

Solution du TD n° 4

Exercice 1

1. Calcul de l'intégrale en utilisant la méthode des trapèzes

$$\int_a^b f(x) dx \simeq J_T = (b - a) \left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

$$\int_0^2 \sqrt{x} dx \simeq J_T = (2 - 0) \left[\frac{1}{2} \sqrt{0} + \frac{1}{2} \sqrt{2} \right] \simeq 1.4142$$

2. Calcul de l'intégrale en utilisant la méthode de Simpson

$$\int_a^b f(x) dx \simeq J_S = (b - a) \left[\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b) \right]$$

$$\int_0^2 \sqrt{x} dx \simeq J_S = (2 - 0) \left[\frac{1}{6} \sqrt{0} + \frac{4}{6} \sqrt{1} + \frac{1}{6} \sqrt{2} \right] = 1.8047$$

3. Comparaison

$$J_{\text{exacte}} = \int_0^2 \sqrt{x} dx = \int_0^2 (x)^{1/2} dx = \left[\frac{(x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{2}{3} [\sqrt{x^3}]_0^2 = \frac{2}{3} (\sqrt{2^3} - 0) = 1.8856$$

$$|J_{\text{exacte}} - J_T| = |1.8856 - 1.4142| = 0.4714$$

$$|J_{\text{exacte}} - J_S| = |1.8856 - 1.8047| = 0.0809$$

On constate donc que l'approximation de l'intégrale donnée par la méthode de Simpson est meilleure que celle obtenue par la méthode des trapèzes.

Exercice 2

1. Calcul de l'intégrale en utilisant la méthode des trapèzes généralisée

a. Avec 5 petits intervalles

$$J = \int_0^{\pi} \sin x^2 dx$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi-0}{5} = \frac{\pi}{5}$$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = \pi/5$	$x_2 = 2\pi/5$	$x_3 = 3\pi/5$	$x_4 = 4\pi/5$	$x_5 = \pi$
$f(x_i)$	0.0000	0.3846	1.0000	-0.3999	0.0333	-0.4303

$$\int_a^b f(x) dx \simeq J_{TG_5} = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_5) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4))]$$

$$J_{TG_5} = \frac{\pi}{10} [0.0000 - 0.4303 + 2(0.3846 + 1.0000 - 0.3999 + 0.0333)] = 0.5044$$

b. Avec 10 petits intervalles

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi-0}{10} = \frac{\pi}{10}$$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = \pi/10$	$x_2 = \pi/5$	$x_3 = 3\pi/10$	$x_4 = 2\pi/5$
$f(x_i)$	0.0000	0.0985	0.3846	0.7760	1.0000

$x_5 = \pi/2$	$x_6 = 3\pi/5$	$x_7 = 7\pi/10$	$x_8 = 4\pi/5$	$x_9 = 9\pi/10$	$x_{10} = \pi$
0.6243	-0.3999	-0.9924	0.0333	0.9902	-0.4303

$$\int_a^b f(x) dx \simeq J_{TG_{10}}$$

avec :

$$J_{TG_{10}} = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_{10}) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7) + f(x_8) + f(x_9))]$$

$$J_{TG_{10}} = \frac{\pi}{20} [0.0000 - 0.4303 + 2(0.0985 + 0.3846 + 0.7760 + 1.0000 + 0.6243 - 0.3999 - 0.9924 + 0.0333 + 0.9902)]$$

$$J_{TG_{10}} = 0.7224$$

2. Comparaison

$$J_{exacte} = 0.7726$$

$$|J_{exacte} - J_{TG_5}| = |0.7726 - 0.5044| = 0.2682$$

$$|J_{exacte} - J_{TG_{10}}| = |0.7726 - 0.7224| = 0.0502$$

Pour le cas $n = 5$ l'erreur absolue est 0.2682 par rapport à la solution exacte. Pour le cas $n = 10$ l'erreur absolue a été réduite à 0.0502. Cette erreur absolue est environ 5 fois plus petite que l'erreur obtenue avec 5 intervalles.

Exercice 3 :

1. Calcul de l'intégrale en utilisant la méthode de Simpson généralisée

a. Avec 4 petits intervalles

$$J = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.25$	$x_2 = 0.50$	$x_3 = 0.75$	$x_4 = 1$
$f(x_i)$	1	0.8	0.666667	0.571429	0.5

$$\int_a^b f(x) dx \simeq J_{SG_4} = \frac{h}{3} [f(x_0) + f(x_4) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2)]$$

$$J_{SG_4} = \frac{0.25}{3} [1 + 0.5 + 4(0.8 + 0.571429) + 2 * 0.666667] = 0.693254$$

b. Avec 8 petits intervalles

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = 0.125$$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.125$	$x_2 = 0.250$	$x_3 = 0.375$	$x_4 = 0.500$
$f(x_i)$	1	0.888889	0.8	0.727273	0.666667

