# Solution du TD n° 6

## Exercice 1

$$\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. **Calcul de la solution approximative de l'équation différentielle en $x = 1$ à l'aide de la méthode d'Euler**

L'intervalle de travail est $[0,1]$.

Le pas $h$ est : $h = \frac{1-0}{10} = 0.1$.

De plus, on a : $f(x, y) = y + x$.

On peut donc utiliser la méthode d'Euler :

$y(x_{n+1}) \simeq y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$

et obtenir successivement des approximations de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$, $y(0.4)$, $y(0.5)$, $y(0.6)$, $y(0.7)$, $y(0.8)$, $y(0.9)$ et $y(1.0)$. La première itération produit :

$y(0.1) \simeq y(0) + hf(0,1) = 1 + 0.1(1 + 0) = 1.1.$

De manière similaire, la deuxième itération donne :

$y(0.2) \simeq y(0.1) + hf(0.1, 1.1) = 1.1 + 0.1(1.1 + 0.1) = 1.22.$

et la troisième itération donne :

$y(0.3) \simeq y(0.2) + hf(0.2, 1.22) = 1.22 + 0.1(1.22 + 0.2) = 1.362.$

Le tableau suivant rassemble les résultats des dix premières itérations :

| $x_n$ | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y(x_n)$ | 1.0000 | 1.1000 | 1.2200 | 1.3620 | 1.5282 | 1.72102 | 1.943122 |

| 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|
| 2.1974342 | 2.48717762 | 2.815895382 | 3.1874849202 |

Donc, la solution approximative de l'équation différentielle en $x = 1$ est :

$y(1) \simeq 3.1874849202$

2. **Comparaison du résultat obtenu avec la solution exacte**

La solution exacte est : $y_{exacte}(x) = -1 - x + 2e^x$. Ainsi, la solution exacte en $x = 1$ donne :

$y_{exacte}(1) = -1 - 1 + 2e^1 = 3.4365636569$

Donc l'erreur commise est :

$E_e = |y_{exacte}(1) - y(1)| = |3.4365636569 - 3.1874849202| = 0.2490787367$

**Exercice 2**

$$\begin{cases} y' = y + e^{2x} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

1. **Calcul de la première itération de la méthode d'Euler-Cauchy**

Le pas est $h = 0.1$

De plus, on a $f(x, y) = y + e^{2x}$

On peut donc utiliser la méthode d'Euler-Cauchy :

$$y(x_{n+1}) \simeq y(x_n) + \frac{h}{2}\left[f\big(x_n, y(x_n)\big) + f(x_{n+1}, y_{n1})\right]$$

avec

$y_{n1} = y(x_n) + hf\big(x_n, y(x_n)\big)$

et obtenir l'approximation de $y(0.1)$. la première itération produit :

$y_{n1} = y(0) + hf(0, 2) = 2 + 0.1(2 + e^{2*0}) = 2.3$

qui est le résultat obtenu à l'aide de la méthode d'Euler. La deuxième étape donne :

$$\begin{aligned} y(0.1) &\simeq y(0) + \frac{h}{2}[f(0, 2) + f(0.1, 2.3)] = 2 + \frac{0.1}{2}[2 + e^{2*0} + 2.3 + e^{2*0.1}] \\ &= 2.326070138 \end{aligned}$$

**Erreur commise**

La solution exacte est : $y_{exacte}(x) = e^x + e^{2x}$

La solution exacte en $x = 0.1$ donne : $y_{exacte}(0.1) = e^{0.1} + e^{2*0.1} = 2.326573676$, donc l'erreur commise est :

$E_{ec(h=0.1)} = |y_{exacte}(0.1) - y(0.1)| = |2.326573676 - 2.326070138| = 0.000503538.$

2. **Calcul des deux premières itérations de la méthode d'Euler-Cauchy**

Le pas est $h = 0.05$

De plus, on a $f(x, y) = y + e^{2x}$

On peut donc utiliser la méthode d'Euler-Cauchy et obtenir successivement les approximations de $y(0.05)$ et $y(0.1)$. La première itération produit :

$$y_{n1} = y(0) + hf(0,2) = 2 + 0.05(2 + e^{2*0}) = 2.15$$

qui est le résultat obtenu à l'aide de la méthode d'Euler. La deuxième étape donne :

$$\begin{aligned} y(0.05) &\simeq y(0) + \frac{h}{2}[f(0,2) + f(0.05, 2.15)] = 2 + \frac{0.05}{2}[2 + e^{2*0} + 2.15 + e^{2*0.05}] \\ &= 2.156379273 \end{aligned}$$

De manière similaire, la deuxième itération donne :

$$\begin{aligned} y_{n1} &= y(0.05) + hf(0.05, 2.156379273) = 2.156379273 + 0.05(2.156379273 + e^{2*0.05}) \\ &= 2.319456782 \end{aligned}$$

La correction conduit à son tour à :

$$\begin{aligned} y(0.1) &\simeq y(0.05) + \frac{h}{2}[f(0.05, 2.156379273) + f(0.1, 2.319456782)] \\ &= 2.156379273 + \frac{0.05}{2}[2.156379273 + e^{2*0.05} + 2.319456782 + e^{2*0.1}] \\ &= 2.326439516 \end{aligned}$$

**Erreur commise**

l'erreur commise est :

$$E_{ec(h=0.05)} = |y_{exacte}(0.1) - y(0.1)| = |2.326573676 - 2.326439516| = 0.00013416$$

3. **Rapport des erreurs**

Le rapport des erreurs est :

$$R = \frac{E_{ec(h=0.1)}}{E_{ec(h=0.05)}} = 3.75 \simeq 2^2$$

On voie nettement que l'écart entre la solution exacte et la solution approximative diminue d'un facteur de $3.75 \simeq 2^2$ lorsque le pas $h$ est divisé par 2, ce qui confirme que la méthode d'Euler-Cauchy est d'ordre 2.

