Université des Frères Mentouri **Module : « Méthodes Numériques »**

Semestre 4, 'Sciences et Technologie'

Solution du TD n° 3

Exercice 1 :

$$\begin{cases} -2x_1 + 10x_3 = 7 \\ 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$$

1. **Réécriture du système pour qu'il soit à diagonale dominante:**

Pour que le système soit à diagonale dominante, il faut que la condition suivante soit satisfaite :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i = \overline{1,n}$$

Le système qui vérifie cette condition est :

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 10 \\ -2x_1 + 10x_3 = 7 \end{cases}$$

Parce que :

$$\begin{cases} |-1| + |0| < |10| \\ |-1| + |-2| < |10| \\ |-2| + |0| < |10| \end{cases}$$

2. **Calcul des 3 premières itérations en utilisant la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel :**

a. Méthode de Jacobi :

Le système récursif pour la méthode de Jacobi s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{x_2^k + 9}{10} \\ x_2^{k+1} = \dfrac{x_1^k + 2x_3^k + 10}{10} \\ x_3^{k+1} = \dfrac{2x_1^k + 7}{10} \end{cases}$$

A partir de $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, on trouve :

k	0	1	2	3
x_1	0.0000	0.9000	1.0000	1.0230

x_2	0.0000	1.0000	1.2300	1.2760
x_3	0.0000	0.7000	0.8800	0.9000

La solution approchée est : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1.0230 \\ 1.2760 \\ 0.9000 \end{pmatrix}$

b. Méthode de Gauss-Seidel :

Le système récursif pour la méthode de Gauss-Seidel s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{x_2^k + 9}{10} \\ x_2^{k+1} = \dfrac{x_1^{k+1} + 2x_3^k + 10}{10} \\ x_3^{k+1} = \dfrac{2x_1^{k+1} + 7}{10} \end{cases}$$

A partir de $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, on trouve :

k	0	1	2	3
x_1	0.0000	0.9000	1.0090	1.0277
x_2	0.0000	1.0900	1.2769	1.2831
x_3	0.0000	0.8800	0.9018	0.9055

La solution approchée est : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1.0277 \\ 1.2831 \\ 0.9055 \end{pmatrix}$

Sachant que la solution exacte est : $\vec{X} = \begin{pmatrix} \frac{507}{493} \cong 1.0284 \\ \frac{633}{493} \cong 1.2840 \\ \frac{893}{986} \cong 0.9057 \end{pmatrix}$

On constate que, pour un même nombre d'itérations, la solution approximative obtenue par la méthode de Gauss-Seidel est plus précise. La méthode de Gauss-Seidel a convergé plus vite que la méthode de Jacobi.

Exercice 2 :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

1. **Calcul des 5 premières itérations en utilisant la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel :**

a. Méthode de Jacobi :

Le système récursif pour la méthode de Jacobi s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{-x_2^k + x_3^k + 2}{3} \\ x_2^{k+1} = \dfrac{-x_1^k - 2x_3^k + 17}{5} \\ x_3^{k+1} = \dfrac{2x_1^k - x_2^k + 18}{6} \end{cases}$$

A partir de $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, on trouve :

k	0	1	2	3	4	5
x_1	0.0000	0.6667	0.5333	0.8630	0.8674	0.9406
x_2	0.0000	3.4000	2.0667	2.2311	2.0941	2.0602
x_3	0.0000	3.0000	2.6556	2.8333	2.9158	2.9401

La solution approchée est : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0.9406 \\ 2.0602 \\ 2.9401 \end{pmatrix}$

b. <u>Méthode de Gauss-Seidel :</u>

Le système récursif pour la méthode de Gauss-Seidel s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{-x_2^k + x_3^k + 2}{3} \\ x_2^{k+1} = \dfrac{-x_1^{k+1} - 2x_3^k + 17}{5} \\ x_3^{k+1} = \dfrac{2x_1^{k+1} - x_2^{k+1} + 18}{6} \end{cases}$$

A partir de $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, on trouve :

k	0	1	2	3	4	5
x_1	0.0000	0.6667	0.4704	0.8498	0.9381	0.9775
x_2	0.0000	3.2667	2.2348	2.1163	2.0402	2.0154
x_3	0.0000	2.6778	2.7843	2.9305	2.9727	2.9899

La solution approchée est : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0.9775 \\ 2.0154 \\ 2.9899 \end{pmatrix}$

2. <u>Conclusion</u>

On constate que, pour un même nombre d'itérations, la solution approximative obtenue par la méthode de Gauss Seidel est plus précise. La méthode de Gauss-Seidel converge généralement plus vite que la méthode de Jacobi, mais pas toujours.

<u>Exercice 3 :</u> (supplémentaire)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

<u>Calcul des 3 premières itérations en utilisant la méthode de Jacobi et de Gauss-Seidel :</u>

a. <u>Méthode de Jacobi :</u>

Le système récursif pour la méthode de Jacobi s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{x_2^k - x_3^k - 1}{2} \\ x_2^{k+1} = x_1^k + 3x_3^k \\ x_3^{k+1} = \dfrac{10 - 3x_1^k - 2x_2^k}{5} \end{cases}$$

A partir de $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, on trouve :

k	0	1	2	3
x_1	0.00	-0.50	-1.50	1.10
x_2	0.00	0.00	5.50	5.40
x_3	0.00	2.00	2.30	0.70

b. <u>Méthode de Gauss-Seidel :</u>

Le système récursif pour la méthode de Gauss-Seidel s'écrit :

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{x_2^k - x_3^k - 1}{2} \\ x_2^{k+1} = x_1^{k+1} + 3x_3^k \\ x_3^{k+1} = \dfrac{10 - 3x_1^{k+1} - 2x_2^{k+1}}{5} \end{cases}$$

A partir de $\vec{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$, on trouve :

k	0	1	2	3
x_1	0.00	-0.50	-2.00	1.75
x_2	0.00	-0.50	5.50	4.75
x_3	0.00	2.50	1.00	-0.95

La solution diverge car le système linéaire n'est pas à diagonale dominante (condition suffisante n'est pas vérifiée). Dans le tableau ci-dessous, nous calculons pour les deux méthodes l'erreur relative obtenue pour chaque itération.

k	$\frac{\left\Vert \vec{X}^{(k)} - \vec{X}^{(k-1)} \right\Vert}{\left\Vert \vec{X}^{(k)} \right\Vert}$	
	Jacobi	Gauss-Seidel
1	100 %	100 %
2	91.06 %	107.07 %
3	54.95 %	83.30 %

Il est clair à partir du tableau que la méthode de Gauss-Seidel diverge plus vite que la méthode de Jacobi.