الأربعاء 06 جانفي 2021

الاهتزازات

المقياس phys03 — حل السلسلة الأولى

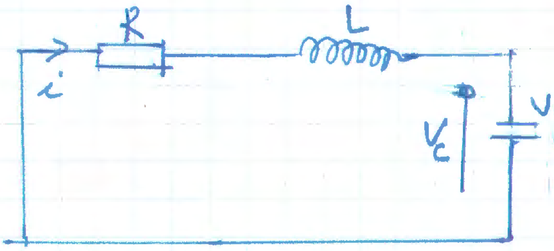
التمرين الثالث

Exo3

لدينا الدارة الكهربائية المتكونة من العناصر التالية RLC
وفرق الكمون $V_C(t)$ بين طرفي المكثفة C

1/ إيجاد المعادلة التفاضلية لمتغيرات فرق الكمون بين طرفي C

تم استنتاج الحل:



بتطبيق مبدأ كيرشوف على الدارة الكهربائية نجد

$$\sum_{i=1}^{3} V_i = 0$$

$$V_C + V_L + V_R = 0 \quad \text{------} (1)$$

ولدينا التوتر بين طرفي المقاومة $V_R = Ri$

التوتر بين طرفي الوشيعة $V_L = L\frac{di}{dt}$

التوتر بين طرفي المكثفة $V_C = \frac{q}{C}$

وقيمة التيار $i = \frac{dq}{dt}$

نعوض في المعادلة (1) بقيم V_R و V_L فنصبح كما يلي

$$V_C + L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

نعوض بقيمة $i(t)$ ومنه تصبح العلاقة

$$V_C + L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} = 0 \quad \text{—} (2)$$

والعلاقة التوتر بين المكثفة $q = CV_C$

نعوض في العلاقة (2)

$$V_C + LC\frac{d^2V_C}{dt^2} + RC\frac{dV_C}{dt} = 0$$

أي

$$LC\ddot{V}_C + RC\dot{V}_C + V_C = 0$$

ومنه

$$\ddot{V}_C + \frac{R}{L}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C = 0$$

$$\ddot{V_c} + \frac{R}{L}\dot{V_c} + \frac{1}{LC}V_c = 0$$

إذن !

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية من الشكل

$$\ddot{V_c} + 2\lambda \dot{V_c} + \omega_0^2 V_c = 0$$

بالمقارنة بين العلاقتين نجد

النبض الذاتي $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ للنظام . / $\lambda = \frac{R}{2L}$: وحيث λ : معامل التخامد

استنتاج الحل !

من خلال الشكل (3,2) نستنتج والذي يمثل البيان الخاص بالنظام الشبه الدوري حيث $\lambda < \omega_0$ ومنه نستنتج الحل المعادلة

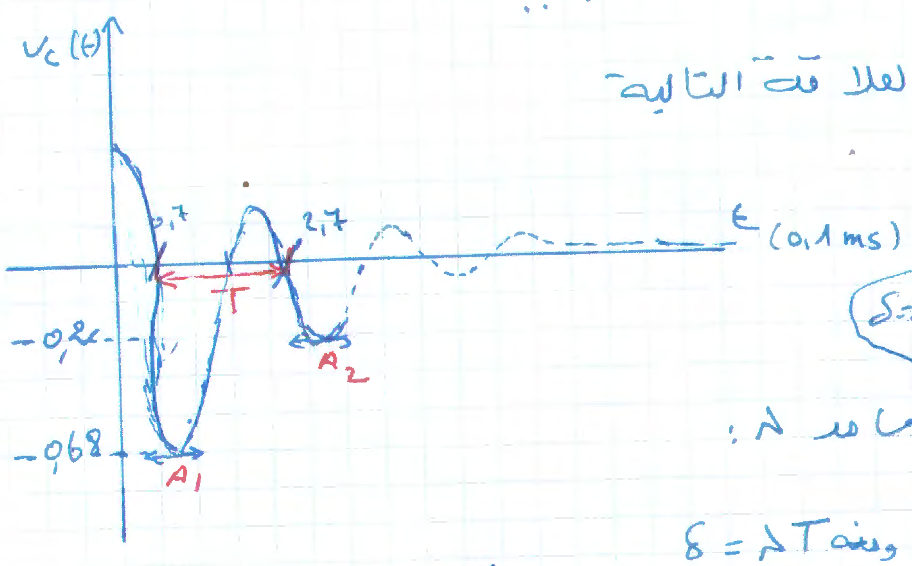
هذه الحالة: $V_c = V_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\varphi)$

حيث $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

ω : النبض الشبه الدوري.

