

Ce premier essai pour savoir si le procédé est naturellement stable ou s'il est intégrateur. On part du régime nominal, c'est-à-dire nous avons **mesure = consigne**. Ensuite on configure le régulateur pour être seulement proportionnel soit $C(s) = K_p$ avec un gain faible ($K_p = 1$ ou $0,5$) et on crée un échelon de consigne A .

- ✓ Si la mesure ne rejoint pas la consigne, il reste un écart statique ou de position ε_p . Dans ce cas le procédé est naturellement stable de gain statique K et on montre que :

$$\varepsilon_p = \frac{A}{1 + KK_p}$$

- ✓ Si la mesure rejoint la consigne, le procédé étudié est naturellement instable ; pour savoir s'il possède une ou deux intégrations on peut produire une rampe de consigne $w = b.t$:
 - il y a une intégration si l'écart de vitesse ε_v en régime permanent est non nul ; le gain dynamique K est calculé à l'aide de la relation : $\varepsilon_v = \frac{b}{KK_p}$.
 - il y a deux intégrations si l'écart de vitesse en régime permanent est nul, et le gain dynamique K' ne peut être déterminé.

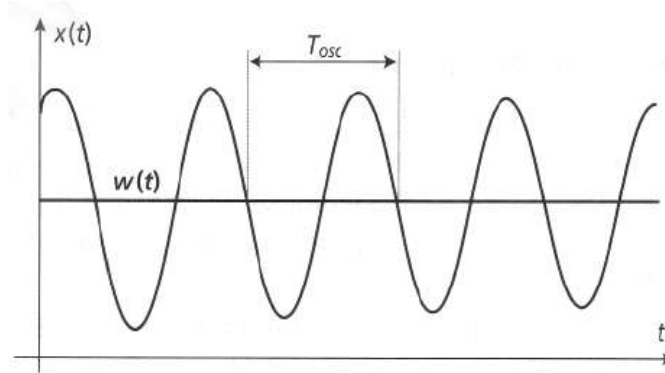
III. 3. 3. Deuxième essai :

Le régulateur de fonction de transfert $C(s)$ a pour un gain K_p . En augmentant le gain K_p , chercher à mettre le procédé en oscillations justes entretenues ; le signal de sortie $x(t)$ est enregistré (figure ci-dessous).

Lorsque le procédé asservi fonctionne en régime harmonique, le gain K_p est appelé gain critique du correcteur K_{lim} et la période d'oscillation est T_{osc} .

La condition d'amplitude est alors : $|K_{lim}H(j\omega_{osc})| = 1$

La condition de phase est alors : $arg[K_{lim}H(j\omega_{osc})] = -180^\circ$



A partir de ces deux équations, on trouve les paramètres du modèle imposé, soit par exemple, pour un procédé naturellement stable :

➤ **Modèle de Strejc :**

$$H(s) = \frac{K}{(1 + \tau s)^n}$$

$$\tau = \frac{T_{osc} \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\pi}$$

$$K_{lim}K = \left[\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]^{-n} \quad \text{où : } \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(\alpha)}}$$

➤ **Modèle de Broïda :**

$$H(s) = \frac{K e^{-Ts}}{(1 + \tau s)}$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_{osc}} \sqrt{(K_{lim}K)^2 - 1}$$

$$T = \frac{1}{\omega_{osc}} [\pi - \text{atan}(\tau \omega_{osc})]$$

Chapitre IV

Les régulateurs standards : P, PI, PD et PID

IV. 1. Introduction :

D'une manière générale, les principaux problèmes posés par la mise en œuvre des systèmes physiques ou industriels concernent leur commande, à savoir la détermination optimale des signaux d'entrée qu'il faut leur appliquer pour qu'ils se comportent de la manière souhaitée. Il est donc souvent nécessaire d'intégrer dans la boucle un organe appelé correcteur (Régulateur) dont l'objectif est d'améliorer les performances de la boucle fermée.

Les régulateurs sont nombreux dans l'industrie dont la fonction est d'assurer une régulation. Par exemple : les régulateurs de tension dans les circuits électroniques ou les régulateurs de pression appelés aussi détendeurs. Ces régulateurs sont des composants destinés à des applications spécifiques et leurs fonctions de régulation sont définies par des relations entre l'entrée et la sortie dont les coefficients sont fixés définitivement par fabrication. Par contre, un régulateur industriel est un appareil dont les paramètres de sa fonction de transfert sont réglables et adaptables au procédé à contrôler.

IV. 2. Situation du problème :

Après avoir choisit les éléments qui permettent de réaliser la régulation (capteur, actionneur, comparateur, ...), on passe ensuite à la phase d'analyse du système asservi, qui se déroule en deux étapes :

- ✓ on établit les équations qui décrivent le comportement de la régulation ; c'est l'étape de modélisation, dont on déduit le schéma fonctionnel de l'ensemble.
- ✓ on utilise l'un des outils d'analyse (Bode, Nyquist, Black, lieu d'Evans, ...) pour étudier les propriétés du système bouclé tel qu'il est : sa stabilité, sa précision, sa rapidité, etc.

La plupart du temps, les propriétés du système bouclé ainsi obtenues ne seront pas satisfaisantes, au vu du cahier de charges imposé. Il faut alors passer à la troisième phase, la phase de synthèse du système asservi, qui consiste à introduire un correcteur pour pouvoir satisfaire aux exigences du cahier des charges.

IV. 3. Exigences de l'asservissement :

Les exigences particulières auxquelles doit satisfaire un asservissement donné sont consignées dans son cahier des charges.

Il existe cependant des exigences fondamentales, auxquelles tout asservissement est soumis.

Un système asservi doit :

1) être stable;

2) avoir une précision donnée :

l'écart permanent $\varepsilon(\infty)$ d'ordre donné est :

☞ soit inversement proportionnel à K_B , gain de Bode de l'ensemble correcteur + procédé, si celui-ci possède une classe égale à cet ordre.

☞ soit nul, si l'ensemble correcteur + procédé possède une classe supérieure d'au moins une unité à cet ordre.

Donc, pour rendre $\varepsilon(\infty)$ petit, il faut :

- ☞ soit augmenter K_B , ce qui peut rendre le système bouclé instable (correcteur proportionnel "P").
- ☞ soit ajouter un ou plusieurs intégrateurs (terme intégral "I"), ce qui rajoute à chaque fois -90° à la phase de la boucle, donc fait également le risque d'instabilité du système bouclé.

En conclusion, les exigences 1 et 2 sont contradictoires.

3) être suffisamment amorti :

un système de deuxième ordre sera mieux amorti (ξ grand) si ses pôles seront plus éloignés de l'axe imaginaire. Un système asservi ayant une réponse de type second ordre sera donc bien amorti si les zéros de son polynôme caractéristique $1 + T_{BOC}(s)$ sont suffisamment loin à gauche de l'axe imaginaire, donc si sa marge de phase Φ_M est suffisante.

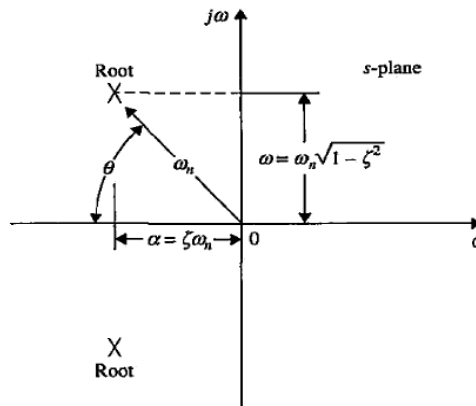
Φ_M ne doit habituellement pas être inférieur à 40°

$40^\circ < \Phi_M < 70^\circ$: dépassement et amortissement acceptable.

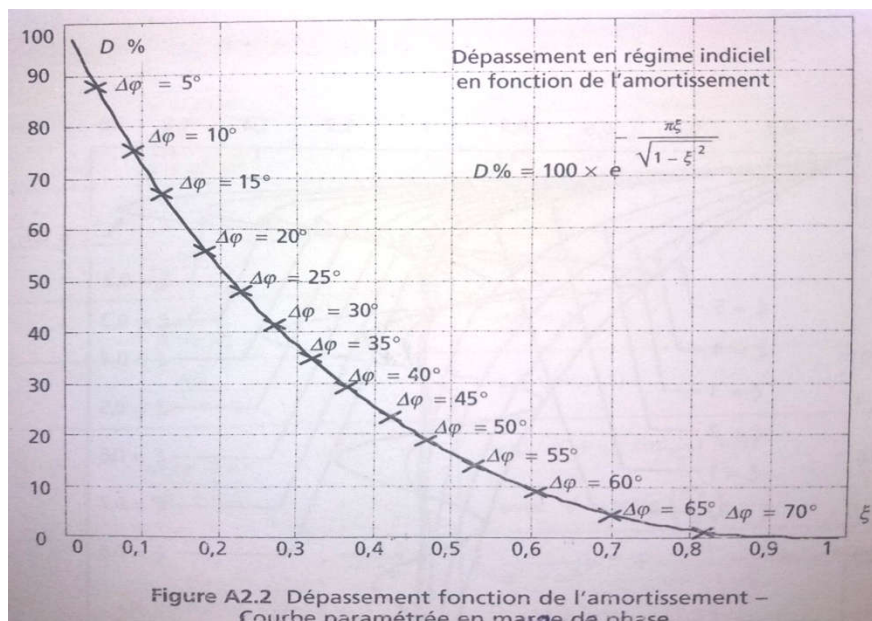
si $0 < \xi < 1$ les deux pôles d'un deuxième ordre sont complexes conjugués :

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\xi = \cos\theta$$



Il existe une relation directe entre le coefficient d'amortissement ξ , ou le dépassement $D\% = 100 \times \exp(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2})$, et la marge de phase Φ_M de la boucle ouverte. Cette relation est reproduite dans l'abaque suivant :



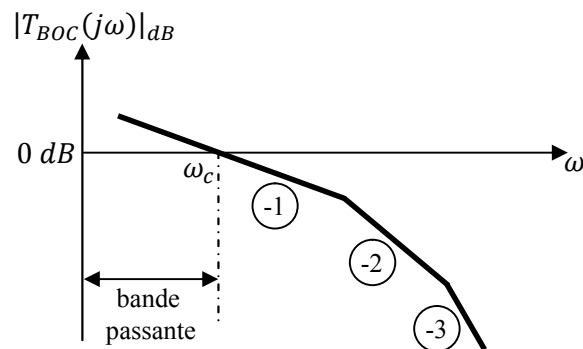
4) être suffisamment rapide :

Le diagramme de Bode d'amplitude asymptotique d'un système corrigé bouclé, ramené à un retour unitaire, s'obtient en coupant le diagramme de la boucle ouverte corrigé $T_{BOC}(s)$ par la droite 0 dB. La pulsation d'intersection, qui n'est autre que la pulsation de coupure du gain ω_c , fournit la bande passante du système bouclé.

Deux situations principales peuvent alors se présenter :

☞ 1er cas

Cette intersection se produit dans une région de pente logarithmique -1 (-20dB/dec) du diagramme de Bode de la boucle ouverte, suffisamment loin de son prochain point de cassure, comme représenté ci-dessous.



On pourra alors assimiler le système bouclé en première approximation à un système du 1er ordre.

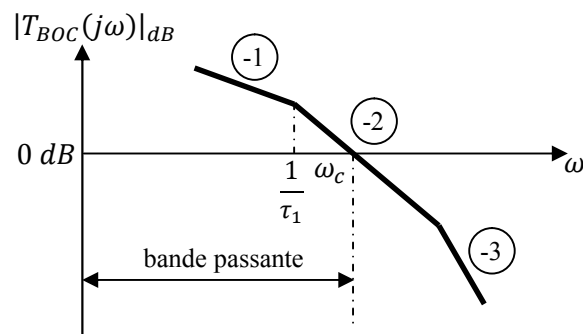
On sait que le temps de réponse à 5% d'un tel système est relié à sa constante de temps τ par la relation :

$$t_{r5\%} = 3\tau = \frac{3}{\omega_c}$$

Noter que la bande passante ω_c correspond ici à la pulsation à laquelle le gain du système bouclé a chuté de 3 dB.

☞ 2ème cas

Cette intersection se produit dans une région de pente logarithmique -2 du diagramme de Bode de la boucle ouverte, comme représenté ci-dessous :



On pourra alors assimiler le système bouclé en première approximation à un système du second ordre :

$$T_{BFC}(s) = \frac{K_B}{1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

Avec : $K_B = 1$, $\omega_n = \omega_c$ et $\xi = \frac{1}{2\omega_c\tau_1}$

Si l'on prend pour mesure de la rapidité du système bouclé le temps de réponse à 5% qui est donné par :

$$t_{r5\%} = -\frac{1}{\xi\omega_c} \ln(0.05\sqrt{1-\xi^2})$$

En conclusion, dans les deux cas principaux examinés ci-dessus, l'exigence $t_{r5\%}$ petit entraîne ω_c grande, qui entraîne à son tour Φ_M petite. Les exigences 3 et 4 sont donc aussi contradictoires.

En pratique, la bande passante en boucle fermée n'est pas limitée uniquement par des considérations de marge de phase, mais aussi par le domaine fréquentiel de validité du modèle.

IV. 4. Structures de correction :

La plupart des méthodes de synthèse prennent pour point de départ une configuration de bouclage donnée. Nous donnons sur les figures suivantes les représentations les plus typiques.

La structure de la figure (a) est appelée correction série : le correcteur $C(s)$ est placé en série avec le processus à corriger. Cette structure est de loin la plus répandue (à supposer que le système ne nécessite pas une structure spécifique) et bon nombre de correcteurs classiques sont prévus pour être insérés de cette manière dans la boucle. Une telle structure permet au correcteur de jouer sur la stabilité, sur les performances, sur l'erreur statique et on autre de faire du rejet de perturbation ou d'améliorer la sensibilité paramétrique.

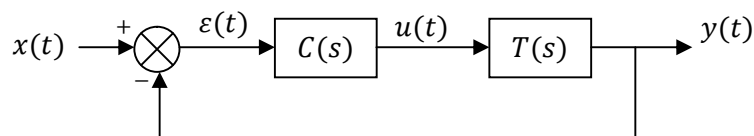


figure (a)

La structure de la figure (b) est une correction par retour de sortie encore appelée correction parallèle. Le correcteur est inséré dans une boucle secondaire dite encore boucle interne. Il est en parallèle par rapport au processus à corriger qui lui appartient à la chaîne directe.

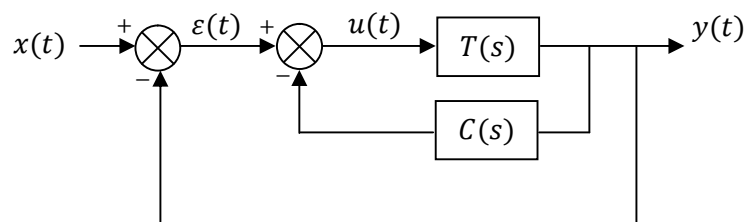


figure (b)

On pourra souvent trouver une variante à ce cas de figure, celle-ci est présentée sur la figure (c).

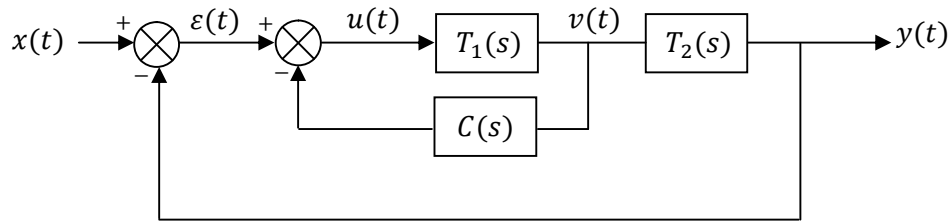


figure (c)

Au lieu de prendre en compte la sortie $y(t)$, $C(s)$ prend comme entrée une variable intermédiaire $v(t)$. Cette variante est très utilisée dans le cas où $T(s)$ possède un intégrateur : on l'isole alors dans $T_2(s)$. $T_1(s)$ ne possède donc plus d'action intégrale. On citera pour exemple la machine à courant continu dont la fonction de transfert est souvent approximée par $\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{K}{s(1+\tau s)}$. On peut alors prendre $T_1(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K}{1+\tau s}$ et $T_2(s) = \frac{\Theta(s)}{\Omega(s)} = \frac{1}{s}$.