$x_5 = 0.625$	$x_6 = 0.750$	$x_7 = 0.875$	$x_8 = 1.000$
0.615385	0.571429	0.533333	0.5

$$\int_a^b f(x) dx \simeq J_{SG_8}$$

Avec :

$$J_{SG_8} = \frac{h}{3} [f(x_0) + f(x_8) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7)) + 2(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6))]$$

$$J_{SG_8} = \frac{0.125}{3} [1 + 0.5 + 4(0.888889 + 0.727273 + 0.615385 + 0.533333) + 2(0.8 + 0.666667 + 0.571429)]$$

$$J_{SG_8} = 0.693155$$

2. Comparaison

$$J_{exacte} = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln 2$$

$$|J_{exacte} - J_{SG_4}| = |\ln 2 - 0.693254| = 1.0682 \cdot 10^{-4}$$

$$|J_{exacte} - J_{SG_8}| = |\ln 2 - 0.693155| = 7.8194 \cdot 10^{-6}$$

Pour le cas $n = 4$ l'erreur absolue est $1.0682 \cdot 10^{-4}$ par rapport à la solution exacte. Pour le cas $n = 8$ l'erreur absolue a été réduite à $7.8194 \cdot 10^{-6}$. Cette erreur absolue est environ 14 fois plus petite que l'erreur obtenue avec 4 intervalles.

3. Erreur maximale

$$|R_{SG}| \leq E_{Max} = \frac{nh^5}{2 \cdot 90} M$$

avec

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$M = \max\{|f^{(4)}(\xi)|\}, \quad \xi \in [a, b]$$

Donc

$$E_{Max} = \frac{(b-a)^5}{180n^4} M$$

Calculons M

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, f''(x) = 2\frac{1}{(x+1)^3}, f'''(x) = -6\frac{1}{(x+1)^4},$$

$$f^{(4)}(x) = 24\frac{1}{(x+1)^5}$$

$$M = \max\left\{24\frac{1}{(x+1)^5}\right\} = \max\left\{24\frac{1}{(x+1)^5}\right\}, \quad x \in [0,1]$$

$$\forall x_1 \in [0,1], \forall x_2 \in [0,1], \quad x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow (x_1 + 1)^5 < (x_2 + 1)^5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x_1 + 1)^5} > \frac{1}{(x_2 + 1)^5} \Rightarrow \frac{24}{(x_1 + 1)^5} > \frac{24}{(x_2 + 1)^5} \Rightarrow |f^{(4)}(x_1)| > |f^{(4)}(x_2)|$$

$$\Rightarrow |f^{(4)}(x)| \searrow$$

⇒ le *Max* est obtenu pour $x = 0$, Donc

$$M = 24 \frac{1}{(0+1)^5} = 24$$

Pour le cas $n = 4$, on obtient :

$$E_{Max} = \frac{(1-0)^5}{180 * 4^4} 24 = 5.2083 * 10^{-4}$$

Pour le cas $n = 8$, on obtient :

$$E_{Max} = \frac{(1-0)^5}{180 * 8^4} 24 = 3.2552 * 10^{-5}$$

Exercice 4 :

1. Calcul de l'intégrale en utilisant la méthode des trapèzes généralisée

$$J = \int_0^{\pi/2} f(x) dx$$

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = \pi/8$	$x_2 = \pi/4$	$x_3 = 3\pi/8$	$x_4 = \pi/2$
$f(x_i)$	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

$$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_a^b f(x) dx \simeq J_{TG_4} = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_4) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))]$$

$$J_{TG_4} = \frac{\pi}{16} [0 + 1 + 2(0.382683 + 0.707107 + 0.923880)] = 0.987116$$

2. Calcul de l'intégrale en utilisant la méthode de Simpson généralisée

$$\int_a^b f(x) dx \simeq J_{SG_4} = \frac{h}{3} [f(x_0) + f(x_4) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2)]$$

$$J_{SG_4} = \frac{\pi}{24} [0 + 1 + 4(0.382683 + 0.923880) + 2 * 0.707107] = 1.000135$$

3. Comparaison

$$J_{exacte} = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -[\cos x]_0^{\pi/2} = 1$$

$$|J_{exacte} - J_{SG_4}| = |1 - 0.987116| = 0.012884$$

$$|J_{exacte} - J_{SG_8}| = |1 - 1.000135| = 0.000135$$

On constate que la méthode de Simpson donne une précision supérieure à celle de la méthode des trapèzes.

4. Nombre d'intervalles n

L'erreur théorique commise par la méthode de Simpson vérifie :

$$|R_{SG}| \leq E_{Max} = \frac{nh^5}{2 * 90} M$$

$$\text{où } M = \text{Max}\{|f^{(4)}(\xi)|\}, \quad \xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ainsi pour que $|R_{SG}| \leq \varepsilon$ il suffit que n vérifie :

$$\frac{nh^5}{180} M = \frac{(b-a)^5}{180n^4} M \leq \varepsilon \Rightarrow n^4 \geq \frac{(b-a)^5}{180 \varepsilon} M$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) \nearrow \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow M = f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Donc

$$n^4 \geq \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)^5}{180 * 10^{-6}} * 1 \Rightarrow n \geq 15.18$$

On prend $n = 16$.