2/ حساب التناقص اللوغارتمي δ :

الذي يعطى بالعلاقة التالية



$$\delta = \ln\frac{A_1}{A_2} = \lambda T$$

$$\delta = \ln\left(\frac{-0,68}{-0,2}\right) = 1,22$$

$T = (2,7 - 0,7)\times 0,1\,ms$

$T = 0,2\,ms$

حساب معامل التخامد λ :

$\delta = \lambda T$ ومنه $\lambda = \frac{\delta}{T}$

$$\lambda = \frac{1,22}{T}$$

$$\lambda = \frac{1,22}{0,2\times10^{-3}} = 6100\ s^{-1}$$

إستنتاج قيمة R و C مع العلم أن $L = 4,7mH$

لدينا $\lambda = \frac{R}{2L} \Rightarrow \boxed{R = 2\lambda L}$

$$\boxed{R = 57,3\ \Omega}$$

حساب قيمة C

لدينا $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ و النبض الشبه الدوري $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$

إذن $\omega_0^2 = \omega^2 + \lambda^2$ أي $\frac{1}{LC} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \lambda^2$

أي $\frac{1}{LC} = \frac{4\pi^2}{T^2} + \lambda^2$

أي $\boxed{C = \frac{T^2}{(4\pi^2 + \lambda^2 T^2)L}}$ ت.ع.