$\Omega(s)$ est la transformée de Laplace de $\Omega(t)$ vitesse de rotation de l'arbre moteur.

$\Theta(s)$ est la transformée de Laplace de $\theta(t)$ position de l'arbre moteur et simple intégrale de la vitesse.

$C(s)$ prendra alors comme information d'entrée la vitesse de rotation du moteur. Ceci est intéressant dans ce cas particulier car les capteurs de vitesse (capteurs tachymétriques) sont beaucoup moins coûteux que les capteurs de position.

En concluant la fonction de transfert $\frac{Y(s)}{X(s)}$ à partir de la figure (b), on pourra se convaincre que $C(s)$ peut jouer sur la stabilité et les performances ($C(s)$ modifie en effet le dénominateur de la FTBF). Par contre, à partir de $\frac{\epsilon(s)}{X(s)}$ le correcteur ne permet pas d'améliorer la précision ou de réduire l'erreur statique. Comme il y a bouclage, on pourra cependant faire du rejet de perturbation ou améliorer la sensibilité paramétrique.

Pour pallier l'inconvénient non négligeable de ne pouvoir améliorer l'erreur statique, on associe la correction parallèle à la correction série comme l'indique la figure (d).

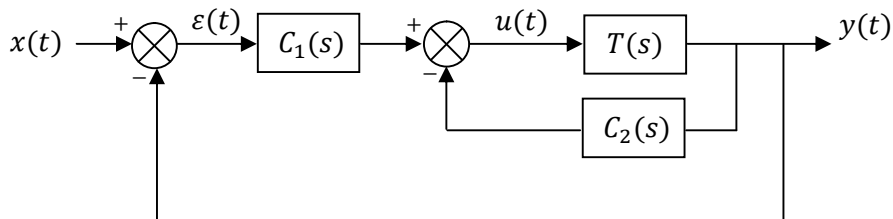


figure (d)

Le correcteur comprend alors deux parties distinctes $C_1(s)$ inséré dans la chaîne directe de la boucle principale et $C_2(s)$ qui réalise un retour de sortie et est inséré en parallèle sur $T(s)$ dans une boucle interne. Cette structure porte le nom de correction à deux degrés de liberté. Elle permet de bénéficier des propriétés des deux structures précédentes (série et parallèle).

IV. 5. Correcteurs de base :

Après avoir opter pour une configuration de correction, le concepteur doit choisir le type de correcteur qui, une fois les valeurs de ses éléments déterminées, répondra aux spécifications du cahier des charges. Mais même là, il existe une multitude de correcteurs disponibles. En pratique, on choisira le plus simple. Plus le correcteur est complexe, plus son coût est élevé, moins fiable il est, et plus difficile il est à réaliser.

Le choix d'un correcteur spécifique pour une application spécifique est toujours basé sur l'expérience du concepteur, et quelquefois sur l'intuition.

Le correcteur choisi, la tâche suivante consiste à déterminer les valeurs de ses paramètres. Ce sont les coefficients d'une ou plusieurs fonctions de transfert composant ce correcteur. L'approche de base est l'utilisation des outils d'analyse (Bode, Nyquist, lieu d'Evans, ...) pour déterminer comment les valeurs de chaque paramètre individuel influent sur le comportement global du système, et par conséquent sur ses performances. A partir de ces informations, les paramètres du correcteur sont sélectionnés tels que toutes les spécifications soient atteintes.

Les correcteurs industriels les plus utilisés peuvent être classés, selon leurs actions de correction, de la manière suivante :

- ☞ Correcteur à action proportionnelle (P)
- ☞ Correcteur à action intégrale (I)
- ☞ Correcteur à actions proportionnelle et intégrale (PI)
- ☞ Correcteur à action dérivée (D)
- ☞ Correcteur à actions proportionnelle et dérivée (PD)
- ☞ Correcteur à actions proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

La majorité de ces systèmes utilisent l'électricité ou un fluide sous pression tel que l'huile ou l'air comme source d'énergie. Ils sont également classés en fonction du type d'énergie utilisée dans l'opération (pneumatique, hydraulique, ou électrique) et choisis selon la nature du système à commander (ou à asservir) et selon les conditions d'opération (considérations de sécurité, de coût, de fiabilité, de précision, de poids, et de dimension).

Une interprétation du PID est qu'il agit selon les erreurs présente, passée et future. En effet, la partie proportionnelle de la commande se base sur l'erreur présente. L'intégrale de l'erreur cumule les erreurs passées. La dérivée de l'erreur (donc sa pente) prédit en quelque sorte vers où se dirige l'erreur dans le futur.

IV. 5. 1. Correcteur proportionnel (P) :

Le correcteur proportionnel élabore une grandeur de commande proportionnelle à l'écart :

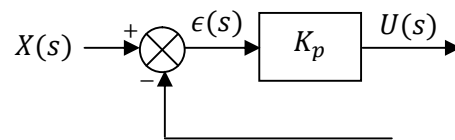
$$u(t) = K_p \varepsilon(t)$$

Le paramètre constant $K_p > 0$ est appelé gain du correcteur P. Le problème de la synthèse se résume à ajuster K_p de façon à remplir certaines spécifications.

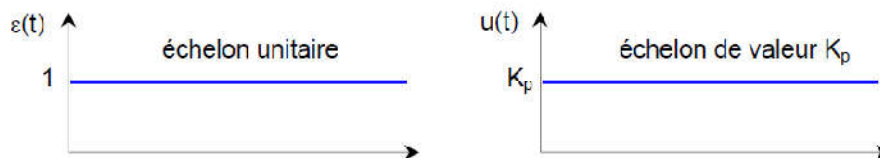
L'action sur le processus à commander est par conséquent importante si l'écart est élevé et modérée quand l'écart est faible. Cette philosophie correspond, dans une certaine mesure, à notre intuition.

La fonction de transfert du correcteur est : $C(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = K_p$

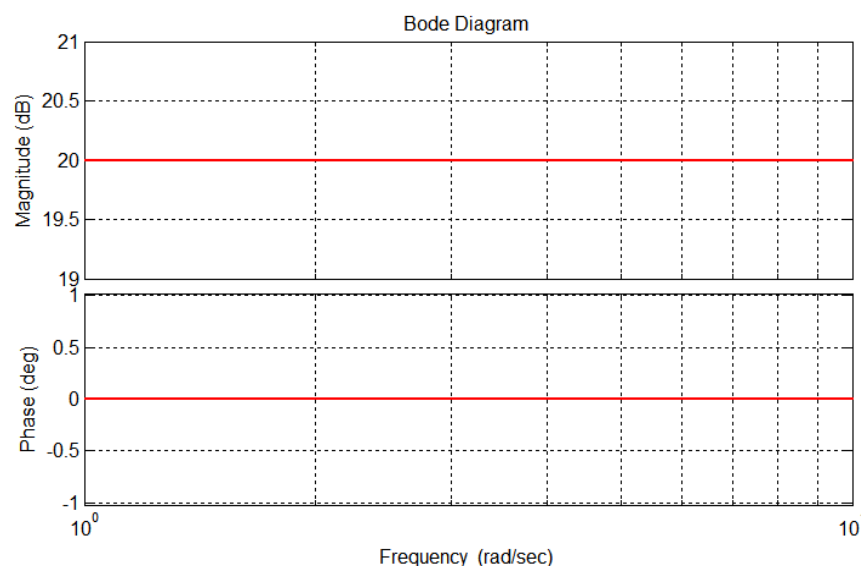
Quelques soient le mécanisme et la source d'énergie utilisés, le correcteur proportionnel est essentiellement un amplificateur à gain variable. Son schéma fonctionnel est celui de la figure suivante:



La figure ci-dessous donne la réponse indicielle du correcteur P.



Le diagramme de Bode du correcteur P est donné sur la figure suivante (ex : $K_p = 10$) :



L'action proportionnelle P crée un signal de commande $u(t)$ proportionnel au signal d'erreur $\varepsilon(t)$. Elle agit donc principalement sur le gain du système asservi et permet d'améliorer notablement la précision.

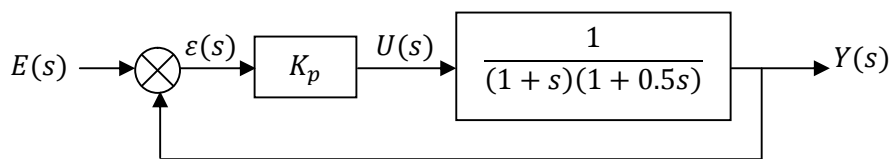
l'influence du gain statique sur les performances du système :

- ☞ Si $K_p < 1$, autrement dit s'il s'agit d'un atténuateur, on améliore la stabilité du système et on diminue son dépassement en boucle fermée. En revanche, la rapidité et la précision sont dégradées.
- ☞ Si $K_p > 1$, on améliore la rapidité et la précision du système en boucle fermée mais on diminue la stabilité (ce qui peut aller jusqu'à rendre le système instable) et on accroît son dépassement.

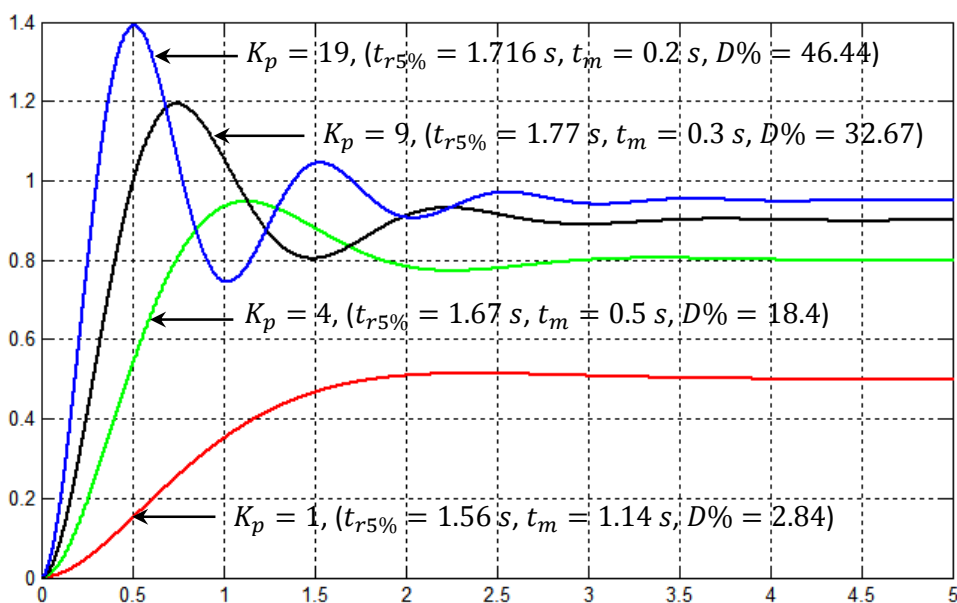
Le correcteur proportionnel P n'est généralement pas utilisé seul. On verra que tout correcteur possède au moins l'action proportionnelle.

Exemple :

Soit le schéma fonctionnel suivant :

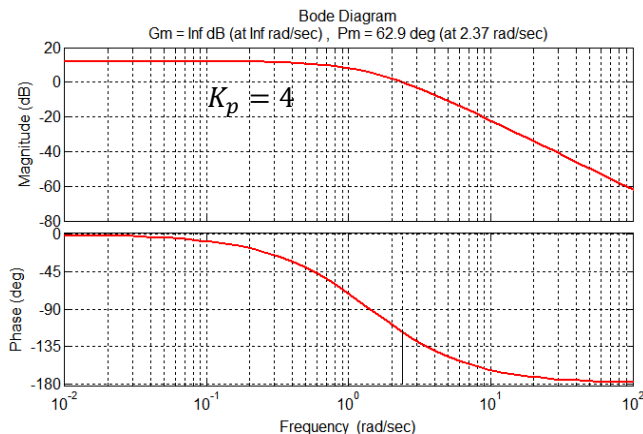
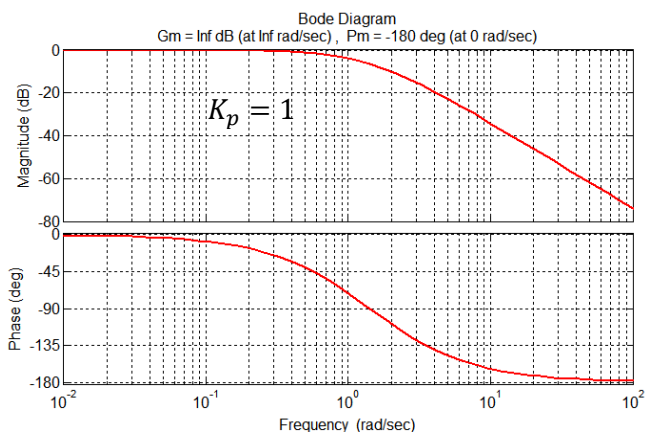


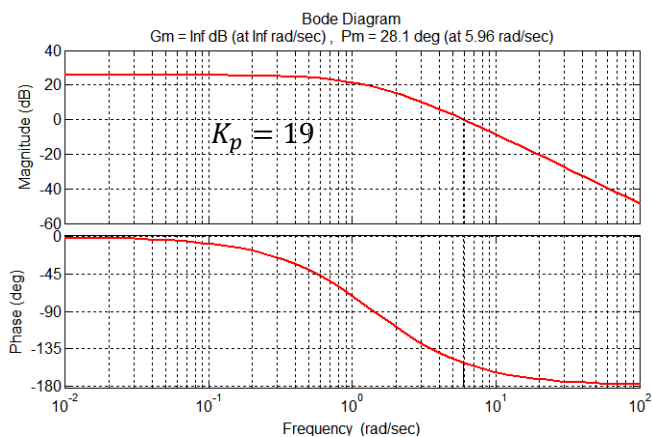
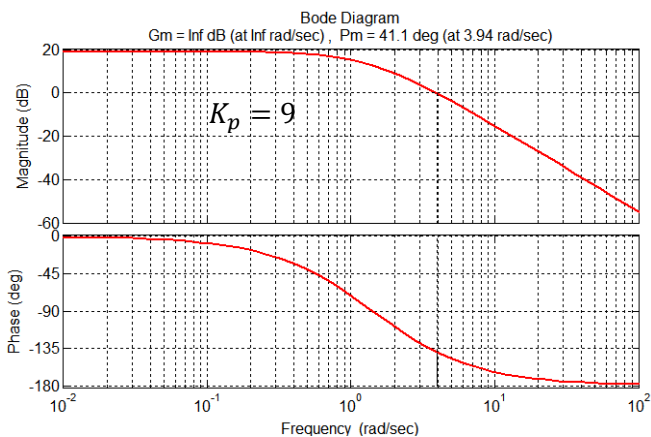
Pour différentes valeurs de K_p , les réponses indicielles $y(t)$ de la FTBF du système corrigé sont représentées sur la figure suivante :



On préfère souvent, à la notion de temps de réponse, celle de temps de montée.

Les diagrammes de Bode de la FTBO du système corrigé sont montrées sur les figures suivantes :





En conclusion, la marge de stabilité et la limitation du dépassement, en boucle fermée, sont améliorées par une diminution du gain statique en boucle ouverte, tandis que la rapidité et la précision s'en trouvent dégradées. Inversement, une augmentation du gain statique en boucle ouverte améliore la rapidité et la précision en boucle fermée, mais rend le système moins stable et augmente le dépassement.