## Exercice 3 :

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. **Calcul de l'approximation de $y(0.2)$:**

L'intervalle de travail est $[0, 0.2]$.

Le pas $h$ est : $h = 0.1$.

De plus on a : $f(x,y) = -y + x + 1$.

### a. Méthode d'Euler

On peut donc utiliser la méthode d'Euler :

$$y(x_{n+1}) \simeq y(x_n) + hf\big(x_n, y(x_n)\big)$$

et obtenir successivement des approximations de $y(0.1)$ et $y(0.2)$. La première itération produit :

$$y(0.1) \simeq y(0) + hf(0,1) = 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) = 1.$$

De manière similaire, la deuxième itération donne :

$$y(0.2) \simeq y(0.1) + hf(0.1,1) = 1 + 0.1(-1 + 0.1 + 1) = 1.01.$$

Donc l'approximation de $y(0.2)$ en utilisant la méthode d'Euler est $y(0.2) \simeq 1.01$.

### b. Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

On peut donc utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$k_1 = hf\big(x_n, y(x_n)\big)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}\,, y(x_n) + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}\,, y(x_n) + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h\,, y(x_n) + k_3)$$

$$y(x_{n+1}) \simeq y(x_n) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

et obtenir successivement des approximations de $y(0.1)$ et $y(0.2)$. La première itération produit :

$$k_1 = hf(0{,}1) = 0.1(-1 + 0 + 1) = 0$$

$$k_2 = hf\left(0 + \frac{0.1}{2}\,, 1 + \frac{0}{2}\right) = 0.1f(0.05\,, 1) = 0.1(-1 + 0.05 + 1) = 0.005$$

$$k_3 = hf\left(0 + \frac{0.1}{2}\,, 1 + \frac{0.005}{2}\right) = 0.1f(0.05\,, 1.0025) = 0.1(-1.0025 + 0.05 + 1) = 0.00475$$

$$k_4 = hf(0 + 0.1\,, 1 + 0.00475) = 0.1f(0.1\,, 1.00475) = 0.1(-1.00475 + 0.1 + 1) = 0.009525$$

ce qui entraine que :

$$\begin{aligned} y(0.1) &\simeq y(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 1 + \frac{1}{6}(0 + 2 * 0.005 + 2 * 0.00475 + 0.009525) = 1.0048375 \end{aligned}$$

De manière similaire, la deuxième itération donne :

$$k_1 = hf(0.1\,, 1.0048375) = 0.1(-1.0048375 + 0.1 + 1) = 0.00951625$$

$$k_2 = hf\left(0.1 + \frac{0.1}{2}\,, 1.0048375 + \frac{0.00951625}{2}\right) = 0.1f(0.15\,, 1.009595625)$$
$$= 0.1(-1.009595625 + 0.15 + 1) = 0.014040437$$

$$k_3 = hf\left(0.1 + \frac{0.1}{2}\,, 1.0048375 + \frac{0.014040437}{2}\right) = 0.1f(0.15\,, 1.011857718)$$
$$= 0.1(-1.011857718 + 0.15 + 1) = 0.013814228$$

$$k_4 = hf(0.1 + 0.1\,, 1.0048375 + 0.013814228) = 0.1f(0.2\,, 1.018651728)$$
$$= 0.1(-1.018651728 + 0.2 + 1) = 0.018134827$$

ce qui entraine que :

$$y(0.2) \simeq y(0.1) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 1.0048375$$
$$+ \frac{1}{6}(0.00951625 + 2 * 0.014040437 + 2 * 0.013814228 + 0.018134827)$$
$$= 1.018730901$$

Donc l'approximation de $y(0.2)$ en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est $y(0.2) \simeq 1.018730901$.

2. **Erreur commise**

La solution exacte est : $y_{exacte}(0.2) = 1.018730780$

a. Erreur commise par la méthode d'Euler :

$$E_e = |y_{exacte}(0.2) - y(0.2)| = |1.018730780 - 1.01| = 0.008730780$$
$$= 0.873078 * 10^{-2}$$

b. Erreur commise par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$E_{RK4} = |y_{exacte}(0.2) - y(0.2)| = |1.018730780 - 1.018730901| = 0.000000121$$
$$= 0.121 * 10^{-6}$$

Il est clair que la méthode d'Euler est très imprécise par rapport à celle de Runge-Kutta d'ordre 4. Il est donc préférable d'utiliser des méthodes d'ordre aussi élevé que possible.