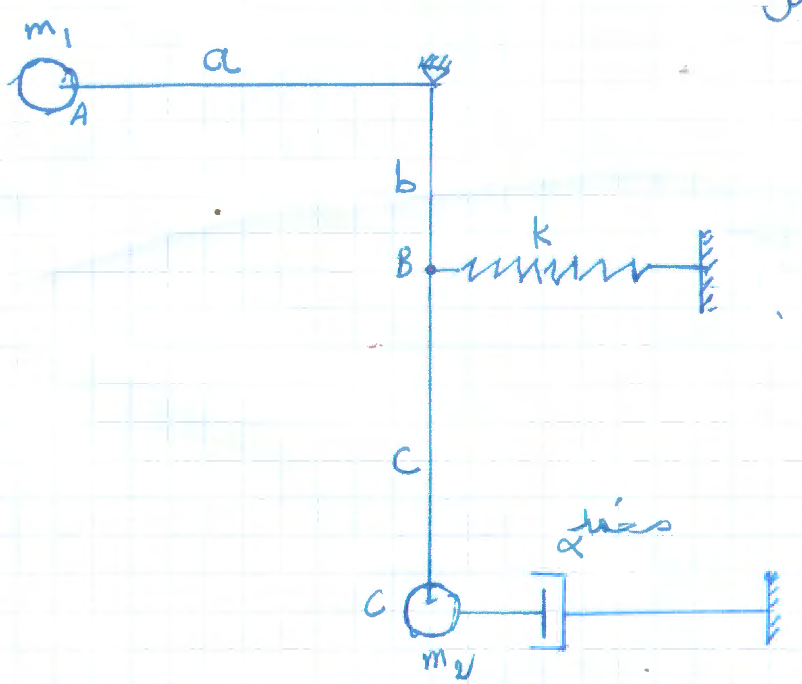
$\boxed{C \simeq 1,0\ nF}$

Série

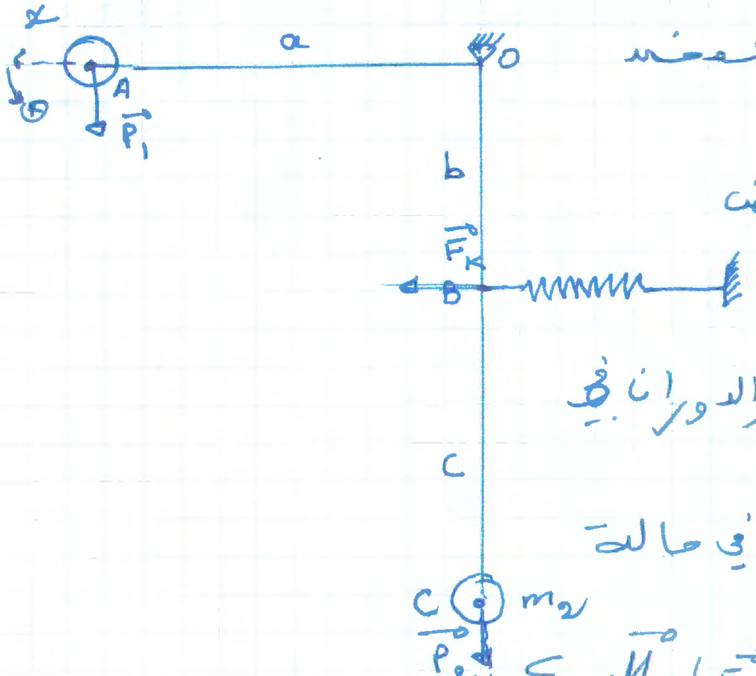
التمرين الرابع

تابع السلسلة الأولى

لدينا النظام الهزاز الممثل



1/ حالة النابض عند ما يكون في وضعية التوازن شاقولية.



النظام في حالة الراحة إذن المخمد

لا يعمل ($\vec{F_\alpha} \propto \vec{v}$)

نفرض الوضعية مع النابض

يكون عنه والتقلص

بما أن النظام مثبت على محور الدوران في

النقطة o

ومنه نطبق مبدأ العزوم في حالة

التوازن أي

$$\sum \vec{\mathcal{M}}(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$$

$$\vec{\mathcal{M}}(\vec{P_1}) + \vec{\mathcal{M}}(\vec{P_2}) + \vec{\mathcal{M}}(\vec{F_k}) = \vec{0}$$

$$\vec{OA} \wedge \vec{P_1} + \vec{OB} \wedge \vec{F_k} + \vec{OC} \wedge \vec{P_2} = \vec{0}$$

أي

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ P_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F_k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (b+c) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ P_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

بما أن الشعاعان $\vec{OC} // \vec{P_2}$ إذن $\vec{OC} \wedge \vec{P_2} = \vec{0}$

أي $a m_1 g - b F_k = 0$

و F_k: قوة إرجاع النابض حيث $F_k = k x_0$ عند التوازن

ومنه $a m_1 g - b k x_0 = 0$

أي $x_0 = + \dfrac{a m_1 g}{b k}$

الإشارة موجبة أي يحقق النابض في حالة تقلص

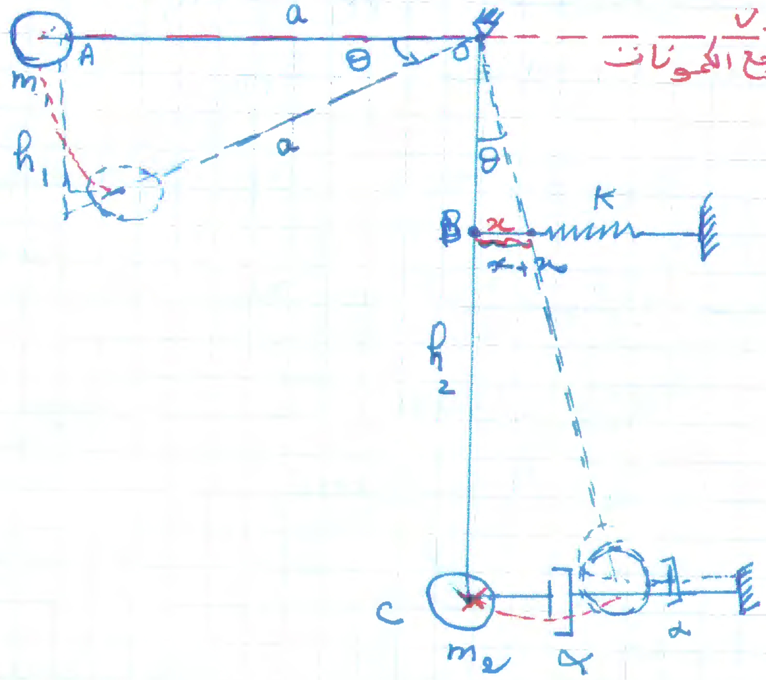
ومنه شرط التوازن

$$x_0 = \frac{m_1 g a}{b k}$$

EX04

2/ إيجاد المعادلة التفاضلية في حالة الاهتزازات الصغيرة

عند الحركة



باستعمال مبدأ لاغرانج لنظام السهتز نجد

$$L = E_c - E_p$$

حيث E_c: الطاقة الحركية للنظام.