IV. 5. 2. Correcteur à action intégrale (I) :

Pour un intégrateur pur la loi de commande $u(t)$ est de la forme :

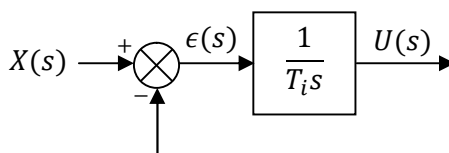
$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \quad \text{où : } u(t) = K_i \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$$

T_i est la constante de temps d'action intégrale.

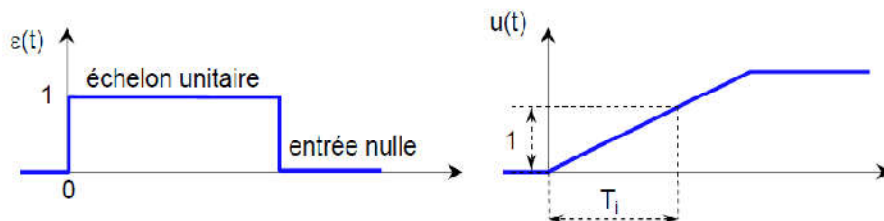
K_i est le gain d'intégration.

la FT du correcteur est : $C(s) = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{1}{T_i s}$

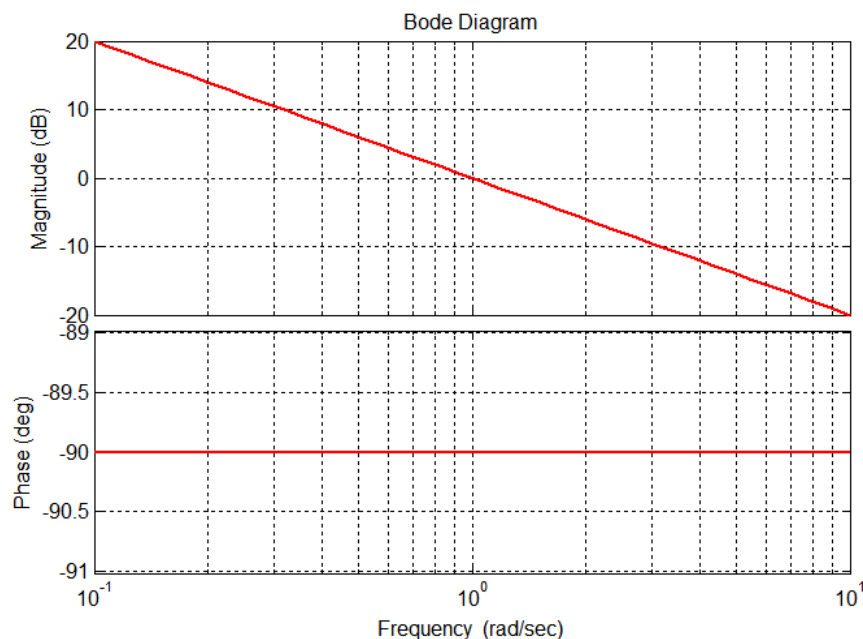
Son schéma fonctionnel est celui de la figure suivante :



La figure ci-dessous donne la réponse indicielle du correcteur I.



Le diagramme de Bode du correcteur I est donné sur la figure suivante :



L'intérêt principal de ce correcteur est d'ajouter dans la chaîne de commande une intégration. Nous savons que la présence d'une intégration dans la FTBO augmente la classe du système et réduit ou annule, selon le type d'entrée, l'erreur statique du système.

Les modifications apportées à la fonction de transfert modifient sans aucun doute les autres performances du système. Il nous reste à savoir dans quel sens elles évoluent. La simulation, sur un diagramme de Bode, des transformations subies par les courbes de gain et de phase après adjonction de ce correcteur peuvent nous renseigner sur ces modifications.

Considérons un système quelconque de fonction de transfert en boucle ouverte $T_{BO}(s)$. Les graphes représentent respectivement :

$$T_{BO}|dB = 20\log_{10}[T_{BO}(\omega)]$$

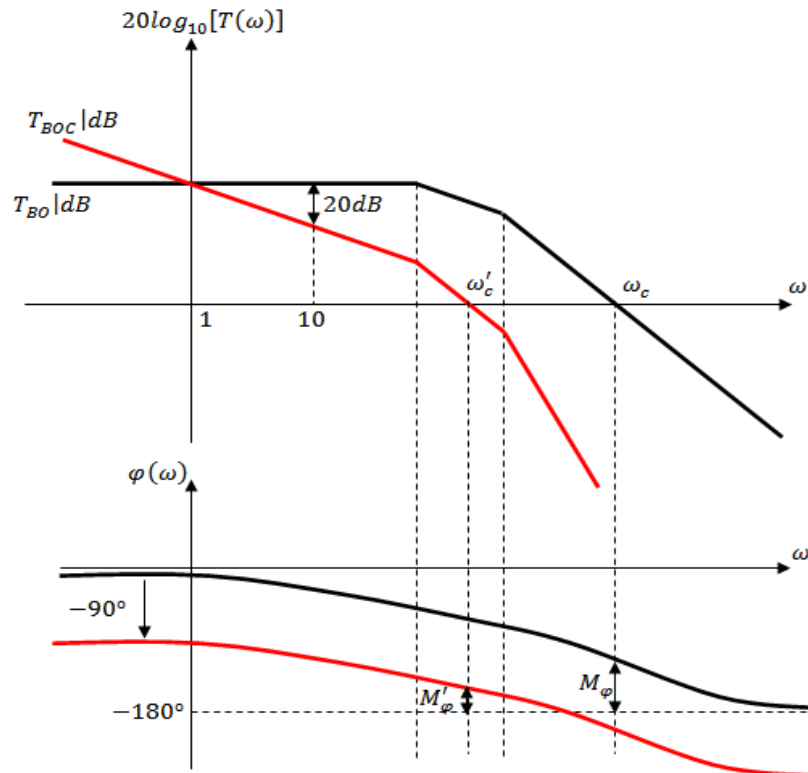
$$\varphi_{BO}(\omega) = \arg[T_{BO}(j\omega)]$$

Les graphes correspondant à la fonction de transfert corrigée se déduisent facilement des graphes initiaux

$$T_{BOC}|dB = 20\log_{10}[T_{BOC}(\omega)] = 20\log_{10}\frac{T_{BO}(\omega)}{\omega} = 20\log_{10}[T_{BO}(\omega)] - 20\log_{10}(\omega)$$

$$\varphi_{BOC}(\omega) = \arg[T_{BOC}(j\omega)] = \arg\frac{T_{BO}(j\omega)}{j\omega} = \varphi_{BO}(\omega) - \frac{\pi}{2}$$

On passe donc de la courbe de gain initiale $T_{BO}|dB$ à la courbe corrigée $T_{BOC}|dB$ en retranchant à chaque segment l'équivalent d'un segment de pente (1), autrement dit en décrémentant chaque pente initiale d'une unité. En remarquant par ailleurs, qu'à la pulsation $\omega = 10 \text{ rad/s}$, le gain a chuté de 20 dB , il nous est possible de tracer immédiatement le graphe correspondant à $T_{BOC}|dB$. Le diagramme de phase, quant à lui, est translaté de $\frac{\pi}{2}$ vers le bas.



On remarque que la pulsation de coupure à 0 dB diminue. On peut en déduire que le temps de montée augmente. L'intégrateur aura donc tendance à ralentir le système en boucle fermée.

De plus, malgré la diminution de ω_c , la marge de phase aura tendance à diminuer car la courbe de phase a changé et est susceptible de se retrouver très proche de -180° . La stabilité et la limitation du dépassement s'en trouvent dégradées.

En conclusion, seule la précision du système est améliorée par l'introduction d'un correcteur à action intégrale. Toutes les autres performances sont diminuées.

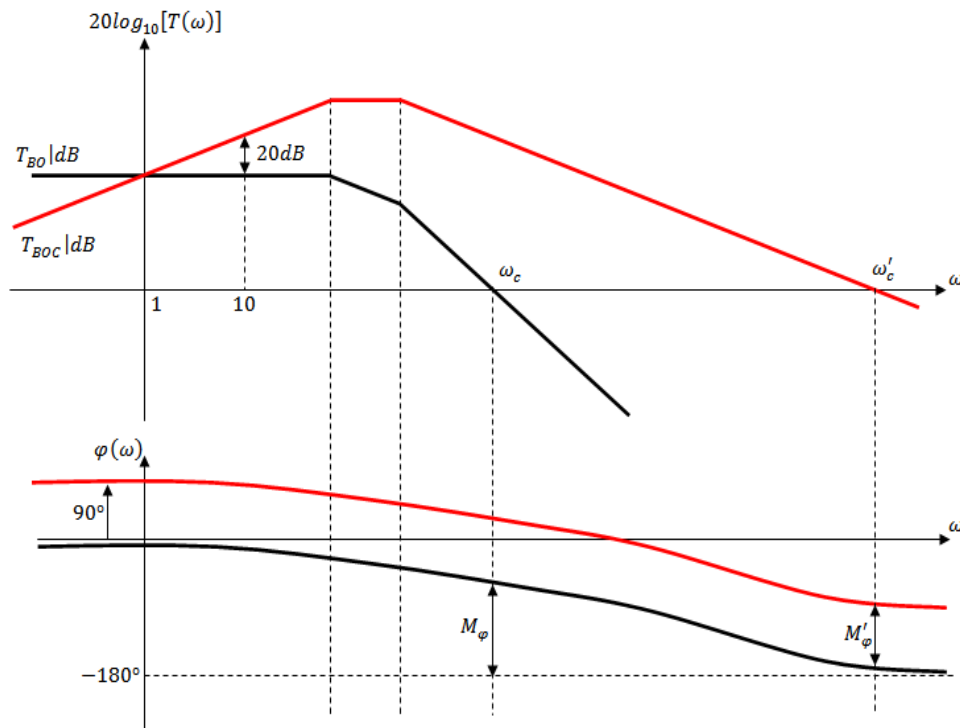
IV. 5. 3. Correcteur à action dérivée (D) :

Pour un dérivateur pur, la loi de commande est de la forme :

$$u(t) = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \text{ la FT est donc : } C(s) = T_d s$$

où : T_d appelée constante de temps de dérivation.

qui a pour mission d'ajouter un zéro nul à la fonction de transfert en boucle ouverte. Intuitivement, nous pouvons imaginer que son action est l'inverse de celle de l'intégrateur. Vérifions cela sur un diagramme de Bode.



Considérons à nouveau un système quelconque de fonction de transfert en boucle ouverte $T_{BO}(s)$. Les graphes représentent respectivement :

$$T_{BO}|dB = 20\log_{10}[T_{BO}(\omega)]$$

$$\varphi_{BO}(\omega) = \arg[T_{BO}(j\omega)]$$

Les graphes correspondant à la fonction de transfert corrigée se déduisent facilement des graphes initiaux

$$T_{BOC}|dB = 20\log_{10}[T_{BOC}(\omega)] = 20\log_{10}[\omega T_{BO}(\omega)] = 20\log_{10}[T_{BO}(\omega)] + 20\log_{10}(\omega)$$

$$\varphi_{BOC}(\omega) = \arg[T_{BOC}(j\omega)] = \arg[j\omega T_{BO}(j\omega)] = \varphi_{BO}(\omega) + \frac{\pi}{2}$$

On passe donc de la courbe de gain initiale $T_{BO}|dB$ à la courbe corrigée $T_{BOC}|dB$ en ajoutant à chaque segment l'équivalent d'un segment de pente (1), autrement dit en incrémentant chaque pente initiale d'une unité. En remarquant par ailleurs, qu'à la pulsation $\omega = 10 \text{ rad/s}$, le gain a augmenté de 20 dB , il nous est possible de tracer immédiatement le graphe correspondant à $T_{BOC}|dB$. Le diagramme de phase, quant à lui, est translaté de $\frac{\pi}{2}$ vers le haut.

On remarque que la pulsation de coupure à 0 dB augmente. on peut en déduire que le temps de montée diminue. Le dérivateur aura donc tendance à accélérer le système en boucle fermée.

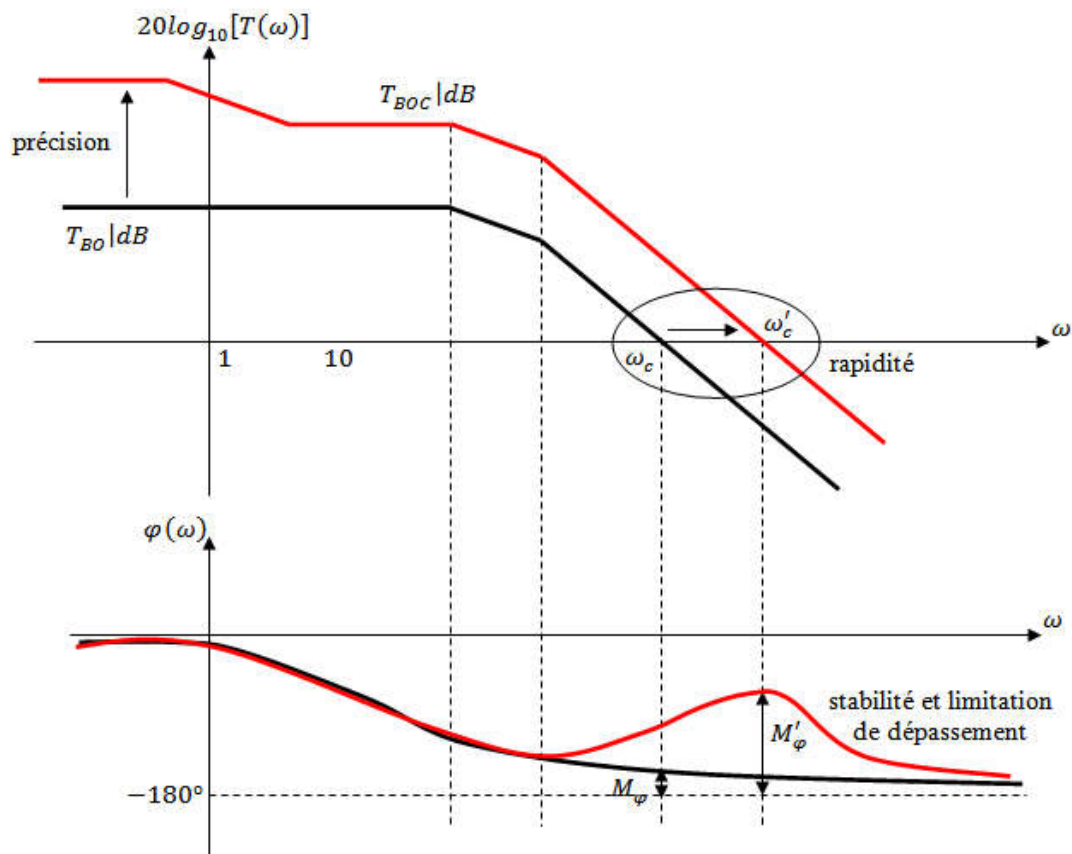
L'augmentation de ω_c influe également sur la marge de phase mais cette influence dépend de l'ordre du système. En effet, la remontée de phase de $+\frac{\pi}{2}$ peut avoir deux effets différents : si le système possède un ordre élevé, le déphasage peut tendre vers des valeurs négatives très importantes ; la remontée de phase peut alors être sans effet sur l'amélioration de la marge de phase, voire la dégrader et même rendre le système instable. Si au contraire l'ordre du système est faible, la remontée de phase peut se traduire par une nouvelle courbe $\varphi_{BOC}(\omega)$ qui tend vers une valeur située largement au dessus de $-\pi$.