E_p: الطاقة الكامنة للنظام

1/ حساب الطاقة الحركية لنظام المهتز في حالة الدوران

$$E_c = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}^2$$

حيث J_1 ، J_2 عبارة عن عزم العطالة الذي حسب

نظرية هيو يغنز $J = J/_G + m d^2$ وبما أن الأثقال مهملة

الأبعاد ومنه $J = m d^2$ حيث d هو البعد عن محور الدوران

$$J_1 = m_1 a^2$$

$$J_2 = m_2 (b+c)^2$$

أي: $E_c = \frac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 (b+c)^2 \dot{\theta}^2$

$$E_c = \frac{1}{2} \left[m_1 a^2 + m_2 (b+c)^2 \right] \dot{\theta}^2$$

حساب E_p الطاقة الكامنة لنظام حيث أولاً نختار مرجع الكمونات

$V=0$ (المرجع لختياري).

$$E_p = E_{pp_1} + E_{pp_2} + E_{pK}$$

Exo 4

حيث E_{pp_1} ، E_{pp_2} الطاقة الكامنة الثقالية

E_{pK} : الطاقة الكامنة المرونية.

$$E_{p_1} = -m_1 g h_1 \quad , \quad E_{pp_2} = -m_2 g h_2 \quad , \quad E_{pK} = \frac{1}{2} k (x + x_0)^2$$

ومنه

$$E_p = -m_1 g h_1 - m_2 g h_2 + \frac{1}{2} k (x + x_0)^2$$

حيث

$$h_1 = a \sin\theta$$
$$h_2 = (b+c) \cos\theta$$

$$x = b \sin\theta$$

ومنه

$$E_p = -m_1 g a \sin\theta - m_2 g (b+c) \cos\theta + \frac{1}{2} k (b\sin\theta + x_0)^2$$

ومنه لاغرونج

$$L = \frac{1}{2} \left[m_1 a^2 + (b+c)^2 m_2 \right] \dot\theta^2 + m_1 g a \sin\theta + m_2 g (b+c) \cos\theta$$
$$- \frac{1}{2} k (b \sin\theta + x_0)^2$$

معادلة لاغرونج للنظام الهزاز المخمد يعطى بالعبارة التالية

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot\theta} = 0$$

* النظام مخمد هذا يعني وجود طاقة ضياع D (تسمى بدالة طاقة التشتت) وتعطى $D = \frac{1}{2} \alpha v^2$.

إذا كان النظام في حالة دوران إذن $v = R\dot\theta$ أي

(حيث R هو البعد بين موضع ربط المخمد ونقطة التثبيت أو الدوران) أي

$$D = \frac{1}{2} \alpha (b+c)^2 \dot\theta^2$$

* نقوم باشتقاق أطراف المعادلة بالشكل التالي لتسهيل الحل:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) \;/\; \frac{\partial L}{\partial \theta} \;/\; \frac{\partial D}{\partial \dot\theta}$$

Ex04

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right)$ نشتق فقط هذا الجزء ثابت

$$= \frac{d}{dt}\left(m_1 a^2 + m_2 (b+c)^2\right)\dot\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = \left[m_1 a^2 + m_2 (b+c)^2\right]\ddot\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\Big[\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(m_1 a^2 + (b+c)^2\right)\dot\theta^2}_{\text{ثابت}} + m_1 g a \sin\theta + m_2 g (b+c)\cos\theta - \tfrac{1}{2}k(b\sin\theta + x_0)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m_1 g a \cos\theta - m_2 g (b+c)\sin\theta - k b\cos\theta(b\sin\theta + x_0)$$

اهتزازات صغيرة يعني

أي $\frac{\partial L}{\partial \theta} = m_1 g a - m_2 g (b+c)\theta - k b(b\theta + x_0)$