Pour finir, la précision du système, liée au gain statique va être dégradée par l'action dérivée puisque le gain aux basses fréquences diminue fortement.

En conclusion, seule la rapidité du système est améliorée par l'introduction d'un correcteur à action dérivée. Toutes les autres performances sont diminuées ou susceptibles de l'être.

IV. 5. 4. Actions d'un correcteur idéal :

Reprenons le diagramme de Bode étudié précédemment et essayons d'imaginer quel serait l'action d'un correcteur idéal.



Pour une meilleure précision, il faudrait pouvoir augmenter le gain statique uniquement au voisinage des basses fréquences. Pour une meilleure rapidité, il nous faudrait choisir une pulsation de coupure à 0 dB un peu plus grande et pour améliorer la marge de phase, l'idéal serait de pouvoir corriger la courbe de phase uniquement au voisinage de ω_c ; toutes ces modifications devant, bien sûr, être localisées uniquement dans certaines zones de fréquence. Car telle est l'inconvénient majeur de chacune des actions correctives élémentaires que nous venons d'étudier : leur action porte sur l'ensemble du spectre de fréquences de 0 à l'infini et toute action correctrice menée à un endroit précis pour corriger telle ou telle performance agit également à d'autres endroits en dégradant certaines autres. Les correcteurs idéaux, s'ils existent, devront être caractérisés par une action localisée en vue de corriger une des performances, sans influencer les autres, chose que ne peuvent pas réaliser des correcteurs simples qui modifient l'ensemble du diagramme de Bode.

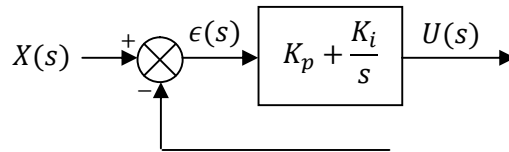
IV. 5. 5. Correcteur Proportionnel-Intégral (PI) :

La relation entre la commande $u(t)$ et le signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est :

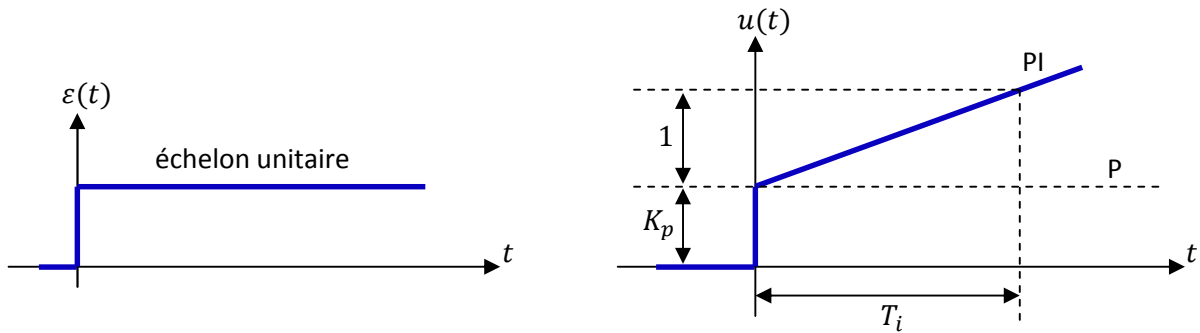
$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + K_i \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = K_p + \frac{K_i}{s}$$

où : $u(t) = K_p \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right) \Rightarrow \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = K_p \frac{1+T_i s}{T_i s}$

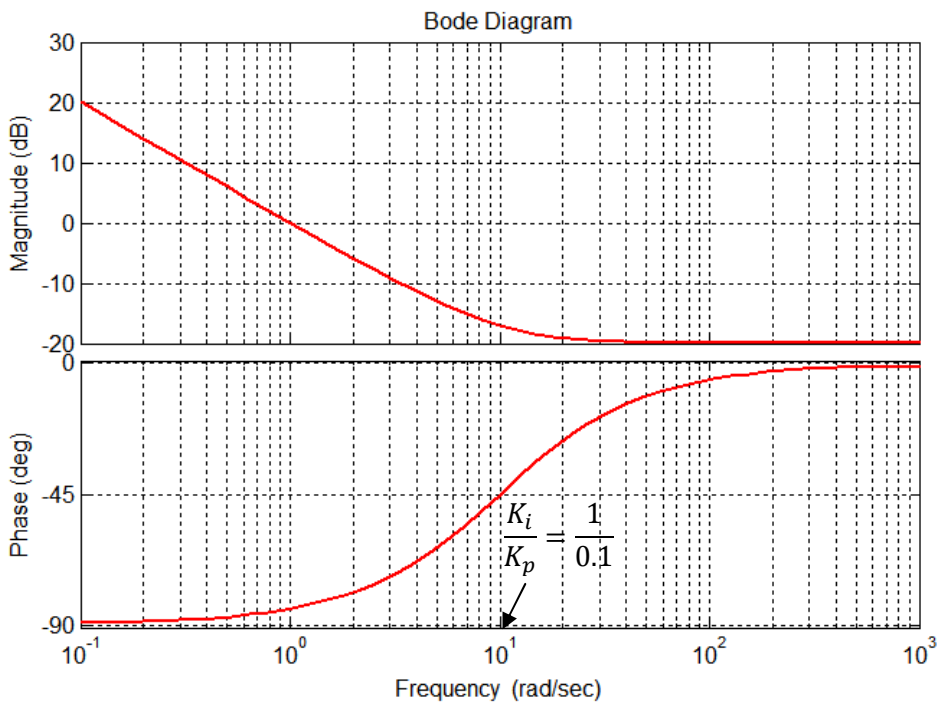
Avec : K_p est le gain proportionnel,
 K_i est le gain intégral,
 T_i est la constante de temps d'intégration.



La figure suivante donne la réponse indicielle du correcteur PI :



Le diagramme de Bode du correcteur PI est représenté sur la figure ci-dessous :

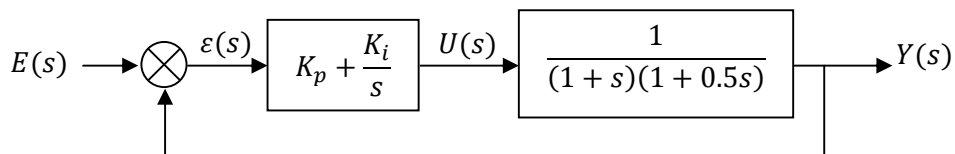


La réponse indicielle montre qu'un correcteur PI assure une transmission instantanée du signal d'erreur $\varepsilon(t)$, suivi d'une intégration de ce signal.

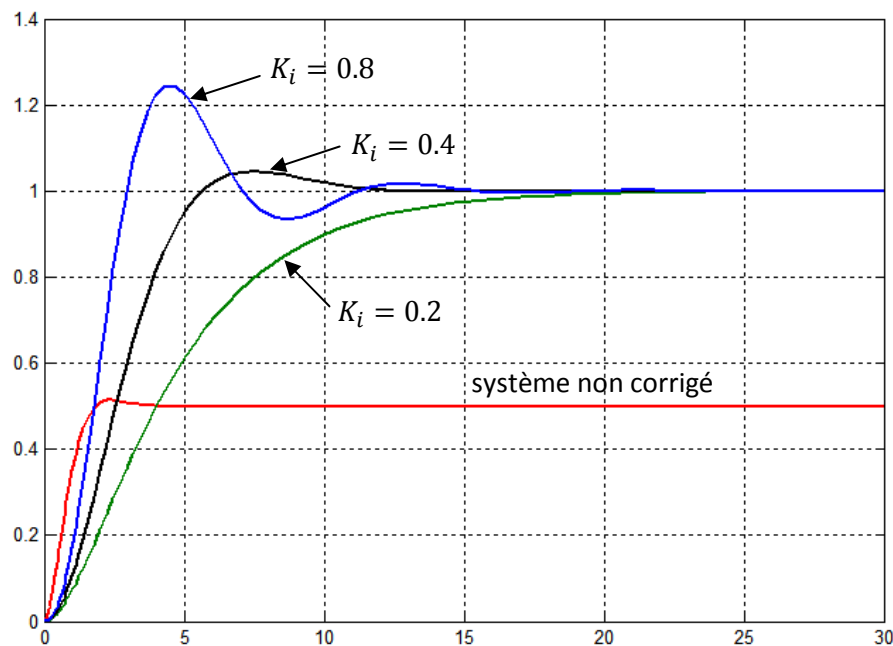
- ☞ Ce correcteur sera utilisé chaque fois qu'une erreur permanente doit être annulée ou minimisée, c'est à dire une amélioration de la précision du système. En effet, il introduit une augmentation du gain global du système aux basses fréquences.
- ☞ Par ailleurs, le correcteur PI a un effet déstabilisant en raison du pôle à l'origine (déphasage supplémentaire de -90°). Mais, Le zéro supplémentaire introduit tend à minimiser cette instabilité.
- ☞ Il est recommandé de placer le zéro $\left(-\frac{K_i}{K_p}\right)$ du correcteur aux basses fréquences de sorte que le déphasage supplémentaire introduit par le correcteur n'affecte pas beaucoup le déphasage global du système corrigé.
- ☞ K_p sera choisi de manière à modifier, éventuellement, la fréquence de coupure du système corrigé et donc sa marge de phase.
- ☞ Très souvent, le zéro $\left(-\frac{K_i}{K_p}\right)$ est choisi de manière à compenser la constante de temps dominante du système initial de sorte que la boucle fermée gagne en rapidité.

Exemple :

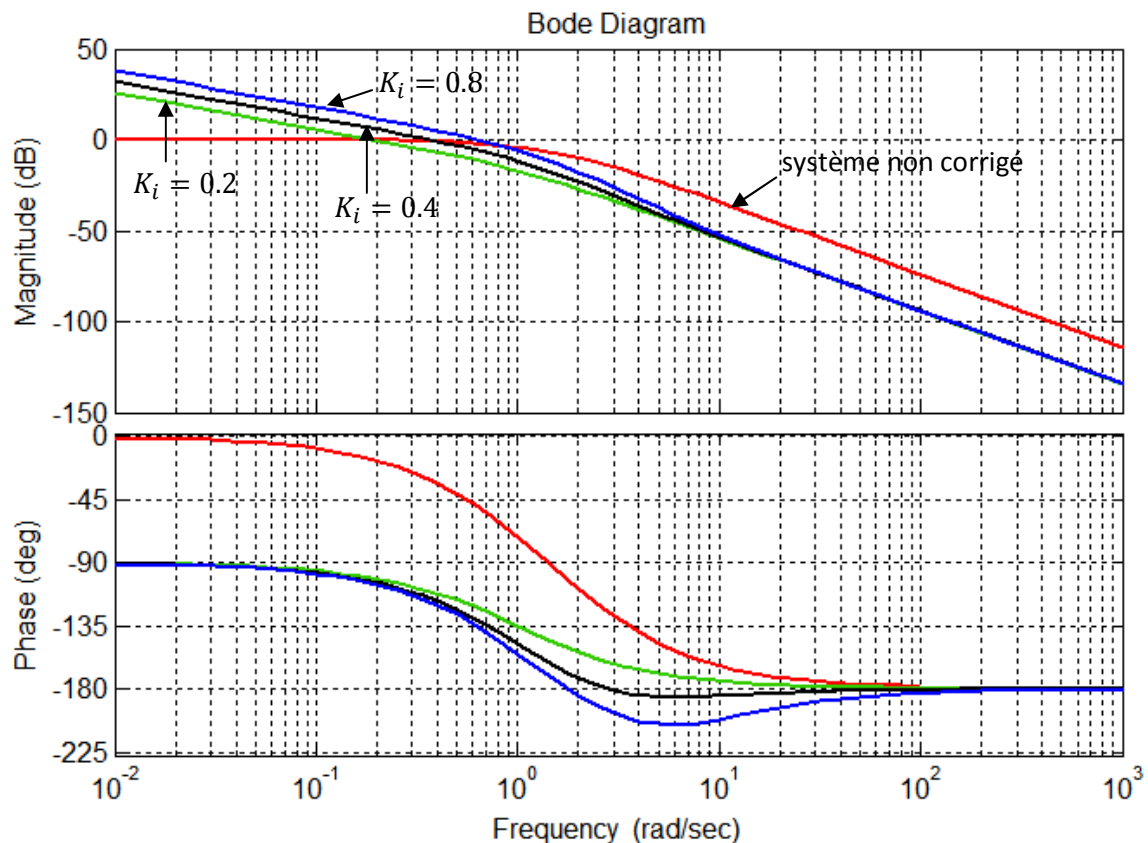
Soit à nouveau le système de l'exemple précédent, en utilisant maintenant un correcteur PI :



La figure suivante donne la réponse indicielle $y(t)$ pour $K_p = 0.1$ et $K_i = 0.2, 0.4$ et 0.8



Les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée, pour différentes valeurs de K_p et K_i , sont représentés sur la figure suivante :



On constate que l'augmentation de K_i , entraîne :

- ☞ une amélioration de la précision par annulation de l'erreur statique,
- ☞ une décroissance du temps de montée,
- ☞ mais également une augmentation du temps d'établissement (correction lente), une augmentation du dépassement et une diminution de la marge de phase (augmentation de l'instabilité du système).

Dans le cas de l'exemple étudié, le système initial est composé de 2 pôles (-1 et -2). Le correcteur PI a un zéro qu'il est préférable de positionner le plus proche possible du pôle à l'origine. En effet :

- ☞ si le zéro est exactement à l'origine ($-\frac{K_i}{K_p} = 0$), il compense le pôle qui s'y trouve. Cela revient à faire une correction de type proportionnel en faisant varier K_p . L'erreur statique est, alors, non nulle pour une entrée échelon. Le système n'a que 2 pôles en boucle fermée.
- ☞ d'une manière générale, plus le zéro se déplace vers la gauche du plan complexe, moins importante est la marge de phase du système corrigé (l'apport négatif de la phase du correcteur est de plus en plus important), plus importante sont les oscillations de la sortie, et plus de temps met le système pour s'amortir.

IV. 5. 6. Correcteur Proportionnel-Dérivé idéal (PD) :

La relation entre la sortie $u(t)$ et le signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est :

$$u(t) = K_p \varepsilon(t) + K_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad \text{c'est-à-dire, } \frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = K_p + K_d s$$

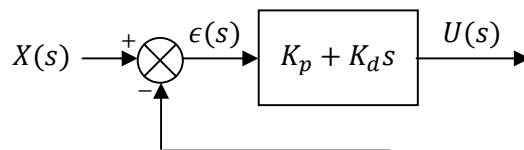
Où : $u(t) = K_p \left(\varepsilon(t) + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)$ c'est-à-dire, $\frac{U(s)}{\varepsilon(s)} = K_p (1 + T_d s)$

avec : K_p est le gain proportionnel,

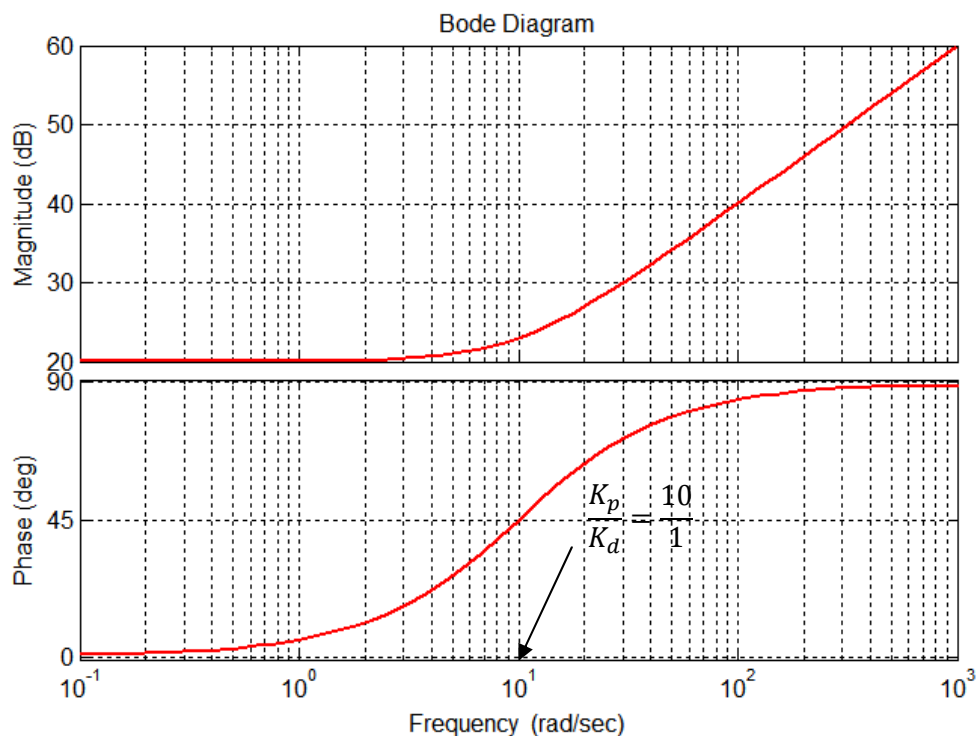
K_d est le gain dérivé,

T_d est la constante de temps de dérivation.