أي $\sin\theta \simeq \theta$

$\cos\theta \simeq 1$

الجزء $\frac{\partial D}{\partial \dot\theta}$ أي

$$\frac{\partial D}{\partial \dot\theta} = \frac{\partial}{\partial \dot\theta}\left[\frac{1}{2}\alpha (b+c)^2 \dot\theta^2\right]$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot\theta} = \alpha (b+c)^2 \dot\theta$$

أي المعادلة تكون كما يلي

$$\left[m_1 a^2 + m_2 (b+c)^2\right]\ddot\theta - m_1 g a + m_2 g (b+c)\theta + k b(b\theta + x_0)$$

$$+ \alpha (b+c)^2 \dot\theta = 0$$

$$\Rightarrow \left[m_1 a^2 + m_2 (b+c)^2\right]\ddot\theta \cancel{- m_1 g a} + m_2 g (b+c)\theta + k b^2\theta \cancel{+ k b x_0}$$

$$+ \alpha (b+c)^2 \dot\theta = 0$$

لأن $-m g a + k b x_0 = 0$ من شرط التوازن اذن

$$\left[m_1 a^2 + m_2 (b+c)^2\right]\ddot\theta + \alpha (b+c)^2 \dot\theta + m_2 g (b+c)\theta + k b^2\theta = 0$$

$$\ddot\theta + \frac{\alpha (b+c)^2}{m_1 a^2 + m_2 (b+c)^2}\dot\theta + \frac{\left[m_2 g (b+c) + k b^2\right]}{m_1 a^2 + m_2 (b+c)^2}\theta = 0$$ أي 1

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية لنظام الهزاز المتخامد. من الشكل

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + w_0^2\theta = 0$$

حيث

$$\lambda = \frac{\alpha (b+c)^2}{2[m_1 a^2 + m_2 (b+c)^2]}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{m_2 g (b+c) + k b^2}{m_1 a^2 + (b+c)^2 m_2}}$$

3/ حل هذه المعادلة عندما $m_1 = m_2 = 20\,g.$

إذن تصبح المعادلة

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha (b+c)^2}{m[a^2+(b+c)^2]}\dot{\theta} + \frac{mg(b+c)+kb^2}{m[a^2+(b+c)^2]}\theta = 0$$

إذا $\lambda = \dfrac{\alpha (b+c)^2}{2m[a^2+(b+c)^2]}$ معامل التخامد

$$w_0 = \sqrt{\frac{mg(b+c)+kb^2}{m[a^2+(b+c)^2]}}$$

نقوم بمقارنة بين قيم λ و w_0.

1) إذا كان $w_0 < \lambda$ ← تخامد قوي ← النظام اللادوري

إذن حل المعادلة $\theta(t) = A e^{-r_1 t} + B e^{-r_2 t}$

2) إذا كان $w_0 = \lambda$ ← تخامد حرج ← النظام اللادوري حرج

$\theta(t) = (A + Bt) e^{-\lambda t}$

3) إذا كان $\lambda < w_0$ ← تخامد ضعيف ← النظام الشبه دوري

$\theta(t) = C e^{-\lambda t} \cos(wt + \varphi)$ / $w = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2}$

إذن $\lambda = \dfrac{\alpha (b+c)^2}{2m\left[a^2+(b+c)^2\right]} = 90$ ثا$^{-1}$

$$\omega_0 = \left(\frac{mg(b+c)+kb^2}{m\left[a^2+(b+c)^2\right]}\right)^{1/2} = (50)^{1/2} = 7{,}07\ rad/s$$

إذن $\omega_0 < \lambda$ إذن التخامد قوي ⟸ النظام في هذا
الحالة الاهتزاز هو نظام اللادوري.

إذن حل المعادلة هو

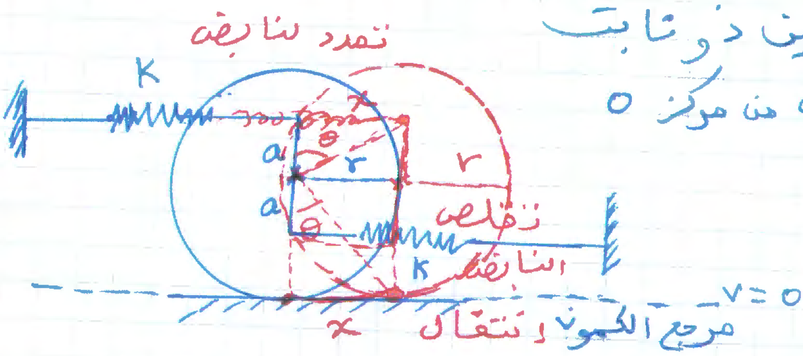
$$\theta(t) = A e^{-p_1 t} + B e^{-p_2 t}$$

حل التمرين الخامس .