Son schéma fonctionnel est celui de la figure suivante :



Le diagramme de Bode du correcteur PD est représenté sur la figure suivante :



Intuitivement, la commande dérivée n'affecte l'erreur statique du système que si cette erreur varie avec le temps. Si l'erreur statique est constante, sa dérivée, par rapport au temps, est nulle, l'élément de dérivation du correcteur ne produit aucune entrée pour le processus. Mais si l'erreur statique croît avec le temps, $u(t)$ est de nouveau développé proportionnellement à $\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$, ce qui réduit l'amplitude de l'erreur. La fonction de transfert d'un PD montre clairement que ce correcteur n'altère pas la classe du système, l'erreur statique d'un système à retour unitaire dépendant directement de cette classe.

L'intérêt principal de la correction dérivée est son effet stabilisant. En régime dynamique, elle s'oppose aux grandes variations de l'erreur (donc aux oscillations), et permet donc de stabiliser le système et d'améliorer le temps de réponse.

Récapitulatif des effets de l'action de correction PD :

- ☞ Amélioration de l'amortissement et réduction du dépassement.
- ☞ Réduction du temps de montée et du temps d'établissement.
- ☞ Augmentation de la bande passante.
- ☞ Amélioration de la marge de phase et de la marge de gain.
- ☞ Possibilité d'accentuation des bruits aux hautes fréquences (filtre passe haut).

Exemple :

Soit le système de la figure suivante :

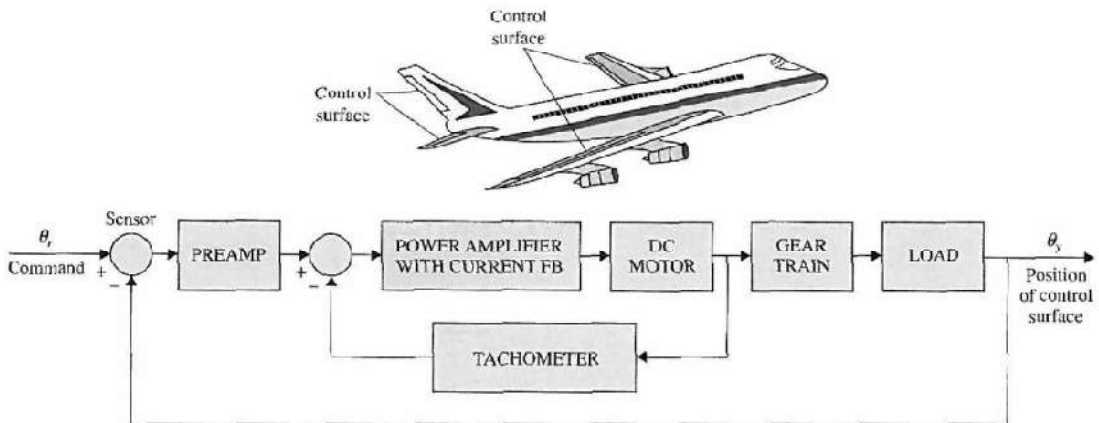
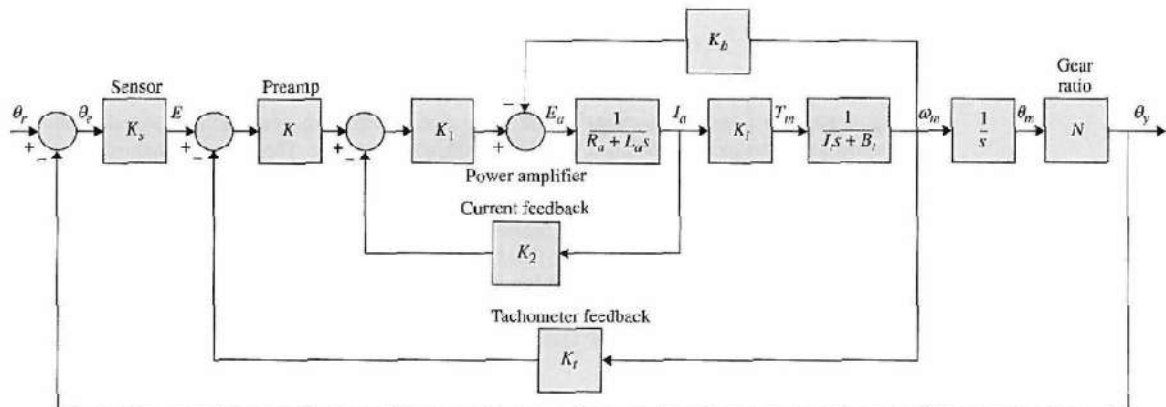


Figure 4-78 Block diagram of an attitude control system of an aircraft.



$$\frac{\theta_y}{\theta_e} = \frac{K_s K_1 K_i K N}{s[L_a J_t s^2 + (R_a J_t + L_a B_t)s + R_a B_t + K_1 K_2 B_t + K_i K_b + K K_1 K_t K_i]}$$

En négligeant l'inductance de l'induit L_a et après substitution des paramètres dans la fonction de transfert précédente, on trouve :

$$\frac{\theta_y}{\theta_e} = T(s) = \frac{4500K}{s(s + 361.2)}$$

Laissez-nous de définir les spécifications de performance comme suit :

- L'erreur permanent due à une entrée de vitesse de pente unitaire ≤ 0.000443
- Le dépassement maximal $\leq 5\%$
- Le temps de monté $t_m \leq 0.005 \text{ sec}$
- Le temps de réponse $t_{r5\%} \leq 0.005 \text{ sec}$

IV. 5. 7. Correcteur Proportionnel-Dérivé réel (avance de phase) :

Le correcteur PD idéal est purement théorique, un système physique ne peut pas avoir un numérateur de degré supérieur au dénominateur.

Ainsi, l'action dérivée peut poser des problèmes d'amplification du bruit dans les hautes fréquences, c'est pour cela que l'on adjoint souvent à l'action dérivée un filtre passe bas du premier ordre. Le transfert d'un PD filtré (avance de phase) est alors :

$$C(s) = K_p \frac{1+T_d s}{1+\tau s} \quad \text{avec : } \tau \ll T_d$$

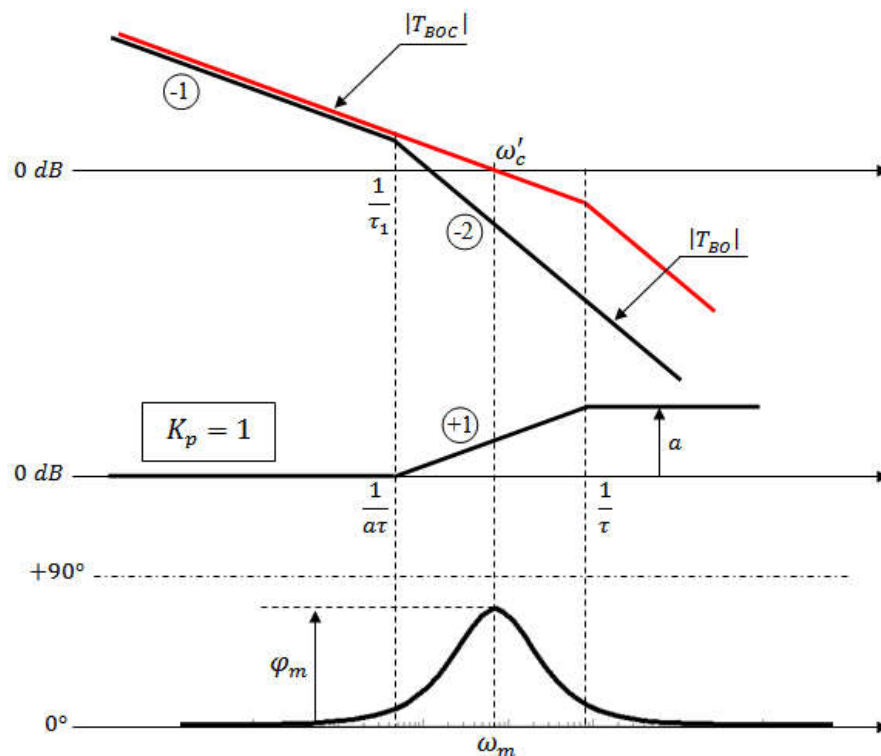
où : $C(s) = K_p \frac{1+a\tau s}{1+\tau s}$

avec : $a > 1$ de sorte que le zéro agisse (en fréquence) avant le pôle.

Le correcteur à avance de phase est utilisé pour améliorer la marge de phase, ainsi il présente une pente nulle en hautes fréquences et donc l'atténuation naturelle du système (pente HF de $|T(j\omega)|$) ne sera pas modifiée.

Le schéma suivant montre qu'un tel correcteur a pour effet de produire une avance de phase dans la région critique, c'est-à-dire au voisinage de la pulsation de coupure du gain souhaitée ω'_c .

Il permet donc de rendre le système bouclé plus stable, en accroissant la marge de phase, à bande passante donnée, ou d'augmenter la bande passante, donc de diminuer le temps de montée de la réponse indicielle, à marge de phase donnée.



On a pris dans la figure ci-dessus $\alpha\tau = \tau_1$, la plus grande constante de temps du procédé. Bien que ce réglage soit courant, il n'est pas impératif.

On remarque que, pour $K_p = 1$, le gain apporté par ce correcteur aux fréquences élevées vaut a .

Remarque : Le correcteur à avance de phase a une influence sur le diagramme de gain du système. La pulsation de coupure à 0 dB du système corrigé est légèrement plus grande que celle du système non corrigé. Par conséquent, la remontée de phase maximale que l'on a calculée ne se produit plus véritablement à ω'_c . On a alors le choix de négliger cette augmentation ou encore de l'anticiper en majorant la remontée de phase calculée de quelques degrés, par exemple 5° .

Exemple :

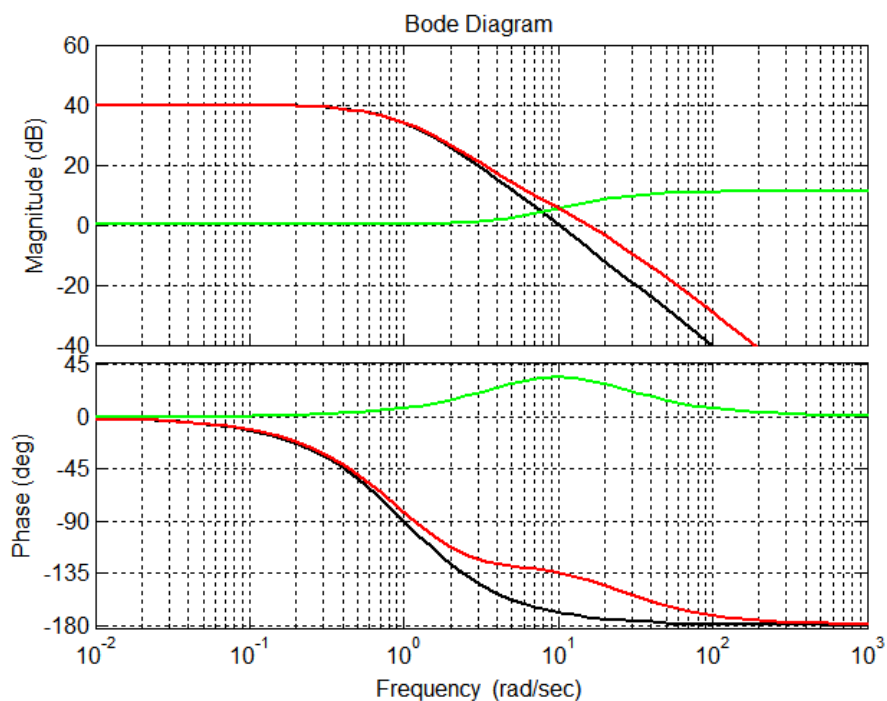
Considérons un système de fonction de transfert $T(s)$ placé dans une boucle à retour unitaire, avec :

$$T(s) = \frac{100}{(1+s)^2}$$

On souhaite corriger ce système de manière à ce que sa marge de phase soit égale à 45° .

Sa marge de phase avant correction vaut 11.5°

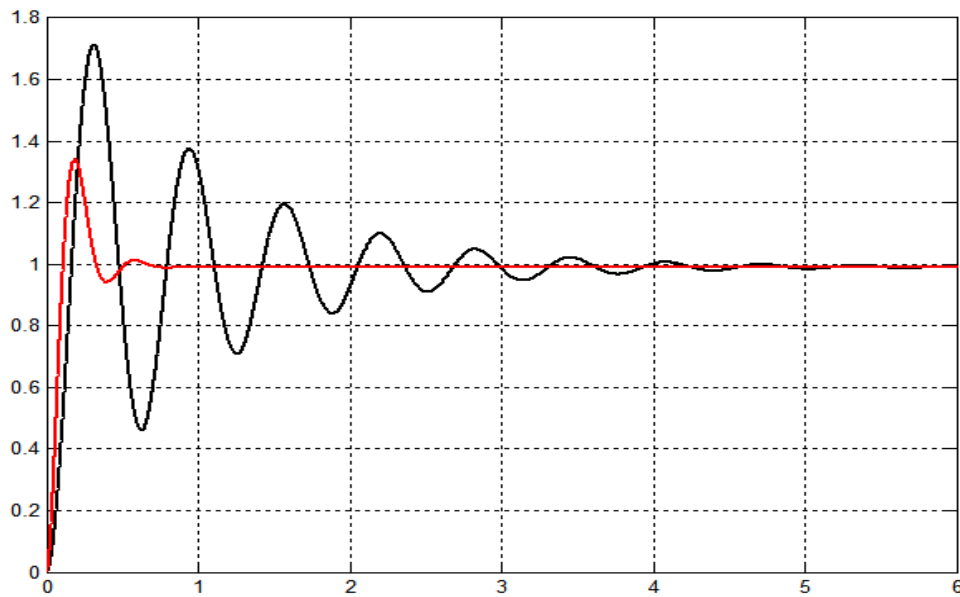
La marge de phase est insuffisante. Pour la corriger, nous devons procéder à une remontée de phase de 33.5° à la pulsation ω_c .



$$\text{Système initial : } \begin{cases} M_\phi = 11.5^\circ \\ \omega_c = 9.95 \text{ rad/s} \end{cases}$$

$$\text{Système corrigé : } \begin{cases} M_\phi = 39.3^\circ \\ \omega_c = 15.5 \text{ rad/s} \end{cases}$$

La figure suivante montre la réponse indicielle du système non corrigé et du système corrigé.

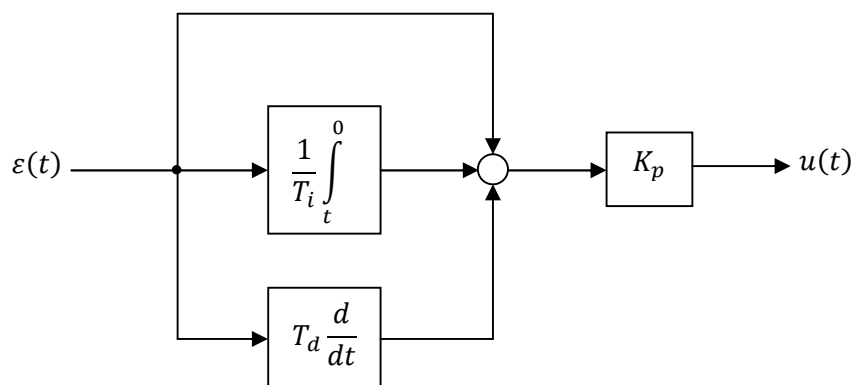


IV. 5. 8. Correcteur Proportionnel-Intégral-Dérivé (PID) :

Le correcteur PID combinant les trois actions de base permet de bénéficier des avantages du correcteur PD comme de ceux du PI. Ainsi, on pourra améliorer la précision, propriété que l'on n'avait pas avec le correcteur PD, tout en ayant de la latitude pour régler la marge de phase, latitude que nous n'avions pas avec le PI. La fonction de transfert d'un correcteur PID est donnée par :

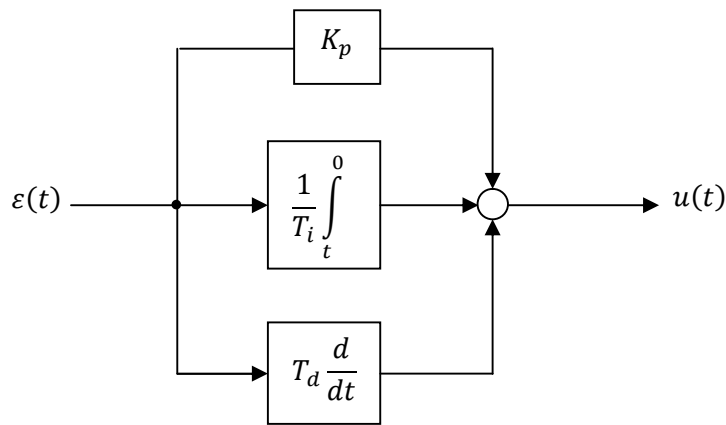
$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

La synthèse du régulateur PID se résume aux choix des constantes $K_p > 0$, $T_i > 0$ et $T_d > 0$ afin de remplir certaines spécifications. Son schéma fonctionnel apparaît dans la figure suivante :



Cette forme de régulateur PID est appelée structure mixte.

On peut également trouver la forme, dite structure parallèle : $C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$



Le terme dérivé incorporé dans le régulateur PID est $T_d s$. Cette fonction de transfert est irréalisable physiquement car elle est non causale. Dans la pratique, la dérivation est réalisée sous forme filtrée :

$$\frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1}$$

Un filtre de constante de temps $\frac{T_d}{N}$ est donc inséré. Ce filtre, en plus de résoudre le problème de la causalité, atténue les divers bruits se propageant dans l'architecture à rétroaction. Le nombre N est généralement fixé à l'avance entre 3 et 20; la valeur $N = 10$ est fréquemment adoptée. Il est recommandé d'insérer un tel filtre dans le régulateur; par contre, au niveau de la synthèse de ce dernier, la constante de temps $\frac{T_d}{N}$ peut normalement être négligée.

Par ailleurs, lorsque la consigne $y_c(t)$ varie brusquement, notamment lors d'un saut unitaire, la dérivée $\frac{d\varepsilon}{dt}(t)$ de l'écart $\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t)$ est sujette à de grandes amplitudes. Pour remédier à cette difficulté, la dérivée est prise uniquement sur la grandeur à commander $y(t)$.

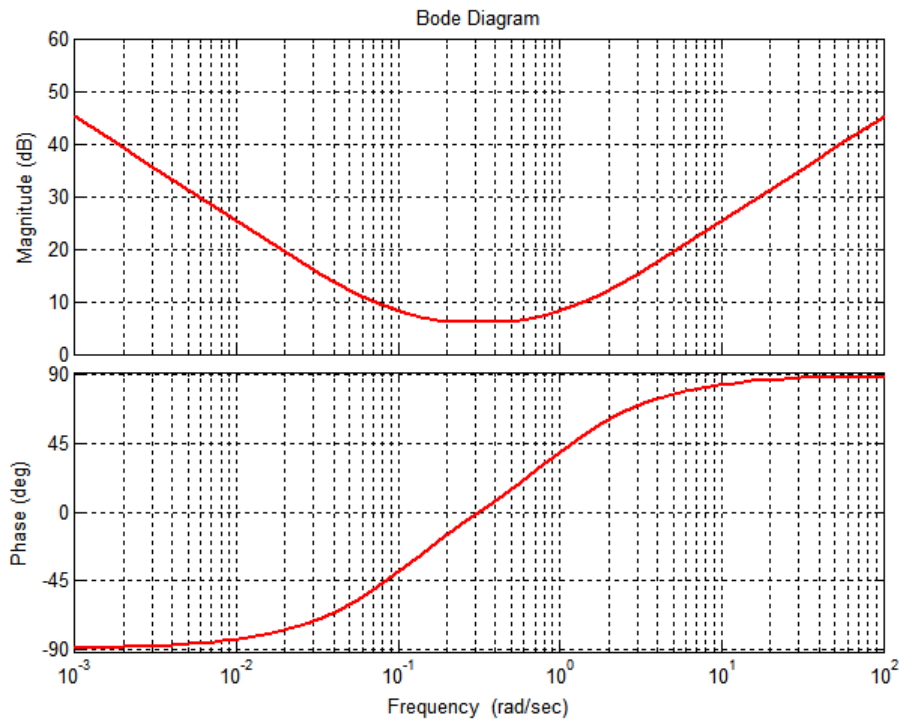
$$u(t) = K_p \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau - T_d \frac{dy}{dt}(t) \right)$$

Cette version de régulateur PID est appelée forme à dérivation séparée.

Il importe de mentionner que le régulateur PID est abondamment répandu, couvrant environ les 90% des besoins industriels. C'est le régulateur standard par excellence.

Remarque : dans la fonction de transfert de $C(s)$, lorsque $\omega \rightarrow 0$, $C(s)$ se comporte comme $\frac{K_p}{T_i s}$, on retrouve donc l'action intégrale en basse fréquence. Lorsque $\omega \rightarrow \infty$, $C(s)$ se comporte comme $K_p T_d s$, on retrouve l'action dérivée en haute fréquence.

La réponse fréquentielle d'un correcteur Proportionnel/Intégral/Dérivé est représentée sur la figure suivante :



Nous avons vu qu'un correcteur à action proportionnelle (K_p) apporte de la rapidité au système en réduisant le temps de montée. il réduit également l'erreur statique, mais ne l'élimine pas. L'action intégrale (K_i) aura pour effet d'éliminer l'erreur statique. Elle ramène donc de la précision, mais dégrade la réponse transitoire. L'action dérivée (K_d) améliore la stabilité du système, réduit les dépassements et améliore le régime transitoire.

Exemple :

Pour la commande de position d'un entraînement électrique qui décrit par l'équation différentielle suivante :

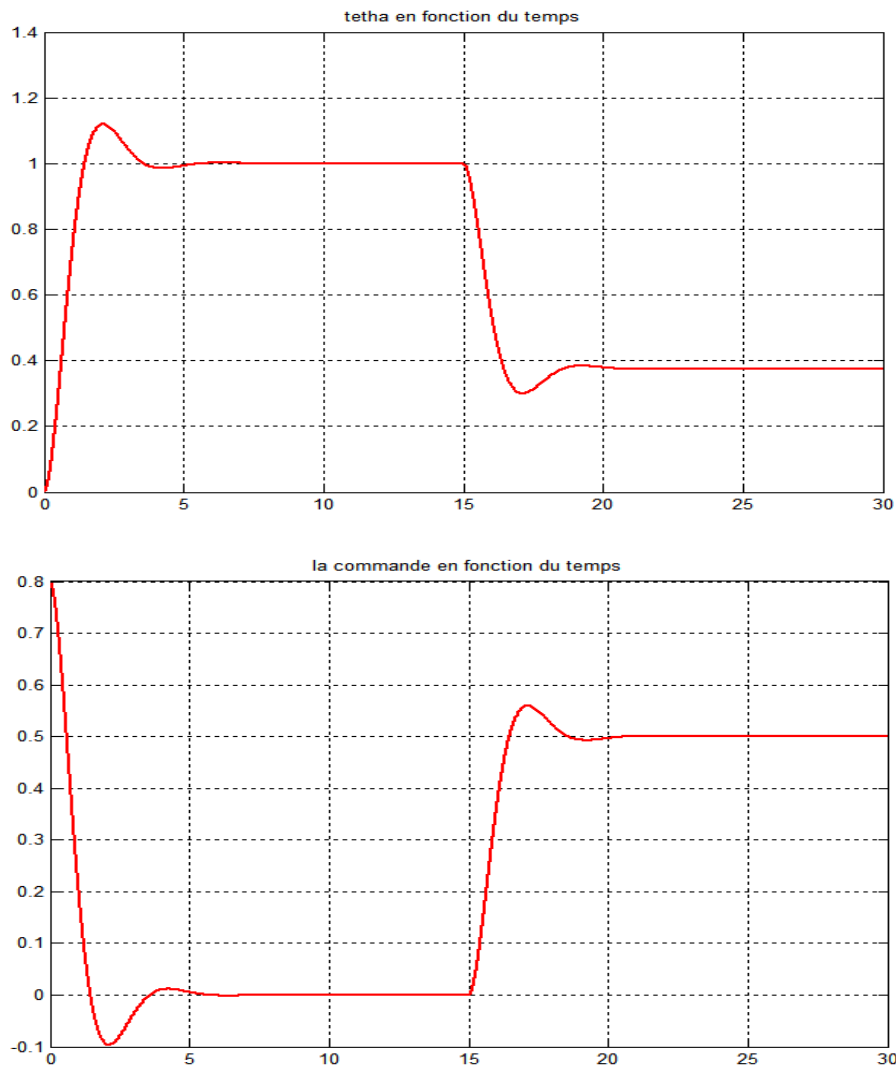
$$\ddot{\theta}(t) + \frac{1}{J} \left(f + \frac{(K\Phi)^2}{R} \right) \dot{\theta}(t) = \frac{K\Phi}{JR} \left(u(t) - \frac{R}{K\Phi} C_r \right)$$

on a les valeurs numériques suivantes :

$$\frac{1}{J} \left(f + \frac{(K\Phi)^2}{R} \right) = 2$$

$$\frac{K\Phi}{JR} = 4$$

Dans la commande proportionnelle, l'écart permanent entre la consigne (constante) et la position est nulle en asservissement, mais différente de zéro en régulation. En effet, en présence d'un couple résistant parasite constant, un écart permanent non nul est nécessaire afin d'alimenter le moteur qui doit générer un couple égal à la perturbation.



Dans le but d'éliminer ce statisme de régulation, on place un terme intégral dans le régulateur, de même qu'un terme dérivé pour provoquer une anticipation :

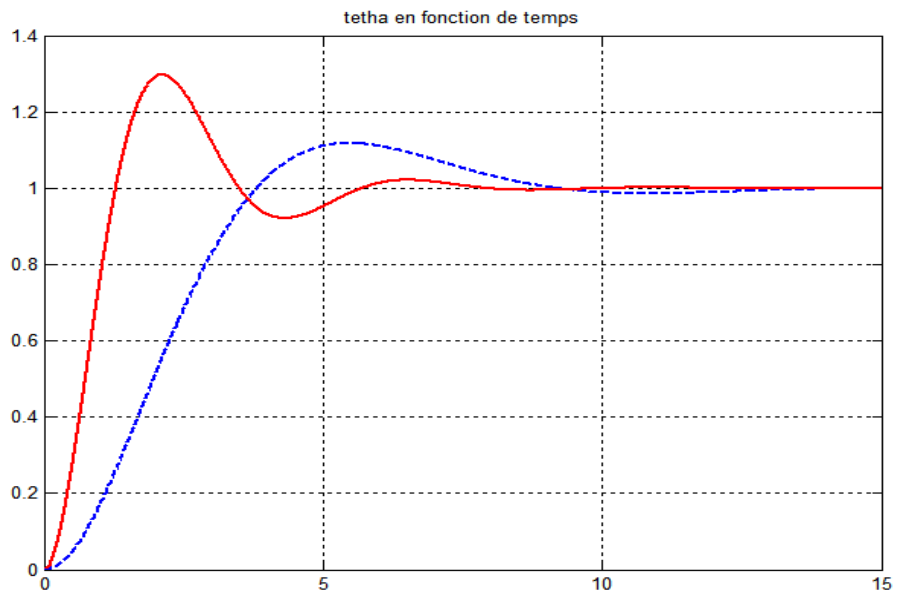
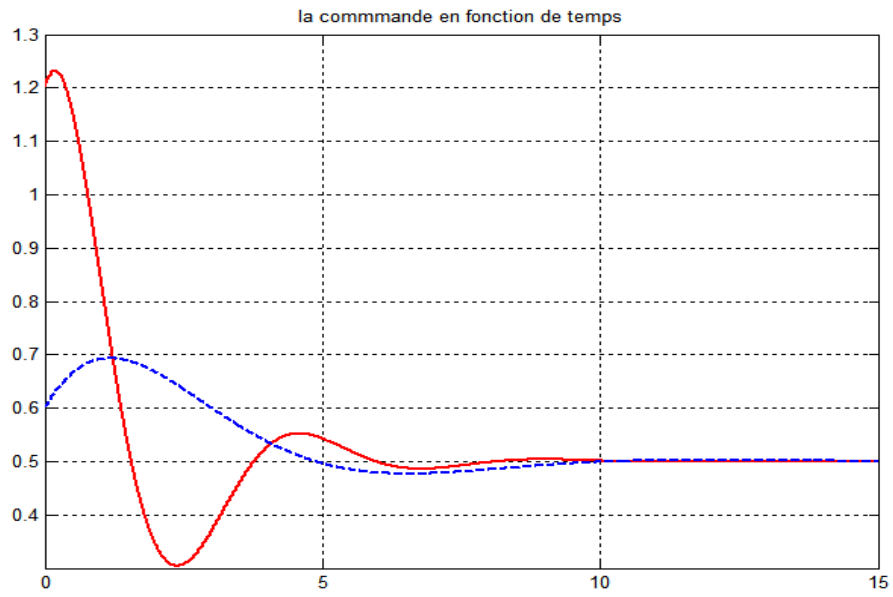
$$C(s) = 1.2 \left(1 + \frac{1}{s} + 0.25s \right)$$

Les résultats sont reportés dans la figure suivante pour l'entraînement déjà examiné (trait plein). Par ailleurs, une perturbation constante $-\frac{R}{K\Phi} C_r = -0.5$ affecte le processus dès les premiers instants.

Un régulateur PID moins agressif est :

$$C(s) = 0.6 \left(1 + 0.5 \frac{1}{s} + 0.5s \right)$$

La réponse qui en découle apparaît en traitillé dans la figure.



Chapitre V

Choix et dimensionnement des régulateurs

V. 1. Introduction :

Un critère de réglage d'une boucle de régulation doit permettre de répondre au plus grand nombre de contraintes exigées par le cahier des charges du procédé à réguler.