الشكل 1-S

إيجاد المعادلة التفاضلية .

نلاحظ أن النظام يتكون من قرص مربوط من جهتين بنابضين ذو ثابت المرونة K عن بعد a من مركز O ونصف قطره r



* 1) وضعية التوازن

$x_0 = 0$

2) عند الحركة / نستعمل لاغرانج لإيجاد المعادلة التفاضلية والتي تعطى

بمعزل توافقي حر $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

* نحسب لاغرانج $\quad L = E_c - E_p$

* الطاقة الحركية E_c لنظام المتمثل في الشكل: (قرص يتدحرج)

$$E_c = E_{c\,\text{دوران}} + E_{c\,\text{انتقال}} = \frac{1}{2} J \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m \dot x^2$$

حيث J : عزم العطالة بالنسبة للقرص

$$J_{\text{القرص}} = J/G + md^2$$

بما أن مركز الدوران عند مركز القرص إذن

$$J_{\text{القرص}} = J/G = \frac{1}{2} m r^2$$

$\dot x = r\dot\theta$ ومنه $x = r\theta$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2} m (r\dot\theta)^2 = \frac{1}{4} m r^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot\theta^2$$

$$E_c = \frac{3}{4} m r^2 \dot\theta^2 \quad \text{لنظام}$$

* الطاقة الكامنة

$$E_p = E_{pK\,\text{تمدد}} + E_{pK\,\text{تقلص}} + E_{pp}$$

$$= mgr + \frac{1}{2}k\left(x_{\text{انتقال}} + x_{\text{دوران}}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(x_{\text{دوران}} - x_{\text{انتقال}}\right)^2$$

$$= mgr + \frac{1}{2}k(r\theta + a\theta)^2 + \frac{1}{2}k(r\theta - a\theta)^2$$

$$E_p = mgr + \frac{1}{2}k(r+a)^2\theta^2 + \frac{1}{2}k(r-a)^2\theta^2$$

$$= mgr + \frac{1}{2}k\left[(r+a)^2 + (r-a)^2\right]\theta^2$$

$$= mgr + \frac{1}{2}k\left[r^2 + \cancel{2ra} + a^2 + r^2 - \cancel{2ra} + a^2\right]\theta^2$$

$$E_p = mgr + \frac{1}{2}k\left[2r^2 + 2a^2\right]\theta^2 = mgr + k\left[r^2 + a^2\right]\theta^2$$

إذن لاغرونج L

$$L = E_c - E_p = \frac{3}{4}mr^2\dot\theta^2 - mgr - k(r^2+a^2)\theta^2$$

إذن معادلة لاغرونج للنظام للهزاز الحر يعطى

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot\theta}\left(\frac{3}{4}mr^2\dot\theta^2 - \underbrace{mgr - k(r^2+a^2)\theta^2}_{cte}\right)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}mr^2\dot\theta\right) = \frac{3}{2}mr^2\ddot\theta$$

إذن:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{3}{2}mr^2\ddot\theta}$$

الطرف الآخر

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\underbrace{\frac{3}{4}mr^2\dot\theta^2 - mgr}_{cte} - k(r^2+a^2)\theta^2\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \theta} = -2k(r^2+a^2)\theta}$$

إذن تصبح العلاقة

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot\theta + 2k(r^2+a^2)\theta = 0$$

ومنه

$$\ddot\theta + \frac{2k(r^2+a^2)}{\frac{3}{2}mr^2}\theta = 0$$

ومنه

Exos Fig(3.5)

$$\ddot{\theta} + \frac{4k}{3m}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\theta = 0$$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية لحركة توافقية حرة

من الشكل $\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$

حيث $\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{3m}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)}$ النبض الذاتي للحركة

وحلها جيبي يعطى من الشكل

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$