Les besoins en régulation ou asservissement étant très variés, de nombreuses stratégies de réglage d'une boucle sont possibles. Les exigences du cahier des charges sont décrites soit dans le domaine temporel, soit dans le domaine fréquentiel. Le critère de réglage est alors fixé à partir soit de la forme de la réponse temporelle souhaitée pour un type d'excitation à l'entrée (par exemple la consigne est un échelon de position), soit à partir des marges de stabilité (marge de gain et de phase, facteur de résonance). Le critère précision est, bien entendu, intrinsèquement lié à celui du réglage.

Le bon réglage est celui qui répondra au meilleur compromis global du cahier des charges.

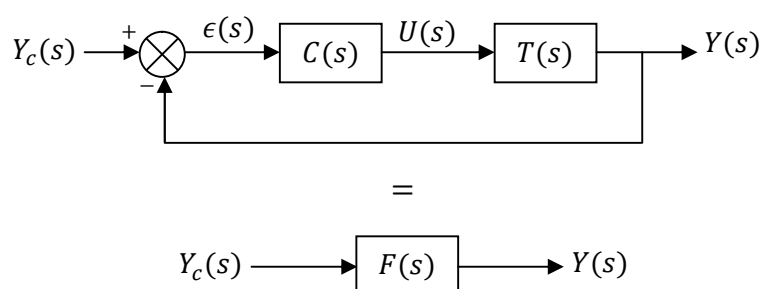
V. 2. Réglage par critère temporel :

Il s'agit d'obtenir, en chaîne fermée, une réponse temporelle bien définie pour une excitation d'entrée imposée. Généralement on désire, pour une variation de la consigne en échelon de position, soit une réponse du premier ordre, soit une réponse du deuxième ordre apériodique ou périodique amortie. Cela correspond en pratique à écrire un modèle pour la fonction de transfert en chaîne fermée.

L'avantage essentiel d'imposer une certaine fonction de transfert en chaîne fermée est de garantir un degré de stabilité mais aussi un bon compromis entre précision et rapidité (les fonctions de transfert perturbatrices n'ayant pas été prises en compte lors de l'élaboration du correcteur, leurs influences sur la forme de la courbe de réponse ne sont pas connues).

V. 2. 1. Réglage PID par modèle de référence :

A partir du schéma bloc représenté ci-dessous, on cherche les valeurs des coefficients du régulateur $C(s)$ qui permettent d'obtenir la réponse désirée pour $Y(s)$ lors d'un changement de consigne $Y_c(s)$.



La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{C(s)T(s)}{1 + C(s)T(s)}$$

Il s'agit de dimensionner le régulateur $C(s)$ en imposant que la fonction de transfert en boucle fermée soit égale à une fonction de transfert $F(s)$ donnée, dite modèle à poursuivre ou modèle de référence.

$$\frac{C(s)T(s)}{1 + C(s)T(s)} = F(s)$$

En extrayant la fonction de transfert $C(s)$ du régulateur :

$$C(s) = \frac{F(s)}{T(s)[1 - F(s)]}$$

☞ Le modèle à poursuivre sélectionné comprend une seule constante de temps τ_m :

$$F(s) = \frac{1}{1 + \tau_m s}$$

Sa réponse $Y(s)$ à un échelon unité $Y_c(s) = \frac{1}{s}$ vaut :

$$Y(s) = \frac{1}{1 + \tau_m s} \frac{1}{s}$$

D'où :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \tau_m s} \frac{1}{s} = 1$$

Ce modèle à poursuivre apparaît ainsi raisonnable : l'entrée $y_c(t) = 1$ est assignée à la sortie $y(t)$ en régime permanent et l'utilisateur peut fixer lui-même la constante de temps en boucle fermée τ_m .

Soit tout d'abord le système à commander :

$$T(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

En portant $T(s)$ et $F(s)$ dans la fonction donnant $C(s)$:

$$C(s) = \frac{\frac{1}{1 + \tau_m s}}{\frac{K}{1 + \tau s} \left(1 - \frac{1}{1 + \tau_m s}\right)} = \frac{1 + \tau s}{K \tau_m s} = \frac{\tau}{K \tau_m} \left(1 + \frac{1}{\tau s}\right)$$

C'est la fonction de transfert d'un régulateur PI avec :

$$K_p = \frac{\tau}{K \tau_m}$$

$$T_i = \tau$$

☞ On considère en suite un processus à commander contenant un effet intégrateur :

$$T(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)}$$

En effectuant la même démarche que ci-dessus :

$$C(s) = \frac{1}{K \tau_m} (1 + \tau s)$$

Il s'agit d'un régulateur PD avec :

$$K_p = \frac{1}{K \tau_m}$$

$$T_d = \tau$$

☞ Soit finalement un système à commander constitué de deux constantes de temps :

$$T(s) = \frac{K}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

En suivant toujours la même démarche :

$$C(s) = \frac{\tau_1 + \tau_2}{K\tau_m} \left(1 + \frac{1}{(\tau_1 + \tau_2)s} + \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} s \right)$$

C'est un régulateur PID pour lequel :

$$K_p = \frac{\tau_1 + \tau_2}{K\tau_m}$$

$$T_i = \tau_1 + \tau_2$$

$$T_d = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$$

Exemple :

L'entraînement électrique commandé en vitesse est gouverné par la fonction de transfert :

$$T(s) = \frac{2}{0.5s + 1}$$

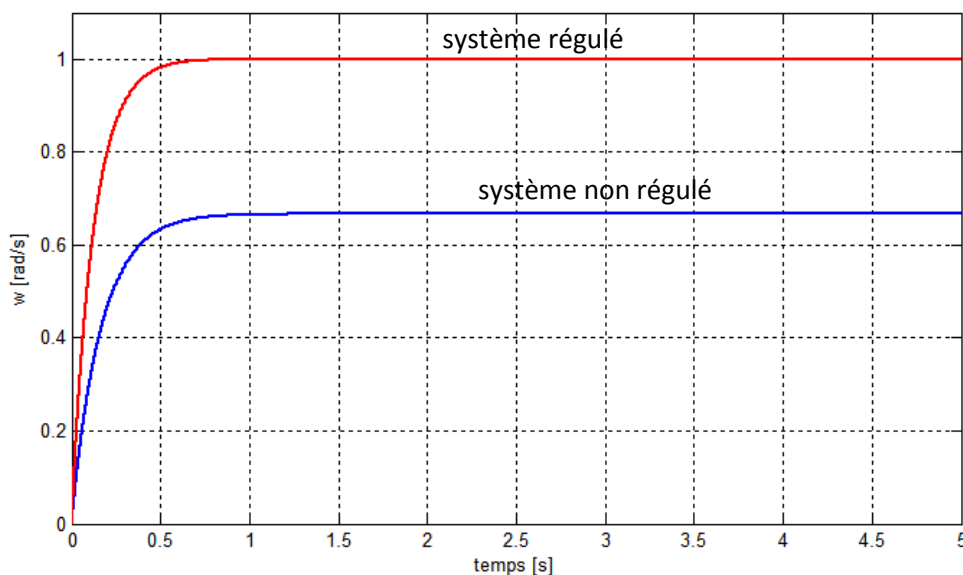
Imposons le modèle à poursuivre $F(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$ avec $\tau = 0.125$ s, soit une constante de temps en boucle fermée quatre fois plus petite que celle en boucle ouverte.

$$\text{Donc : } C(s) = \frac{F(s)}{T(s)(1-F(s))} = \frac{0.5s+1}{2\tau s} = \frac{1}{4\tau} \frac{1+0.5s}{0.5s} = K_p \frac{1+T_i s}{T_i s}$$

$$\text{Où : } K_p = \frac{1}{4\tau} = 2$$

$$T_i = 0.5$$

La réponse de la figure suivante valide la synthèse ; il n'y a pas de statisme (erreur statique) et la constante de temps assignée vaut bien 0.125 s.



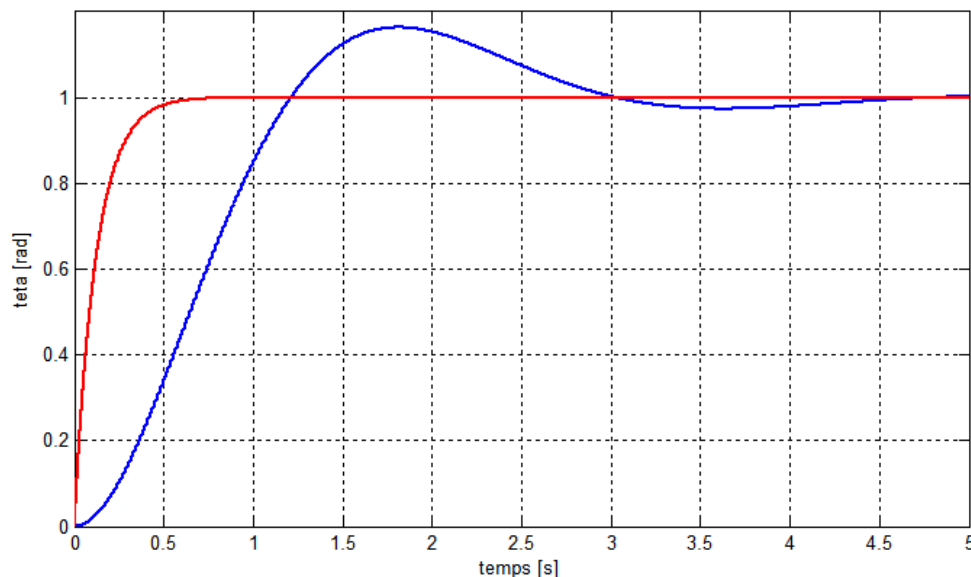
L'entraînement électrique en position est gouverné par la fonction de transfert :

$$T(s) = \frac{2}{s(0.5s + 1)}$$

Toujours avec $\tau = 0.125$ s, on en déduit les paramètres d'un régulateur PD :

$$K_p = \frac{1}{2\tau} = 4$$

$$T_d = 0.5$$



Remarque : Le modèle de référence du premier ordre est appelé le critère idéal, et pour un modèle de référence de deuxième ordre, le critère est appelé le critère parfait, $F(s) = \frac{1}{1+2\xi\frac{s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$

Pour le choix de ω_n , le bon point de départ est de prendre celle-ci égale à celle du processus en boucle ouverte. En asservissement, afin de fixer une dynamique plus rapide elle pourra être plus importante. La valeur maximale admissible sera atteinte lorsque pour le plus grand changement de consigne, la commande sera saturée.

Et pour le choix de ξ , la valeur $\xi = 0.7$ correspond à un léger dépassement assurant un bon temps de réponse. Si l'on ne veut pas de dépassement on prendra $\xi = 0.9$

En régulation $\xi = 0.4$ doit être considéré comme une valeur limite.

Cette méthode de réglage se limite à des procédés ayant des fonctions de transfert relativement simples. Si la fonction de transfert du procédé est complexe, c'est-à-dire si elle comprend, par exemple, un retard et plusieurs constantes de temps différentes, cette méthode conduit alors à un correcteur spécifique.

V. 2. 2. Réglage de Naslin :

a) Principe :

Naslin propose une méthode de réglage dans laquelle la valeur du premier dépassement, pour un changement en échelon de position, est fixée généralement entre 10 et 40 %. Les calculs algébriques conduisent à un bon compromis rapidité-stabilité. Elle se prête bien aux procédés qui décrites par des fonctions de transfert comportant plusieurs constantes de temps différentes.

b) Méthode :

On exprime la fonction de transfert en boucle fermée en fonction des coefficients du régulateur et du procédé, $F(s) = \frac{C(s)T(s)}{1+C(s)T(s)}$. Cette fonction est mise sous la forme d'un rapport de deux polynômes.

☞ Premier cas :

La fonction de transfert en boucle fermée obtenue est de la forme

$$F(s) = \frac{a_0}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots + a_ns^n}$$

La méthode de Naslin a été établie pour n compris entre 3 et 8.

Il faut :

- ✓ Calculer les rapports caractéristiques suivants :

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0a_2}; \alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_1a_3}; \alpha_3 = \frac{a_3^2}{a_2a_4}; \dots; \alpha_i = \frac{a_i^2}{a_{i-1}a_{i+1}}$$

- ✓ Fixer la valeur du premier dépassement désiré, soit $D\%$
- ✓ Calculer la valeur α correspondante par la relation empirique :
 $\log D\% \approx 4.8 - 2\alpha$, si $1.5 < \alpha < 2.3$
- ✓ Écrire que tous les rapports caractéristiques sont égaux à α : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha$
- ✓ A partir de ces équations, calculer les paramètres du régulateur.

Si l'on ne peut pas trouver $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha$ alors le dépassement réel sera inférieur à $D\%$ si α est inférieur à chacun des rapports caractéristiques ($\alpha \leq \alpha_1, \alpha \leq \alpha_2, \dots, \alpha \leq \alpha_n$), mais le temps de réponse sera plus long que prévu.

Si le numérateur de la fonction de transfert en boucle fermée n'est pas constant, l'application des résultats précédents peut conduire à un dépassement réel supérieur au dépassement préalablement fixé.

La méthode de Naslin s'applique encore à condition de modifier la valeur de α .

☞ Deuxième cas :

La fonction de transfert en boucle fermée est de la forme :

$$F(s) = \frac{a_0 + a_1s}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots + a_ns^n}$$

Remplacer α par $\alpha_c = 4\alpha - 4.5$ et recommencer le calcul.

☞ Troisième cas :

La fonction de transfert en boucle fermée est de la forme :

$$F(s) = \frac{a'_0 + a'_1s}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots + a_ns^n} \quad \text{avec } a'_0 \neq a_0 \text{ et } a'_1 \neq a_1$$

La valeur de α provoque un plus grand dépassement que celui choisi initialement.

L'amortissement correspond à α_e (α équivalent) donné par la relation :

$$\alpha_e = 1.5 + \frac{a'_0a_1}{4a_0a'_1}(\alpha - 1.5)$$

Soit on remplace α par $\alpha_c = 1.5 + \frac{4a_0a_1'}{a_0'a_1}(\alpha - 1.5)$, et on recommence le calcul, soit on incrémente α jusqu'à trouver un coefficient α_e de valeur adéquate (informatique conseillée).

☞ **Quatrième cas :**

La fonction de transfert en boucle fermée est de la forme :

$$F(s) = \frac{a_0' + a_1's + a_2's^2}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots + a_ns^n} \quad \text{avec } a_0' \neq a_0, a_1' \neq a_1 \text{ et } a_2' \neq a_2$$

La valeur de α provoque un plus grand dépassement que celui choisi initialement.

L'amortissement correspond à α_e (α équivalent) donné par la relation :

$$\alpha_e = 1.5 + \frac{\omega_0'^2}{16\lambda'^3\omega_0^2}(\alpha - 1.5)$$

Soit on remplace α par $\alpha_c = 1.5 + \frac{16\lambda'^3\omega_0^2}{\omega_0'^2}(\alpha - 1.5)$ avec : $\lambda' = \sqrt{\frac{a_1'^2}{4a_0'a_2'}}$, $\omega_0 = \frac{a_0}{a_1}$ et $\omega_0' = \frac{a_0'}{a_1'}$ puis on recommence le calcul (il arrive souvent que la suite ne converge pas), soit on incrémente α jusqu'à trouver un coefficient α_e de valeur adéquate (informatique conseillée).

c) Temps de réponse réduit :

Naslin a établi que le temps de réponse réduit t_r (correspondant pour lui au premier dépassement) était sensiblement égal à : $t_r \approx \frac{2.2}{\omega_0}$, soit $t_r \approx \frac{2.2a_1}{a_0}$

Dans le cas où le numérateur n'est pas une constante (cas 2, 3 et 4), il faut remplacer ω_0 par ω_{0c} , pulsation donnée par les relations suivantes :

Pour les cas 2 et 3 prendre ω_{0c} tel que :	Pour le cas 4 prendre ω_{0c} tel que :
$\frac{1}{\omega_{0c}} = \frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{2\omega_0'} = \frac{a_1}{a_0} - \frac{a_1'}{2a_0'}$	$\frac{1}{\omega_{0c}} = \frac{1}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0'} = \frac{a_1}{a_0} - \frac{a_1'}{a_0'}$

Le réglage de Naslin conduit presque toujours à une valeur de la constante de temps d'action dérivé importante, ce qui peut nuire si le signal est fort bruité.

V. 2. 3. Réglage P, PI et PID par les méthodes de Ziegler-Nichols :

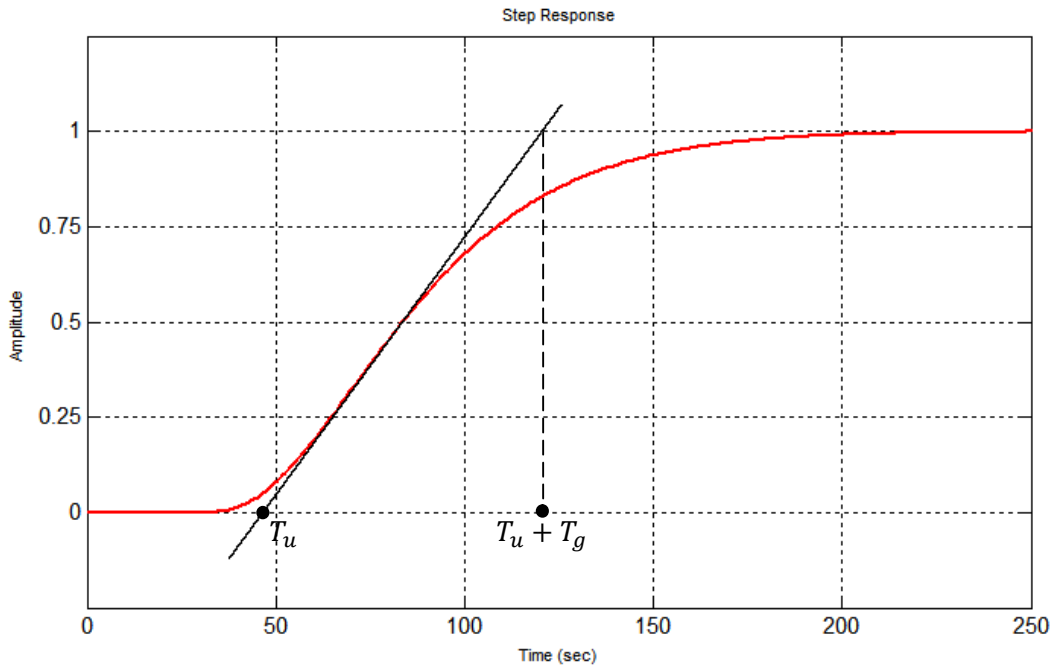
En 1942, Ziegler et Nichols ont proposé deux approches expérimentales destinées à fixer rapidement les paramètres des régulateurs P, PI et PID. Aucune information n'est habituellement fournie quand au régulateur PD. La première nécessite l'enregistrement de la réponse indicelle du système à régler, alors que la deuxième exige d'amener le système en boucle fermée à sa limite de stabilité.

Ces méthodes ne requièrent pas de modèle explicite, tiré des lois physiques, du système à commander. Elles permettent rarement de satisfaire des spécifications sévères. En particulier, le dépassement de la valeur de consigne est souvent trop important.

Il est important de souligner que ces méthodes ne s'appliquent en général qu'à des systèmes sans comportement oscillant et dont le déphasage en hautes fréquences dépasse -180° . Ces systèmes possèdent souvent un retard pur et/ou plusieurs constantes de temps. On les rencontre surtout dans les processus physicochimiques tels que les régulation de température, de niveau, de pression, etc.

a/ Méthode de Ziegler-Nichols en boucle ouverte (première méthode de Ziegler-Nichols) :

Sur l'enregistrement de la réponse indicielle du système à régler en boucle ouverte et sans régulateur, on trace la tangente au point d'inflexion I de la courbe. On mesure ensuite les temps T_u correspondant au point d'intersection entre l'abscisse et la tangente ainsi que le temps T_g , temps de montée de la tangente.



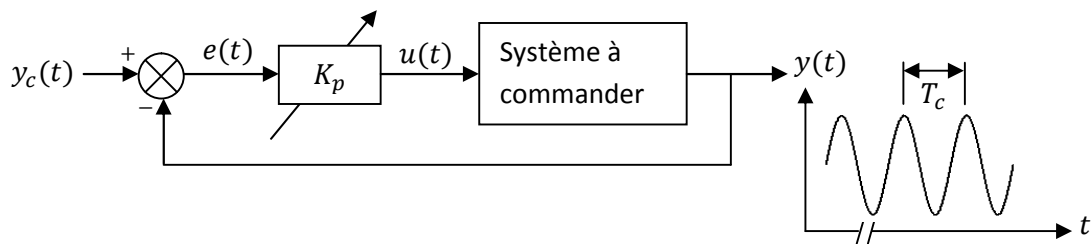
On peut alors calculer les coefficients du régulateur choisi à l'aide du tableau suivant :

Type	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T_g}{T_u}$	-	-
PI	$0.9 \times \frac{T_g}{T_u}$	$3.3 \times T_i$	-
PID	$1.2 \times \frac{T_g}{T_u}$	$2.0 \times T_i$	$0.5 \times T_i$

Généralement les gains proportionnels (K_p) proposés par Ziegler-Nichols sont trop élevés et conduisent à un dépassement supérieur à 20%. Il ne faut donc pas craindre de réduire ces gains d'un facteur 2 pour obtenir une réponse satisfaisante.

b/ Méthode de Ziegler-Nichols en boucle fermée (seconde méthode de Ziegler-Nichols) :

Parfois, dans des installations déjà équipées de leurs régulateurs, il est physiquement difficile, voire dangereux, de débrancher ces régulateurs pour mener un essai indiciel en boucle ouverte sur le seul processus à commander. C'est entre autres le cas pour des systèmes qui ne sont pas stables en boucle ouverte. La seconde méthode de Ziegler-Nichols, adaptée à ce genre de situations, se base sur un essai conduit in situ en boucle fermée avec simple régulateur proportionnel. Le gain K_p de ce régulateur est ajusté jusqu'à la limite de stabilité, ce qui se manifeste par un régime permanent oscillatoire (pompage). La démarche est illustrée dans la figure suivante :



Le gain K_{pc} du régulateur générant ce régime, dit **gain critique**, et la période T_c des oscillations, rencontrée sous le nom de **période critique**, sont mesurés.

On peut calculer les paramètres du régulateur choisi à l'aide du tableau ci-dessous.

Type	K_p	T_i	T_d
P	$0.5 \times K_{pc}$	-	-
PI	$0.45 \times K_{pc}$	$0.83 \times T_c$	-
PID	$0.6 \times K_{pc}$	$0.5 \times T_c$	$0.125 \times T_c$

Les valeurs proposées par Ziegler et Nichols ont été testées dans de très nombreuses situations et il faut souligner qu'ici également elles conduisent à un temps de montée relativement court assorti d'un dépassement élevé.

V. 3. Réglage dans le domaine fréquentiel :

Ce domaine est envisagé lorsque le cahier des charges contient des spécifications relatives à des considérations fréquentielles : bande passante, coefficient de qualité, marge de stabilité (marge de gain ou marge de phase)..., avec éventuellement des spécifications sur la précision et les caractéristiques de la réponse transitoire. Il est basé sur la connaissance du lieu de transfert du procédé qui peut être obtenu soit expérimentalement soit par la connaissance de sa fonction de transfert.

L'insertion du régulateur dans la chaîne de commande permet de modéliser le lieu de transfert en boucle ouverte $FTBOC(s) = C(s)T(s)$ conférant au système en boucle fermée un fonctionnement tel qu'il est précisé dans le cahier des charges.

On rappelle brièvement les performances attendues dans le domaine fréquentiel :

- ☞ Un gain très grand voire infini en basses fréquences de $FTBOC(s)$, ce qui assure une bonne précision en régime permanent;
- ☞ Le lieu de transfert en boucle ouverte doit passer le plus loin possible du point critique, ce qui assure des bonnes marges de stabilité ;
- ☞ La bande passante doit être la plus large possible de manière à obtenir une bonne rapidité.

Donc, pour régler les paramètres du régulateur, il faut connaître la fonction de transfert en chaîne ouverte du procédé et celle du correcteur ou régulateur envisagé. La détermination de ces paramètres peut alors se faire soit par calcul soit graphiquement avec l'aide précieuse de l'informatique.

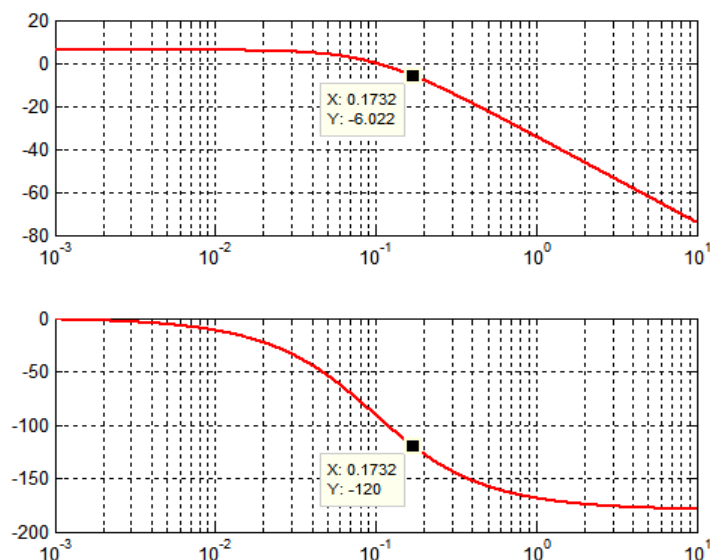
V. 3. 1. Réglage des régulateurs proportionnels :

Modifier le gain du régulateur proportionnel ne modifie pas la phase de la $FTBO$, $T(s)$. Le gain K_p multiplie toutefois le rapport d'amplitude de $T(s)$, déplaçant ainsi la fréquence ω_c à laquelle le rapport d'amplitude vaut 0 dB . C'est à cette fréquence ω_c qu'est calculée la marge de phase. Typiquement, augmenter K_p fait croître ω_c et diminuer la marge de phase.

Exemple :

Le procédé est $T(s) = \frac{2}{(1+10s)^2}$. On désire concevoir un régulateur proportionnel pour que la marge de phase soit 60° . Cette spécification implique que $\arg[T(j\omega_c)] = -120^\circ$.

La figure suivante montre la réponse en fréquences de $T(s)$, c'est-à-dire la $FTBOC(s)$ dans le cas où $K_p = 1$. On constate que si on déplaçait verticalement la courbe de 6.022 dB vers le haut, la marge de phase désirée serait obtenue, d'où $K_p = 6.022 \text{ dB} = 2$.



Mathématiquement, le même résultat se calcule en se basant sur la spécification :

$$\arg[T(j\omega_c)] = -120^\circ = -2\arctg(10\omega) \Rightarrow \omega_c = \frac{\sqrt{3}}{10} = 0.1732 \text{ rad/s}$$

À la fréquence ω_c , le rapport d'amplitude doit être unitaire (0 dB) :

$$|FTBOC(j\omega_c)| = 1 = \frac{2K_p}{1 + 100\omega_c^2}$$

D'où : $K_p = 2$

V. 3. 2. Réglage des régulateurs proportionnels-intégrales :

L'intérêt principal de ce type de correcteur est d'améliorer la précision mais il ralentit le système (par diminution de la bande passante ou augmentation du temps de réponse) et introduit un déphasage de (-90°) en basses fréquences et risque de rendre le système instable ($M_\varphi \searrow$).

Pour à la fois bénéficier de l'amélioration de la précision et éviter de perdre en stabilité et en bande passante, il faudra régler $\frac{1}{T_i}$ aussi bas en fréquence que possible.

☞ si le système n'a pas de réserve de marge de phase ($M_\varphi < 45^\circ$), on place le correcteur une décade avant ω_c soit $\frac{1}{T_i} = \frac{\omega_c}{10}$.

☞ si on a une M_φ suffisante, on peut placer le correcteur plus près de ω_c (jusqu'à $\frac{\omega_c}{4}$).

Exemple :

Soit un système physique dont la FTBO est la suivante :

$$T(s) = \frac{5}{\left(1 + \frac{s}{0.1}\right)\left(1 + \frac{s}{10}\right)}$$

imposons comme cahier des charges les contraintes suivantes : $\begin{cases} M_\varphi = 60^\circ \\ \varepsilon_{position} = 0 \end{cases}$

V. 3. 3. Réglage des régulateurs proportionnels-dérivés (avance de phase) :

Le transfert d'un PD filtré (avance de phase) est : $C(s) = K_p \frac{1+a\tau s}{1+\tau s}$ avec $a > 1$

Comme son nom l'indique, le correcteur à avance de phase permet d'apporter localement de la phase.

Quel apport de phase peut-on espérer avec ce correcteur ? Il suffit de calculer d'abord la pulsation où se produit l'apport de phase maximum (ω_m) et de l'injecter dans l'expression de la phase.

calcul de φ_{max} ?

$$\varphi(\omega) = \arctg(a\tau\omega) - \arctg(\tau\omega)$$

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{a\tau}{1 + (a\tau\omega)^2} - \frac{\tau}{1 + (\tau\omega)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$$

$$\text{donc : } \varphi(\omega_m) = \arctg(\sqrt{a}) - \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$\text{En utilisant la relation : } \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}[\varphi(\omega_m)] = \operatorname{tg}(\varphi_m) = \frac{\operatorname{tg}[\arct(\sqrt{a})] - \operatorname{tg}\left[\arct\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right]}{1 + \operatorname{tg}[\arct(\sqrt{a})] \cdot \operatorname{tg}\left[\arct\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right]} = \frac{a-1}{2\sqrt{a}}$$

On a l'habitude d'exprimer φ_m par son sinus :

$$\sin(\varphi_m) = \frac{\operatorname{tg}(\varphi_m)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_m)}} = \frac{a-1}{a+1}$$

Pour l'algorithme de réglage d'un correcteur à avance de phase, on a les étapes de synthèse suivantes :

1. on repère, à la pulsation équivalente à la Bande Passante que l'on veut obtenir, la phase de $T(j\omega)$:

$$\rightarrow \varphi(\omega_{BP})$$

2. on calcule la marge de phase initiale :

$$M_{\varphi_{init}} = 180^\circ + \varphi(\omega_{BP})$$

3. on calcule l'apport de phase nécessaire pour avoir la marge de phase finale imposée :

$$\rightarrow \Delta\varphi = M_{\varphi_{fin}} - M_{\varphi_{init}}$$

4. on calcule le paramètre ' a ' du correcteur à partir de :

$$\Delta\varphi = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right) \rightarrow a = \frac{1+\sin(\Delta\varphi)}{1-\sin(\Delta\varphi)}$$

5. on choisit ' τ ' pour que la zone de fréquences concernée par l'avance de phase max se situe autour du point critique ($\omega_{BP} = \omega_m$)

$$\rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_{BP}\sqrt{a}}$$

6. on calcule enfin le gain K_p du correcteur en imposant un gain de 1 pour la BO corrigée en ω_{BP} :

$$\rightarrow \left| K_p \frac{1 + a\tau s}{1 + \tau s} \times T(s) \right|_{s=j\omega_{BP}} = 1$$